B.弗里特曼著
曾相繁译

应用数学原理与方法

高等教育出版社

·1·9
65

应用数学原理与方法

B. 弗里特曼著

曾　相　繁译

高　等　教　育　出　版　社

本书系按弗里特曼 (Bernard Friedman) 著"应用数学原理与方法"(Principles and Techniques of Applied Mathematics) 1956年版本譯出.

本书共分綫性空間、算子的譜理論、格林函数、常微分方程的本征値問題和偏微分方程等五章. 作者在研究抽象綫性空間及这种空間上的算子的基础上,闡述了解积分方程、求常微分或偏微分方程的格林函数以及常微分或偏微分算子的譜表示等方法, 試图用較高的观点把解应用数学問題的技巧和方法系統化.

本书要求讀者具有綫性代数和复变积分方面的知識, 可供数理系高年級学生、工科研究生、科技人員等參考

应用数学原理与方法

B. 弗里特曼著　曾相繁译

北京市书刊出版业营业許可证出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 K13010・1207　开本 850×1168 1/32　印张 11 7/16

字数 276,000　印数 0,001—4,950　定价(5)¥1.10

1965 年10月第1版　　1965 年10月北京第1次印刷

序

纯粹数学和应用数学间的距离，多年来一直在扩大．一方面纯粹数学家们研究着日益抽象且一般的理论系统和结构；而另一方面，应用数学家们却在研究具体而特殊的问题．当然，我们都知道，这两个领域间的距离实际只是一个假象．因为抽象系统的研究有助于解决具体问题，而特殊问题的研究则可能启发纯粹数学家们作出一些有意义的推广．

本书试图阐明：如何引用从抽象研究发展起来的一些有效方法来把解应用数学问题的技巧和方法系统化．作这种系统的处理，需要学者有充分的准备知识．因此本书一半以上的篇幅致力于研究抽象线性空间及定义在这种空间上的算子．尽管如此，本书的重点并不在抽象的理论上，而是在能从这些理论推出的，解决一些特殊问题的方法上．例如，第三章中的罗伦·许瓦兹的“分布论”原理或“广义函数论”基础，就是以对使用它的人(如应用数学家、物理学家和工程师们)易于接受的形式来介绍的．

像这样一本应用数学的入门书，自然不能包含什么新的或首创的材料．但可以确信，这里所提供的一些方法，如解积分方程，求常微分或偏微分方程的格林函数，常微分算子的谱表示等，对一般的读者还是比较少见的．阐述这些方法，是本书的主要目的．

对于主题的处理，我尽可能侧重于概念而不纠缠于琐屑的证明．因此，许多细节、例子以及正文的推广都放在问题和附录中．为了获得这些主题的完备知识，建议读者把这些问题和正文一样地来研究才好．

还该用几句话来说明符号和术语方面的变动．对两个矢量 x

与 y 的数量积，我们不用通行的记法 (x, y)，而采用 $\langle x, y\rangle$. 这是把狄拉克曾用过的符号略加修改而成的，好处是可避免过多地使用圆括号. 通常，仅当常(偏)微分算子的定义域由边界值为零的函数组成时，形成它的逆算子(积分算子)的核，才叫做格林函数. 在本书中，当微分算子的定义域由这种函数组成，它满足任何线性齐次的但不一定为零的边界条件时，我们仍然使用这一术语. 格林函数的这种用法在物理学家中间是很普遍的，它具有许多优点，值得推荐.

几年来，本书的主要内容曾在纽约大学研究院作为一个学年课程的教材. 学这个课程必须先有线性代数和复变积分方面的预备知识. (下略)

B. 弗里特曼

1956 年 3 月

目　录

第三章　格林函数

第四章　常微分方程的本征值問題

第五章 偏微分方程

第一章　綫性空間

§1.1. 引言

在应用数学中，用来解线性问题的许多概念和方法，是代数中解联立线性方程组的概念和方法的推广．这种推广是在研究线性空间时引起的，而线性空间的理论又是三维矢量分析理论的扩展．以后各节将指出线性空间的理论包括 n 维欧氏空间 $E_n(n=1,2,3,\cdots)$，无穷维欧氏空间 E_∞，以及函数空间等作为它的特殊情形．我们考虑下列三个联立线性方程的例子，来作为研究线性空间的开端．

求 x_1,x_2,x_3 之值，使满足

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\
&a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

如所周知，如果方程组(1.1)中 $b_1=b_2=b_3=0$ 时所成的齐次方程组具有非零解，则方程组(1.1)一般说来将无解．设 $x_1=x_1'$，$x_2=x_2'$，$x_3=x_3'$ 是这些齐次方程的一组解，而 $x_1=x_1''$，$x_2=x_2''$，$x_3=x_3''$ 是另一组解，则

$$
\begin{aligned}
&x_1=\alpha x_1'+\beta x_1'',\\
&x_2=\alpha x_2'+\beta x_2'',\\
&x_3=\alpha x_3'+\beta x_3'',
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

当 α 和 β 是任意常数时也是齐次方程组的一组解．

我们可用一个有趣的几何方法来表明这一事实．令 x' 表示一个以 x_1',x_2',x_3' 为分量的矢量，而 x'' 表示一个以 x_1'',x_2'',x_3'' 为分量的矢量，则以(1.2)式为分量的矢量在由矢量 x',x'' 所确定的平面上，

我们看到，若矢量 x' 和 x'' 的分量都是对应于(1.1)的齐次方程组的解，则与 x', x'' 共面的任一矢量的分量，也都是同一组齐次方程的解.

这种很直观且很富有启发性的几何语言可以推广，用来讨论更复杂的线性问题. 例如，我们来考察解含 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性齐次方程的问题. 和上边一样，若数组 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 是这些方程的一组解，而 $x''_1, x''_2, \cdots, x''_n$ 是另一组解，则数组

$$x_1 = \alpha x'_1 + \beta x''_1,$$

$$x_2 = \alpha x'_2 + \beta x''_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \alpha x'_n + \beta x''_n,$$

仍是一组解. 现在若定义矢量 x 的分量为 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，我们有下边的几何结论:

若矢量 x' 和 x'' 的分量分别是齐次方程组的解，则在 x', x'' 所确定的平面上的任一个矢量的分量也是同一个齐次方程组的解.

从不同情形中得到同样结果这一事实，表明了这种几何观点的用处. 本章我们将利用公理法把这一几何观点表现为更一般的形式，这样导出的结果将对所有满足公理的情况都适用.

§1.2. 綫性矢量空間

在前节的讨论中，我们曾用分量来定义矢量，这种方法有其局限性，因为它必须引入定出分量的确定坐标系，然而，我们知道，至少在三维空间中，矢量是一种不依赖于任何坐标系的几何量.

现在我们要来建立一种框架，它将有足够的普遍性，得以容纳矢量概念的各种可能的推广. 考虑一个集 $\mathscr{S}$，它的元素我们用小写的拉丁字母 $x, y, z, \cdots, a, b, \cdots$ 来表示. 设在集 $\mathscr{S}$ 的元素中已定

义了一种运算，我们称之为加法运算，并记作+. 这运算有以下的性质：

(1) $\mathscr{S}$中任二元素 x 和 y 可以相加，其结果仍是$\mathscr{S}$中的一个元素 z，记为 $x+y=z$.

(2) 这运算满足交换律和结合律，即

$$x+y=y+x,$$

$$(x+y)+w=x+(y+w).$$

(3) $\mathscr{S}$含有唯一的元素 0，称为零元素，使得对于$\mathscr{S}$中的元素 x，有

$$x+0=x.$$

(4) 对$\mathscr{S}$中的任一个元素 x，总存在一个元素，记作 $-x$，使得

$$x+(-x)=0.$$

要理解这些概念，可将$\mathscr{S}$看成 n 维欧氏空间 E_n 中的矢量集. 此空间中的任何矢量都是含 n 个实数的一个数组

$$x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n).$$

上面的加法运算，对应着通常的矢量加法，其定义如下：

设

$$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n);$$

则

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n).$$

若定义

$$0=(0, 0, \cdots, 0)$$

及

$$-x=(-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n),$$

易见这些定义满足上述的性质 1 到 4.

但是，E_n 中的矢量集还有另外的一些性质. 例如，若 x 是 E_n 中的矢量，则 $2x$，即分量两倍于 x 分量的矢量，也在 E_n 中. 现

在我们要用抽象术语来表明这个性质.

令希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 表示某个域①中的数，我们称这些数为数量. 设对任一数量 α 及任一矢量 x，定义了一个记作 αx 的矢量，我们称它为矢量 x 与数量 α 的乘积. 这乘积的定义应该有下列的性质:

$$\begin{aligned} &\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, \\ (1.3)\qquad &(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \\ &\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \\ &1\cdot x=x. \end{aligned}$$

其中, α 和 β 是任意的数量, 而 x 和 y 是 $\mathscr{S}$ 中任意的矢量.

在 E_n 中, 矢量乘以数量的结果可以定义为将这矢量的每一个分量分别乘以该数量而得的矢量. 这一定义, 显然具有(1.3)的性质.

任意空间 $\mathscr{S}$，如果在加法和乘以数量的运算下是封闭的②，就叫做线性矢量空间，并且称它的元素为矢量. 例如，$E_n(n=1, 2, \cdots)$就是一个线性矢量空间.

n 维矢量空间的概念还可以推广为无穷维矢量空间 E_∞ 的概念. 在 E_n 中, 矢量 x 是含 n 个实数的数组:

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n);$$

在 E_∞ 中, 矢量 x 是含可数无穷多个实数的数组:

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots).$$

如果 x 定义如上, 且若

$$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots),$$

① 一个域是这样一个数集, 它含有集中任二数的和, 差, 积, 商. 当然, 不能用零去除. 有理数集, 实数集, 以及复数集都是域的例子.

② 即是說, 对 $\mathscr{S}$ 中的元素进行加法和乘以数量的运算結果, 仍是 $\mathscr{S}$ 中的元素. ——譯者注

妙

则 E_∞ 中的加法规则就是大家所能预料的:

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots).$$

而 x 与数量 α 的乘积就是矢量

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots).$$

从这些定义显然可以看出 E_∞ 是一个线性矢量空间.

除了这些简单的例子以外，线性矢量空间还有许多其他的例子. 例如，所有连续于区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的函数 $f(t)$，构成了一个以 $f(t)$ 为矢量的线性矢量空间. 这矢量的分量就是在区间上不同点的函数值. 二矢量 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的和是函数 $h(t)$，它的函数值是 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的值的和. 矢量 $f(t)$ 乘以数量 α 的结果仍是一函数，它的函数值是 $f(t)$ 的值的 α 倍.

另外一个在研究微分方程和积分方程时很重要的矢量空间的例子是: 使 $g(t)^2$ 在区间 $(0, 1)$ 上勒贝格可积的一切实函数 $g(t)$ 所成的空间. 这空间我们记作 $\mathscr{L}_2$. 矢量的加法和矢量乘以数量的运算可与连续函数空间一样来定义.

§ 1.3. E_n 和 E_∞ 中的数量积

到目前为止，矢量分析中还有一个重要的概念未曾用上，这就是两个矢量的数量积这个概念. 若 x 和 y 是三维空间中的矢量，它们的数量积，我们将记作 $\langle x, y\rangle$，是这两个矢量对应分量乘积的和. 用数量积的概念，可定义 x 的长度为 x 与其自身的数量积的正平方根. 也规定当且仅当二矢量的数量积为零时，它们才是互相垂直或正交的.

这些概念容易推广到空间 E_n 和 E_∞. 在 E_n 中，矢量 x 和 y 的数量积定义如下:

(1.4) $$\langle x, y\rangle=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n.$$

而在 E_∞ 中，数量积由下边的无穷级数来定义，即

(1.5) $$\langle x, y\rangle=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots.$$

这一定义仅当级数收敛时有效.

正如在三维空间中一样，E_n 或 E_∞ 中矢量的长度可定义为 x 与其自身数量积的正平方根. 若将 x 的长度记作 $|x|$，在 E_n 中有

$$|x|=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

而在 E_∞ 中则为

(1.6) $$|x|=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots)^{\frac{1}{2}}.$$

与(1.5)类似，这一定义仅用于无穷级数收敛的情形. 注意，我们也用 $|\xi_1|$ 来表示数量 ξ_1 的绝对值.

若级数(1.6)收敛，就说矢量 x 具有有限长度；否则，就说 x 具有无限长度. 今后我们要限定 E_∞ 为那些具有有限长度的矢量所成的空间，亦即 E_∞ 只包含那些使无穷级数 $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots$ 收敛的矢量

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots).$$

当然，此时 E_∞ 是线性矢量空间就不再是显然的事情了，因为即使 x 和 y 都具有有限长度，我们并不能确信 $\alpha x+\beta y$ 也具有有限长度. E_∞ 是一个线性矢量空间这一事实，将在问题 1.3 中证明. 我们注意，问题 1.2 证明：若 x 和 y 有有限长度，则定义(1.5)有效；因此，对 E_∞ 中任意二矢量都定义了数量积.

問 題

1.1. 试证在 E_n 和 E_∞(假定所有的级数收敛)中：

$$\langle\alpha x, y\rangle=\langle x, \alpha y\rangle=\alpha\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_1+x_2, y\rangle=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle,$$

$$|\alpha x+\beta y|^2=\langle\alpha x+\beta y,\ \alpha x+\beta y\rangle=\alpha^2\langle x, x\rangle+2\alpha\beta\langle x, y\rangle+$$
$$+\beta^2\langle y, y\rangle.$$

1.2. 试证：若 x 和 y 是 E_∞ 中具有有限长的矢量，则 x 和 y 的数量积有意义，且有

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant|x|\cdot|y|.$$

这个结果叫做柯西-许瓦兹不等式①.

(提示：矢量 $\alpha x_n+\beta y$ 长度的平方对一切 α 和 β 都是非负值. 令

$$x_n=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots),$$

$$\alpha=|y|^2, \quad \beta=\langle x_n, y\rangle$$

然后用上题最后一个结果证明

$$|\langle x_n, y\rangle|\leqslant|x_n|\cdot|y|.)$$

1.3. 证明 E_∞ 是一个线性矢量空间.(提示：用上题证明：若 x 和 y 有有限长度, 则 $\alpha x+\beta y$ 也有有限长度).

1.4. 考虑 n 维复空间 $\bar{E}_n$, 其中矢量 x 是含 n 个复数的数组, 且矢量 x 和 y 的数量积用下式来定义, 即

$$\langle x, y\rangle=\bar{\xi}_1\eta_1+\bar{\xi}_2\eta_2+\cdots+\bar{\xi}_n\eta_n.$$

这里, 字母上的一横, 表示共轭复数. 试证

$$\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle},$$

$$\langle \alpha x, y\rangle=\bar{\alpha}\langle x, y\rangle,$$

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant|x|\cdot|y|.$$

1.5. 考虑无穷维复空间 $\bar{E}_\infty$, 其中矢量 x 是一个可数无穷多个复数构成的数组, 且 x 和 y 的数量积是

$$\langle x, y\rangle=\bar{\xi}_1\eta_1+\bar{\xi}_2\eta_2+\cdots.$$

试证：若 x 和 y 具有有限长度, 则定义 $\langle x, y\rangle$ 的和收敛且

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant|x|\cdot|y|.$$

§ 1.4. 抽象空間中的数量积

在抽象空间 $\mathscr{S}$ 中, 数量积是二矢量 x 和 y 的数值函数, 记作 $\langle x, y\rangle$, 它满足

(1.7) $$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$$

$$\langle \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y\rangle=\alpha_1\langle x_1, y\rangle+\alpha_2\langle x_2, y\rangle,$$

且当 x 是非零矢量时, 有

(1.8) $$\langle x, x\rangle>0.$$

---

① 也叫做柯西-布雅可夫斯基不等式. ——譯者注

方程(1.4)和(1.5)分别是E_n和E_∞中数量积的定义. 在$\mathscr{L}_2$中,二矢量f和g的数量积定义为

$$\langle f, g\rangle=\int_0^1 f(t) g(t) d t .$$

利用数量积,矢量的长度可定义如下:

$$|x|=+\sqrt{\langle x, x\rangle} .$$

当

$$\langle x, y\rangle=0$$

时, 二矢量x和y叫做正交或垂直的. 这与三维空间中相应的定义吻合.

对于以实数为乘数的矢量空间, 取具有性质(1.7)和(1.8)的数量积是相宜的. 有时为了方便,用复数来作乘数且假定数乘的性质(1.3)不变. 这样,空间$\mathscr{S}$将扩展到空间$\overline{\mathscr{S}}$, 它包含以复数为分量的矢量,且数量积的性质(1.7)仍假定成立. 然而这个推广了的数量积不再是实数了, 而一个非零矢量的长度也可能是零. 例如,E_2中以$(1, i)$为分量的矢量就具有零长度.

这种非零矢量具有零长度的障碍是可以除掉的, 只要我们在$\overline{\mathscr{S}}$中定义复型数量积就行了,它有以下的性质:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}, \\
(1.9)\qquad &\langle \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y\rangle=\bar{\alpha}_1\langle x_1, y\rangle+\bar{\alpha}_2\langle x_2, y\rangle, \\
&\langle x, x\rangle>0, \quad \text{若} x \neq 0 .
\end{aligned}$$

在问题1.4和1.5中,对空间$\bar{E}_n$和$\bar{E}_\infty$, 我们定义了满足(1.9)的数量积. 在由一切满足

$$\int_0^1|f(t)|^2 d t<\infty$$

的复函数所成的空间$\overline{\mathscr{L}}_2$中,矢量$f(t)$和$g(t)$的数量积定义为