

高等数学习题错解分析

(一)

华天瑞 编著



科学技术文献出版社

高等数学习题错解分析

(一)

华天瑞 编著

郑洪琛 审定

科学技术文献出版社

1987

内 容 简 介

本书主要针对高等数学中的基本概念及计算方法进行分析、讨论。内容的深广度与现行工科高等数学教学大纲基本相符。全书拟按不同内容分册出版。本册涉及一元函数微积分的内容，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数应用、不定积分与定积分、级数，约有150个问题。写法步骤是，提出问题，给出错误解法，分析错误原因，给出正确解答。这些问题的错误解法都是学生在学习高等数学中经常出现的，具有一定的代表性和典型性。本书在帮助读者从正、反两方面深入理解基本概念和提高判断、分析问题的能力上有独到之处。每章后面附有若干选择题供读者练习。

读者对象：理工科大学生、自学青年，也可供大、中学教师作教学参考。

高等数学习题错解分析（一）

华天瑞 编著

科学技术文献出版社出版

中国科学技术情报研究所印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 印张 6.125 字数 132千字

1987年4月北京第一版第一次印刷

印数，1—18,000册

科技新书目，134—88

统一书号，13176·205 定价，1.30元

目 录

第一章	函数	(1)
第二章	极限与连续	(19)
第三章	导数与微分	(42)
第四章	中值定理及导数的应用	(66)
第五章	不定积分与定积分	(86)
X第六章	级数	(126)
X第七章	杂题	(152)
	练习题答案	(191)

第一章 函 数

1-1

$$y = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right) \text{ 与 } y = 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

是相同的函数吗?

【错解】由初等数学的运算性质知:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right) &= \ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}\right) \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right),\end{aligned}$$

所以这两个函数是相同的函数。

【分析】判断两个函数是否相同的原则，应考察是否存在相同的定义域及对应关系，这是函数定义的两要素。

注意到初等数学中关于对数运算法则：

$$\ln(u^2) = 2\ln u$$

是在条件 $u>0$ 下才成立的，而在考虑函数 $\ln(u^2)$ 的定义域时却并不受 $u>0$ 的限制。所以现在上述两个函数是否相同的关键是其定义域是否相同。

【正确解答】 $y = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 的定义域为

$$D_1 = \{x | x \neq 0; x \in R\}.$$

$y = 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 的定义域为

$$D_2 = \{x | x > 0; x \in R\}.$$

由此，这两个函数的定义域不同，它们是不同的函数。

1-2 $y = 2\ln x$ 及 $x = 2\ln y$ 是相同的函数吗?

【错解】因为从 $x = 2\ln y$ 中可解出等价的关式 $y = e^{\frac{x}{2}}$, 显然 $y = 2\ln x$ 与 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 是两个不同的函数, 所以 $y = 2\ln x$ 与 $x = 2\ln y$ 是不同的函数.

【分析】 $y = 2\ln x$ 及 $x = 2\ln y$ 在同一直角坐标系 xOy 中确实表示两条不同的曲线. 但是, 不同的曲线并不一定表示不同的函数. 因为曲线作为函数的几何表示, 是要涉及到坐标系的, 而函数概念本身并不指定要与什么坐标系相联系. 判断两个函数是否相同的标准, 只能是函数定义的两要素, 而与变量取什么字母无关, 与坐标系的选取方式也无关.

【正确解答】 $y = 2\ln x$ 与 $x = 2\ln y$ 这两个函数, 其自变量有相同的定义域, 因变量与自变量有相同的对应关系, 所以它们是相同的函数.

由此知, $y = e^x$ 的反函数既可用 $x = \ln y$ 表示, 也可用 $y = \ln x$ 表示.

1-3 若 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 问 $y = f(x+1)$ 的定义域是什么?

【错解】由 $0 \leq x \leq 1$ 得 $1 \leq x+1 \leq 2$. 所以 $y = f(x+1)$ 的定义域为 $[1, 2]$.

【分析】考虑例子: $y = \sqrt{\arcsin x}$.

它的定义域为 $[0, 1]$. 但对函数 $y = \sqrt{\arcsin(x+1)}$, 当 $x=1$ 时找不到对应的 y 值. 可见 $[1, 2]$ 并不是它的定义域.

$y = f(x+1)$ 可看成以下两个函数的复合:

$$y = f(u), \quad u = x+1$$

$y = f(u)$ 与 $y = f(x)$ 是相同的函数, 所以 u 的变化范围应是 $0 \leq u \leq 1$. 现在的问题转化为已知 $u = x+1$ 的值域, 求其定义域.

【正确解答】由函数 $u = x + 1$ 的值域为 $[0, 1]$ 知 $0 \leq x + 1 \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq 0$. 所以, $y = f(x + 1)$ 的定义域为 $-1 \leq x \leq 0$.

1-4 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2a]$, 问

$f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域是什么?

【错解】由 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2a]$ 知 $f(x + a)$ 的定义域为 $[a, 3a]$, $f(x - a)$ 的定义域为 $[-a, a]$. 所以 $f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域为

$$[a, 3a] \cup [-a, a] = [-a, 3a].$$

【分析】上段解答中有两个错误. 一是 $f(x + a)$ 及 $f(x - a)$ 的定义域的计算是错误的, 分析见题1—3. 二是两个函数的和函数的定义域应是这两个函数定义域的交而不是并.

【正确解答】

$f(x + a)$ 的定义域应为 $-a \leq x \leq a$.

$f(x - a)$ 的定义域应为 $a \leq x \leq 3a$.

$$[-a, a] \cap [a, 3a] = \{a\}.$$

所以 $f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域是孤立点 $x = a$.

1-5 求函数 $y = \arcsin \left[\lg \frac{x-1}{x-10} \right]$ 的定义域.

【错解】当 $\frac{x-1}{x-10} > 0$ 时函数有定义. 解此不等式, 得函数定义域为: $\{x | x > 10\} \cup \{x | x < 1\}$.

【分析】这是一个复合函数, 其复合关系为:

$$y = \arcsin u, \quad u = \lg v, \quad v = \frac{x-1}{x-10}.$$

考虑复合函数定义域时应由最外层的复合关系算起, 逐

层向内推算，最后确定自变量 x 的取值范围。若先由里层的复合关系算起，必然会顾此失彼。

【正确解答】 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $-1 \leq u \leq 1$ ，从而推知 $-1 \leq \lg v \leq 1$ ，即有：

$$0.1 \leq v \leq 10.$$

最后归结为解不等式：

$$0.1 \leq \frac{x-1}{x-10} \leq 10,$$

得

$$\{x | x \geq 11\} \cup \{x | x \leq 0\}.$$

这个例子告诉我们应如何求复合函数的定义域。

1-6 给出函数 $y = x^2 + 1$ 及 $y = 1 + 4x - x^2$ ，求这两个函数值域的交。

【错解】 求解联立方程 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 1 + 4x - x^2 \end{cases}$

得到解 $(0, 1)$ 及 $(2, 5)$ 。所以这两个函数值域的交为 $y = 1$ 及 $y = 5$ 。

【分析】 函数的值域是指因变量取值的范围，它是一个数集。两个函数值域的交是两个数集的交，也即对两个函数而言，尽管自变量取各自不同的值，但相应的函数值如果相同，这个值就属于两个函数值域的交。上段中计算的是两函数所代表的曲线的交点，不符合题意。

【正确解答】 记 $A = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\}$,

$$B = \{y | y = 1 + 4x - x^2, x \in R\},$$

易知 $A = \{y | y \geq 1, y \in R\}$, $B = \{y | y \leq 5, y \in R\}$ 。

所以， $A \cap B = \{y | 1 \leq y \leq 5, y \in R\}$ 。

$$1-7 \text{ 给出 } y = f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

计算 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

【错解】 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= (x + \Delta x) \sin \frac{1}{x + \Delta x} - x \sin \frac{1}{x}.$$

【分析】这是一个分段表示的函数，特别要注意当 $x \neq 0$ 时及 $x = 0$ 时具有不同的表达式。当计算函数增量 Δy 时也要分别 $x \neq 0$ 及 $x = 0$ 的情况讨论之。

【正确解答】

$$\Delta y = \begin{cases} (x + \Delta x) \sin \frac{1}{x + \Delta x} - x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}, & x = 0. \end{cases}$$

1-8 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^4 + \frac{1}{x^4}$ ，求 $f(x)$ 的表达式。

【错解】 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4},$$

所以， $f(x) = x^4$ 。

【分析】 易验证，若 $f(x) = x^4$ ，则有

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \neq x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

上段推演的错误在于由错误的观察而引进了一个实际上不成立的关系式： $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 。

【正确解答】 为求 $f(x)$ 的表达式，令 $x + \frac{1}{x} = t$ ，此时，左式 $= f(t)$ 。今将右式恒等变形，也表示成 t 的函数。

$$\begin{aligned}\text{右式} &= x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right]^2 - 2 \\ &= (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2.\end{aligned}$$

所以, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.

1-9 给出 $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$ 求 $f(-x)$.

【错解】

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 + 1, & x \geq 0, \\ (-x)^3, & x < 0. \end{cases}$$

即
$$f(-x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$$

【分析】计算 $f(-x)$ 时应将原来的函数关系式中凡出现自变量 x 的地方统统用 $-x$ 代替. 特别对分段表示的函数, 要将表示自变量取值范围中的 x 也用 $-x$ 代替.

【正确解答】

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 + 1, & -x \geq 0, \\ (-x)^3, & -x < 0. \end{cases}$$

即
$$f(-x) = \begin{cases} -x^3, & x > 0, \\ x^2 + 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

1-10 已知 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0. \end{cases}$

求 $f(t)f(t+\tau)$ 的函数表达式, 其中 β 为常数, τ 为与 t 无关的参数.

【错解】因为

$$f(t+\tau) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\beta(t+\tau)}, & t \geq 0. \end{cases}$$

故

$$f(t)f(t+\tau) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\beta(2t+\tau)}, & t \geq 0. \end{cases}$$

【分析】上段存在两个错误。其一，函数 $f(t+\tau)$ 的表达式应为：

$$f(t+\tau) = \begin{cases} 0, & t < -\tau, \\ e^{-\rho(t+\tau)}, & t \geq -\tau. \end{cases}$$

其二， $f(t)$ 及 $f(t+\tau)$ 均是分段表示的函数，它们相乘时还需讨论参数 $\tau \geq 0$ 及 $\tau < 0$ 的两种不同情况。

【正确解答】

当 $\tau \geq 0$ 时

$$f(t)f(t+\tau) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\rho(2t+\tau)}, & t \geq 0. \end{cases}$$

当 $\tau < 0$ 时

$$f(t)f(t+\tau) = \begin{cases} 0, & t < -\tau, \\ e^{-\rho(t+\tau)}, & t \geq -\tau. \end{cases}$$

1-11 求函数 $y = e^{-x^2}$ 的反函数。

【错解】由 $y = e^{-x^2}$ 得到 $-x^2 = \ln y$,

故
$$x = \pm \sqrt{\ln \frac{1}{y}}.$$

将 $-\sqrt{\ln \frac{1}{y}}$ 舍去，得到 $y = e^{-x^2}$ 的反函数为：

$$x = \sqrt{\ln \frac{1}{y}}.$$

【分析】 $y = e^{-x^2}$

是一个偶函数，图形关于 y 轴对称。（见图1-1）它的反函数是多值函数，具有两个分支，不能随便将其中的一个分

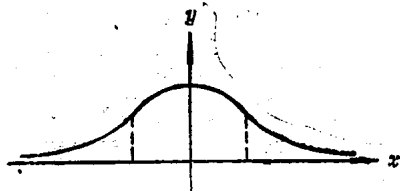


图 1-1

支舍去。

【正确解答】

对 $y = e^{-x^2}$ 而言，反函数有两个分支：

$$y = e^{-x^2} \text{ 对应于 } x \geq 0 \text{ 的部分，反函数为 } x = \sqrt{\ln \frac{1}{y}},$$

$$y = e^{-x^2} \text{ 对应于 } x < 0 \text{ 的部分，反函数为 } x = -\sqrt{\ln \frac{1}{y}}.$$

这个例子说明，对于在整个定义域内非单调的函数，我们必须分割出它的单调区间，才能考虑反函数。所以，当考虑一个函数的反函数时，为保证反函数的单值性，我们一般总对直接函数加上单值、单调的充分条件。

1-12 单调函数与单值函数有什么关系？

【错解】单值函数不一定是单调函数，但单调函数必是单值函数。

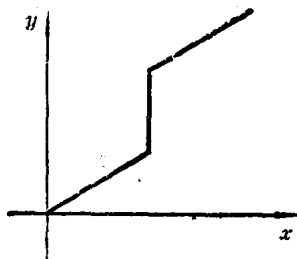


图 1-2

【分析】参看图 1-2 所示例子，它是一个单调递增函数，但显然不是单值函数，所以上段论断的下半部分不真。

【正确解答】单值函数不一定是单调函数；单调函数也不一定是单值函数。

1-13 函数 $y = |\sin x|$ 与 $y = \sin |x|$ 有区别吗？

【错解】正弦函数 $\sin x$ 是以 2π 为周期的函数，同理 $\sin |x|$ 也是以 2π 为周期的函数。

$|\sin x|$ 是以 π 为周期的函数，当然也可以把它理解为是以 2π 为周期的函数。

为比较这两个具有相同周期的周期函数，只要在 $[-\pi,$

$\pi]$ 内考虑.

在 $[0, \pi]$ 内有

$$|\sin x| = \sin x, \quad \sin |x| = \sin x,$$

故 $|\sin x| = \sin |x|$.

在 $[-\pi, 0]$ 内有

$$|\sin x| = -\sin x, \quad \sin |x| = \sin(-x) = -\sin x,$$

故 $|\sin x| = \sin |x|$.

由此在 $[-\pi, \pi]$ 内成立 $|\sin x| = \sin |x|$, 又由于周期性, 从而在整个数轴上成立 $|\sin x| = \sin |x|$.

【分析】在 $[-\pi, \pi]$ 内确有 $|\sin x| = \sin |x|$. 但 $\sin |x|$ 并不是以 2π 为周期的周期函数. 取 $x_0 = -\frac{\pi}{2}$,

$$\sin |x_0| = \sin \left| -\frac{\pi}{2} \right| = 1,$$

$$\sin |x_0 + 2\pi| = \sin \left| -\frac{\pi}{2} + 2\pi \right| = \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -1,$$

故 $\sin |x_0| \neq \sin |x_0 + 2\pi|$, 表明 $\sin |x|$ 并不是以 2π 为周期的周期函数.

【正确解答】 $y = |\sin x|$ 与 $y = \sin |x|$ 并不是相同的函数. 例如 $\left| \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right| = 1$, 但 $\sin \left| \frac{3\pi}{2} \right| = -1$. 说明这两个函数的对应关系并不完全一样. 请读者在直角坐标系中作出这两个函数的图形, 它们的异同处即可一目了然.

1-14 给出

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \pi, & x \geq 1, \\ -\sqrt{1-x}, & x < 1. \end{cases}$$

求复合函数 $g[f(x)]$ 的表达式.

【错解】

$$g[f(x)] = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & x \leq 0, \\ -\sqrt{1-\sin x}, & 0 < x < 1, \\ \pi, & x \geq 1. \end{cases}$$

【分析】函数 $y = g[f(x)]$ 是一个复合函数：

$$y = g(u) = \begin{cases} \pi, & u \geq 1, \\ -\sqrt{1-u}, & u < 1. \end{cases}$$

$$u = f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

当 $x \leq 0$ 时, $u = x^2$. 但 x^2 的函数值有可能取小于 1, 也有可能取大于等于 1, 所以 $g(u) = g(x^2)$ 不能笼统地用 $-\sqrt{1-u} = -\sqrt{1-x^2}$ 表示.

当 $x \geq 1$ 时, $u = \sin x$. 但 $\sin x$ 的函数值有可能取小于 1, 也有可能取等于 1, 故 $g(u) = g(\sin x)$ 也不能笼统地用 π 来表示.

【正确解答】由 $y = g(u)$ 的定义可知

$$g(x^2) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & x^2 < 1, \\ \pi, & x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$g(\sin x) = \begin{cases} -\sqrt{1-\sin x}, & \sin x < 1, \\ \pi, & \sin x = 1. \end{cases}$$

由此可知 $g[f(x)]$ 的函数表达式应为

$$g[f(x)] = \begin{cases} \pi, & x \leq -1 \text{ 或 } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k=0,1,2,\dots), \\ -\sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leq 0, \\ -\sqrt{1-\sin x}, & x > 0 \text{ 且 } x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ & (k=0,1,2,\dots). \end{cases}$$

1-15 给出函数 $f(n) = \frac{1+2n}{1+n^2}$ ($n=1,2,3,\dots$) 及任

任意正数 $\varepsilon > 0$, 试确定一个自然数 N , 使得当 $n > N$ 后成立不等式

$$\frac{1+2n}{1+n^2} < \varepsilon.$$

【错解】为求 N , 解不等式

$$\frac{1+2n}{1+n^2} < \varepsilon,$$

该式等价于不等式 $en^2 - 2n + (e-1) > 0$.

$$\text{解之, 得 } n > \frac{1 + \sqrt{1+e-e^2}}{e} \text{ 或 } n < \frac{1 - \sqrt{1+e-e^2}}{e}.$$

由于 $\frac{1 - \sqrt{1+e-e^2}}{e} < 0$, 不合要求, 应舍去.

取 $N = \left[\frac{1 + \sqrt{1+e-e^2}}{e} \right]^{(*)}$, N 即为所求之自然数.

~ 【分析】本题所给条件中 $\varepsilon > 0$ 是任意正数, 若取 $\varepsilon = 2$, 代入上段所求得的 N ,

$$N = \left[\frac{1 + \sqrt{-1}}{2} \right],$$

但此时 $\frac{1 + \sqrt{-1}}{2}$ 非实数, 可见上段所求得的 N 的表达式不适用于任意 $\varepsilon > 0$.

注意到本题要求是确定一个 N , 并不是要找最小的 N , 所以我们不必硬解不等式 $f(n) < \varepsilon$, 而可将 $f(n)$ 先放大, 估计出 $f(n) < g(n)$, 再来解放大后的新不等式

$$g(n) < \varepsilon.$$

【正确解答】将函数 $f(n)$ 先放大:

(*), $[]$ 表示取括弧内的数的整数部分, 例如 $[3.5] = 3$, $[0.6] = 0$.

$$\frac{1+2n}{1+n^2} < \frac{1+2n}{n^2} \leq \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

解不等式 $\frac{3}{n} < \varepsilon$, 得 $n > \frac{3}{\varepsilon}$.

由于当 $n > \frac{3}{\varepsilon}$ 时成立 $\frac{3}{n} < \varepsilon$, 从而更成立

$$\frac{1+2n}{1+n^2} < \varepsilon.$$

取 $N = \left[\frac{3}{\varepsilon} \right]$, N 即为所求之自然数.

1-16 给出函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ 及任意正数 $\varepsilon > 0$, 试确定 $x=1$ 的一个小邻域: $|x-1| < \delta$, 在其内成立不等式

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

【错解】为确定 δ , 应解函数不等式

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

由于直接解该不等式较困难, 且由题1-15的分析, 可以先放大不等式的左端.

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{2} \leq \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.$$

解新的不等式

$$\frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} < \varepsilon,$$

得到

$$|x| < \sqrt{3} \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right),$$

从而有

$$|x-1| < |x| + 1 < \sqrt{3} \varepsilon + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

取 $\delta = \sqrt{3}\varepsilon + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当 $|x-1| < \delta$ 时必成立不等式

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

【分析】

1. 首先应理解题目的意思. 当 x 充分趋近 1 时函数

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ 的值才趋近 $\frac{1}{2}$, 所以对任意正数 $\varepsilon > 0$, 只可能在 $x=1$ 的一个小邻域内成立

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

在 $x \neq 1$ 或其它点的小邻域内, 上述不等式不可能成立.

2. 当直接解不等式

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

较困难时, 可以先放大不等式的左端. 但放大有两个原则, 一是使表达式简化, 二是必须保留因子 $|x-1|$, 象上段那样放法, 丢失了因子 $|x-1|$, 最后会导致矛盾的结果, 因为当取 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 时, 不等式

$$\frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} < \varepsilon$$

将是无解的.

3. $|x| < \sqrt{3}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)$ 与 $|x-1| < \sqrt{3}\varepsilon + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 所表示的 x 的集合是不同的, 后者的集合包含了前者的集合. 所以满足 $|x-1| < \sqrt{3}\varepsilon + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 x 值不一定满足不等式