

直 观 几 何

上 册

D. 希尔伯特 著
S. 康福森
王 联 芳 译
江 泽 涵 校 订

人 民 教 育 出 版 社

直 观 几 何

王 明

人民教育出版社
北京

人民教育出版社

直 观 几 何

上 册

D. 希尔伯特 著
S. 康福森
王 联 芳 译
江 泽 涵 校 订

人 民 教 育 出 版 社



51.5
301
2:2

直 观 几 何

下 册

D. 希尔伯特 著
S. 康福森
王 联 芳 译

高 等 数 学 出 版 社

希尔伯特和康福森合著的“直观几何”(D. Hilbert u. S. Cohn-Vossen, “Anschauliche Geometrie”, 德国 Verlag von Julius Springer 1932 年出版)是一本著名的著作,书中用直观方法深入浅出地介绍了几何中丰富的知识。可供具有大学一二年級数学程度的讀者閱讀。

全书共六章:最簡單的曲綫和曲面,正則点系,构形,微分几何,运动学,拓扑学。中譯本分上下两册出版,每册包括三章。

譯文大体上是根据英譯本“Geometry and the Imagination”(P. Nemenyi 譯,美国 Chelsea Publishing Company 1952 年出版),也参考了德文原本和俄譯本“Наглядная геометрии”,第二版(C. A. Каменецкий 譯,苏联 Государственное издательство технико-теоретической литературы 1951 年出版)。

直 观 几 何

上 册

D. 希尔伯特 S. 康福森著

王联芳譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上海大众文化印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一書号 13010·721 开本 850×1168 1/32 印张 5 11/16

字数 130,000 印数 8,001—12,200 定价 (5) ¥ 0.75

1959 年 12 月第 1 版 1964 年 9 月上海第 3 次印刷

希尔伯特和康福森合著的“直观几何”(D. Hilbert u. S. Cohn-Vossen, "Anschauliche Geometrie", 德国 Verlag von Julius Springer 1932 年出版)是一本著名的著作,书中用直观方法深入浅出地介绍了几何中丰富的知识。可供具有大学一二年级数学程度的读者阅读。

全书共六章:最简单的曲线和曲面,正则点系,构形,微分几何,运动学,拓扑学。中译本分上下两册出版,每册包括三章。

译文大体上是根据英译本"Geometry and the Imagination"(P. Nemenyi 译,美国 Chelsea Publishing Company 1952 年出版),也参考了德文原本和俄译本"Наглядная геометрия",第二版(С. А. Каменецкий 译,苏联 Государственное издательство технико-теоретической литературы 1951 年出版)。

直 观 几 何

下 册

D. 希尔伯特 S. 康福森著

王联芳译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省〇五印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 5.375 字数 126,000

1984年 9月第1版 1984年7月第2次印刷

印数 6,501—24,100

书号 13010-0962 定价 0.33元

俄譯本出版者的話

D. 希尔伯特和 S. 康福森合著的“直观几何”是世界通俗文献中为数不多的出于大数学家手笔的书籍中的一本,由于叙述的循序渐进而又生动,著者就使得极其丰富的几何知識能为对数学有兴趣的广大讀者所接受、所理解。

原书著者之一 S. 康福森在 1934 年由希特勒德国迁居到苏联来,并且参加了俄譯本第一版的准备工作。1936 年 S. 康福森在重病之后死于莫斯科。

必須指出,原书还是有些較大的缺点的。一般地說,书中沒有关于数学发现的历史方面的闡述。某些地方虽也有带点历史性質的注釋,却往往只詳細地引証比較不重要的著作,可是对于直接关联到所講內容而属于我国科学家的重大的数学研究,有时連提也不提。在这次再版俄譯本时,各个地方加了脚注,希望尽可能地弥补这个缺陷。

序

在数学中，象在任何科学研究中那样，有两种倾向。一种是抽象的倾向，即从所研究的错综复杂的材料中提炼出其内在的逻辑关系，并根据这些关系把这些材料作系统的、有条理的处理。另一种是直观的倾向，即更直接地掌握所研究的对象，侧重它们之间的关系的具体意义，也可以说领会它们的生动的形象。

就几何方面说，抽象的倾向已经引导到代数几何、黎曼几何和拓扑学等宏伟的系统的理论；在这里抽象的思考方法、以及代数性质的符号运算获得广泛的运用。然而，直观在几何中起的作用却是更大，过去如此，现在还是如此。具体的直观不仅对于研究工作有巨大的价值，对于理解和欣赏几何中的研究结果也是这样。

本书的目的在于从直观形象这一侧面来介绍今日的几何。借助于直观想象，我们能够阐述几何中的各种各样的事实和問題；不但如此，在许多情况下我们还能够描述有关的研究方法和证明方法的几何轮廓，而无须详究概念的严格定义和实际计算。例如，具有一个洞（不管这个洞多么小）的球面恒能摊平的证明，或一般地不能把两个不同的环面中的一个保角地映射成另一个环面的证明，都可如此处理，使得不愿追究解析推演的细节的人，也可以领会到应如何证明和为什么能这样证明。

由于几何的方面很广而且它跟许多数学分支发生关系，因而我们甚至于能够从它获得整个数学的概观、能够认识数学问题的变化多端、以及数学思想的丰富多彩，因此从直观形象出发而且用粗线条的方式来描绘几何，应该会使专家圈子以外更广大的群众

对于数学有更合理的評價。因为,一般地說,数学并不是普通人特别喜爱的学科,虽然它的重要性可以說已經得到公認了。此中原因是由于有一种流行的誤解,認為数学不过是算术的延續和提高,用数目来变戏法。本书用图形来替代公式;这里的图形是讀者看得見的,而且讀者容易制作模型来加以补充。本书要通过这种方式来和这种流行的誤解作斗争。希望本书能使讀者易于看透数学的本質,不致于在繁难的学习面前望而却步,从而使数学更易于为人所欣賞。

本书的目标既是如此,自然不能顧到把各方面的材料搜罗完备和把所討論的材料按严格系統安排,也不能把所討論的每个課題討論得詳尽无遺。再者,书中各节对于讀者預先具有的数学訓練的要求也不能完全相同;虽然本书大部分的叙述是很初等的,但是,若要避免冗长而厌烦的叙述,有一些美丽的几何的探討是只有对于具有一定程度的訓練的人才能完全解釋清楚。

各章的附录都假定讀者已具有某些預备知識,这些附录是补充性的,而不是解釋正文的。

几何各部門的相互关系甚为密切,而且密切得往往出人意料之外。这一情况在本书中多处出現。虽然如此,由于所处理的材料多种多样,有必要使各章在一定程度上各自独立,以免为了理解后面的几章就必需完全熟悉前面的各章。我們希望,由于有了一些叙述上的重复,讀者可能自由地閱讀各別的章,有时甚至是各别的节,而不致于难以接受或不感到兴趣。我們愿意領着諸位讀者在几何的大花园里作一次幽閑的散步,让每人摘取一束自己心爱的花朵。

本书的底稿是我在古庭根于 1920—1921 年冬季每周四次的“直觀几何”的講演,經 W. 罗塞曼(Rosemann)記錄的。本书里基本上保存了原講稿的結構和內容,但是 S. 康福森(Cohn-Vossen)

改写了許多細节,并且补充了不少的材料

D. 希尔伯特

1932年6月于古庭根

上册目录

俄译本出版者的话	5
序	6
第一章 最简单的曲线和曲面	1
§ 1. 平面曲线	1
§ 2. 柱面、锥面、圆锥曲线以及它们的回转曲面	7
§ 3. 二阶曲面	12
§ 4. 椭球面与共焦二阶曲面的绳线作图	19
第一章 附录	25
1. 圆锥曲线的垂足点作图	25
2. 圆锥曲线的准线	27
3. 双曲面的能动细杆模型	30
第二章 正则点系	33
§ 5. 平面点格	33
§ 6. 在数论中的平面点格	39
§ 7. 三维和三维以上的点格	47
§ 8. 作为正则点系的结晶体	54
§ 9. 正则点系和不连续运动群	58
§ 10. 平面运动及其合成; 平面不连续运动群的分类	61
§ 11. 有无穷大基本区域的平面不连续运动群	66
§ 12. 平面运动的结晶体群, 正则点系和指针系。以合同区域组成的平面 结构	72
§ 13. 空间结晶体类及运动群。镜面对称群和点系	83
§ 14. 正多面体	91
第三章 投影构形	96
§ 15. 平面构形导言	97
§ 16. 构形(7 ₃)和构形(8 ₃)	100
§ 17. 构形(9 ₃)	104
§ 18. 透视画法, 无穷远元素和平面上的对偶原理	114
§ 19. 无穷远元素和空间的对偶原理。德沙格定理和德沙格构形(10 ₃)	122

(3)

07463

§ 20. 巴斯加定理和德沙格定理的比較	130
§ 21. 空間构形导言	134
§ 22. 雷耶构形	135
§ 23. 三維和四維空間的正多面体及其投影	144
§ 24. 几何学的枚举法	161
§ 25. 施累弗利双六构形	167

下 册 目 录

第四章 微分几何	175
§ 26. 平面曲线	176
§ 27. 空间曲线	182
§ 28. 曲面的曲率。椭圆点、双曲点、抛物点。曲率线和渐近线；脐点，极小曲面，猴鞍面	186
§ 29. 球面象与高斯曲率	196
§ 30. 可展曲面。直纹曲面	206
§ 31. 空间曲线的扭转	213
§ 32. 球面的十一个性质	217
§ 33. 保持曲面不变的弯曲	233
§ 34. 椭圆几何学	235
§ 35. 双曲几何学，及其与椭圆几何学和欧氏几何学的关系	242
§ 36. 球极平面投影与保圆变换。双曲平面的布安加雷模型	247
§ 37. 映射方法。等距、保积、短程、连续与保形映射	258
§ 38. 几何函数论。黎曼映射定理。空间保形映射	261
§ 39. 弯曲曲面的保形映射。极小曲面。普拉托问题	266
第五章 运动学	270
§ 40. 铰接机构	270
§ 41. 平面图形的连续刚体运动	274
§ 42. 一种绘制椭圆及其一般旋轮线的仪器	282
§ 43. 在空间里的连续运动	284
第六章 拓扑学	287
§ 44. 多面体	287
§ 45. 曲面	293
§ 46. 单侧曲面	300
§ 47. 作为闭曲面的投影平面	311
§ 48. 有限速通度曲面的标准形式	319
§ 49. 将曲面映成自身的拓扑映射。不动点。映射类。环面的讯复盖曲面	322
§ 50. 环面的保角映射	327
§ 51. 接壤(相邻域)问题，绳线问题和着色问题	330

第四章的附录	337
1. 四維空間中的投影平面	337
2. 四維空間中的欧氏平面	338

第一章 最简单的曲线和曲面

§1. 平面曲线

最简单的曲面是平面。最简单的曲线是平面曲线；平面曲线当中最简单的是直线。直线可以定义为两点间最短的路程，也可以定义为二平面的交线，或者旋转的轴。

直线之外最简单的曲线要算圆。即使象这样简单的图形，也能够对它作出繁多而深入的研究，以致可写成专书。我们给圆下这样的定义：它是曲线，曲线上的各点与一已知点的距离相等。我们通常用众所共知的绳线作法或圆规作法来作圆。从这种作法显然可知：圆是闭合的曲线，到处是凸的。因此通过圆周上任一点可作一条定直线（切线），使唯有这一点（切点）才是直线与圆共同的，同时直线上其余所有的点都在圆外（图1）。切点 B 上的半径 MB 必为从圆心 M 到切线 t 的最短路程，因为 t 上除 B 外的所有点都在圆外，因此这

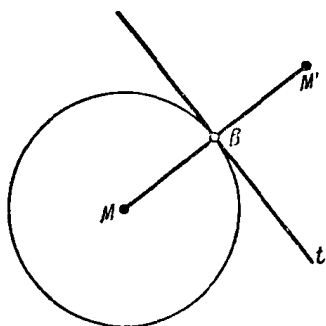


图 1

些点跟 M 的距离应较切点跟 M 的距离为远。由此可以推出，圆的半径 MB 垂直于半径上的切线。要证明这句话，我们作圆心 M 对于切线 t 的反射点，即从 M 作切线 t 的垂线，延长一倍到 M' ；这 M' 叫做 M 的象点。现在因为 MB 是从 M 到 t 的最短路程，又因为对称关系，得知 $M'B$ 是从 M' 到 t 的最短路程。因此线路

MBM' 一定是 M 和 M' 两点間的最短路綫,所以在点 B 处不会弯折,也就是說, MB 的确垂直于 t 。

从圓的作法很自然地会想起一种推广情形。我們知道在用繩索作圓时,須將閉合的繩綫套在一个固定的点(圓心)上,并且在画圓的过程中时时將繩綫拉紧。現在假如將此繩綫套在两个固定的点上,則得出与圓类似的曲綫。这种曲綫叫做橢圓,两个定点叫做橢圓的焦点。由繩綫作图法可知,橢圓是具有下列性質的曲綫:曲綫上任一点到二已知点的距离之和是一常量。如果让二点重合,則得到橢圓的极限情形,即圓。橢圓也有几个简单的性質,跟上面列举的圓的各种性質相当:它是閉合的曲綫,到处是凸的,在橢圓上任一点均可作其切綫,切綫上每一点除切点外均在橢圓之外。与圓半徑相当的,是連接橢圓上一点和二焦点的二綫段。这二綫段叫做橢圓的焦半徑。与圓的切綫必垂直过切点的半徑这件事相当的,是橢圓的切綫同过切点的二焦半徑作成等角。依图 2 上的記

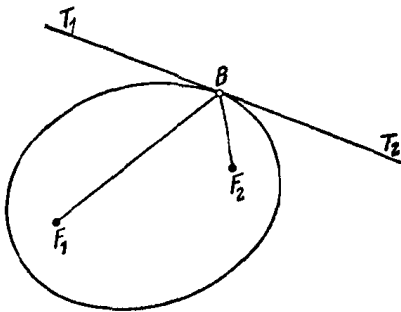


图 2

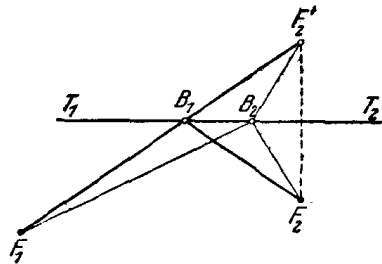


图 3

法,这句断語可写成 $\angle F_1 B T_1 = \angle F_2 B T_2$ 。証明如下:作 F_2 对于切綫的反射点 F_2' (图 3)。同切綫交于 B_1 的綫段 $F_1 F_2'$ 是 F_1 和 F_2' 两点間最短的路綫。因为,設 B_2 是切綫上任意另外一点,那么綫段 $F_1 B_2 F_2 = F_1 B_2 F_2'$ 必大于 $F_1 B_1 F_2 = F_1 B_1 F_2'$ 。另一方面, F_1 和 F_2 两点間最短的并且与切綫相交的路綫是由过切点 B 的二焦半徑

組成的。这是由于切綫上任何其他的点都在椭圆之外，从而从二焦点到这样一点的距离之和必定大于从二焦点到椭圆上 B 点的距离之和。所以 B 同 B_1 重合。因为 F_2 和 F'_2 对于直綫 T_1T_2 对称，而且 $\angle F_1B_1T_1$ 和 $\angle F'_2B_1T_2$ 成对頂角，因此我們的断語得証。

椭圆切綫的这种性質在光学上获得应用，焦点和焦半徑二名詞也是从这里来的。这是說，假如置光源于椭圆鏡面的一个焦点处，其反射綫必将聚集于另一焦点。

另外有一种曲綫，它的作法虽不如椭圆那样容易，但原理同样简单。这种曲綫上的任一点到二定点距离之差为一常数。这曲綫名为双曲綫，二定点名为双曲綫的焦点。这样，对曲綫上任一点 B 或 B' (图 4)，关系式 $F_1B - F_2B = \text{常数 } a$ 或 $F_2B' - F_1B' = a$ 应该成立。据此，双曲綫由两个分支組成。直观上显然，双曲綫到处是凸的，并且經過曲綫上任一点都可作一切綫。以后我們还要証明(參看第 9 頁上脚注 2)：切綫上除去切点外，同曲綫再沒有公共点。仿照椭圆的情形，可以証明，双曲綫的切綫平分过切点的二焦半徑的夹角(图 6)。

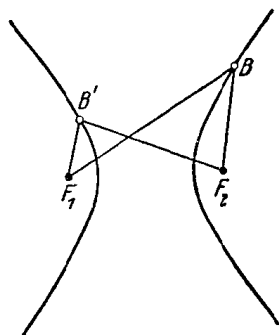


图 4

运用极限过程，可以从椭圆得出另外一种曲綫——抛物綫(图 5)。为了达到这个目的，先固定一个焦点，比如說 F_1 ，再固定同此焦点最近的頂点 S (所謂椭圆的頂点，是說椭圆与两焦点連綫的交点)。現在我們来考虑，假如第二个焦点 F_2 在 SF_1 的延長綫上移动，离 F_1 越来越远，椭圆将如何变化。我們說这些椭圆趋近于一极限曲綫，这极限曲綫就是抛物綫。从这个极限过程我們可导出抛物綫的一个简单定义。闡述如下：

假如椭圆的焦距 F_1F_2 充分地大，而在繩綫作图中鉛笔始終貼