数据加载失败，请稍后重试！

科學圖書大庫

大學微積分自習手冊

（此書爲美國數學學會專爲高三及大一程度之學者編著作爲自修自用）

（下　册）

主編者：美國數學協會
教育傳播委員會
譯　者：楊睢林　馮家金
楊志伊　嚴夢輝

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十八日初版

大學微積分自習手冊(下)

基本定價　3.90

譯者　楊志伊　國立貴州大學工學士
　　　嚴夢輝　電子學校專科部教官

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

原序

這八章程序教材，是爲大學一年級編訂一套完整而標準的微積分教材而設計，對每學期選修五門課程的學生，最後一章的材料，有時可以留待二年級實施．本書以用做微積分的基本教材最佳，也可作爲一般教材的輔助讀物．

程序教材的使用，是當要點提出之後，必須立刻得到反應，緊接着便是一個用來做比較的正確答案．程序教學的重點，在於要求學生的活動，並全盤控制這項活動的過程．在學生心無旁騖或課堂討論時間不夠充裕的情況，這套循序漸進的方法似乎特別有益．

教育傳播委員會（CEM）的「程序教學計劃」，在國家科學基金會經費支援下編訂了這套教材．本會在美國數學協會之下奉命成立以後，藉種種不同的媒介，例如電影，電視，程序教學法，或聯合各媒介組成的教學體系等等，在教材表現的技術和方法方面，近來都有長足的進步；而本會特別重視如何最有效地運用這些方法，來改進大學程度的數學教學．

本會把一年級微積分課程的題材列爲最優先，因爲在微積分方面，似乎缺乏適宜的程序教材，作爲傳播材料有效運用的研究；於是本會編輯小組在史丹福大學歷經三個暑期（1964 至 1966 年），編訂了這一套書籍．

1964 年和 1965 年的初稿，稱爲「微積分程序專題」，以少量的管制版本印行，然後在下一教育年度中試教，以便獲得課堂的評價實效，作爲修訂之用．所以現在這一套程序教材，就是初版材料的修正本．

本人是教育傳播委員會「程序教學計劃」的主持人，曾蒙許多人士

的關切，支援和合作，由於人數過多，無法一一登錄，只好把直接參與本計劃的團體名稱列舉出來。我要感謝的，有美國數學協會的各位理事；本委員會的委員，職員和計劃指導人員；國家科學基金會的各位代表；史丹福大學很多教授和職員先生；試教教學計劃顧問委員會的各位委員先生。

三個執筆團體間的互助，熱誠，和意業的精神，尤其令人感佩。還有志願參加支援執筆先生的助編人員，本人必須謹致個人的謝意，因限於篇幅，不能刊載芳名，深表抱歉。

教育傳播委員會
程序教學計劃
主　持　人
傑　　　爾

大學微積分
自習手册

上册

下册

下　　冊

目　　錄

(三) 超越函數

第五章　超越函數

(四) 積分的應用與積分術

第六章　定積分的應用

第五章

超越函數

致讀者：

爲了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的說明」

5.1 前言

這一章書講的是對數，指數，三角，與反三角函數，一般通稱之爲超越函數，這些函數對讀者而言並非完全陌生，因爲其中的一部份甚至全部讀者已經學過了。

討論超越函數，有很多方法可以遵循，首先將自然對數函數，視同整數予以定義，其次將指數函數定義爲自然對數函數之反函數，則普通指數函數如$f(x)=b^x$，$b>0$以及以b爲底$0<b\neq1$的對數函數都在討論範圍之內，最後講到三角與反三角函數。

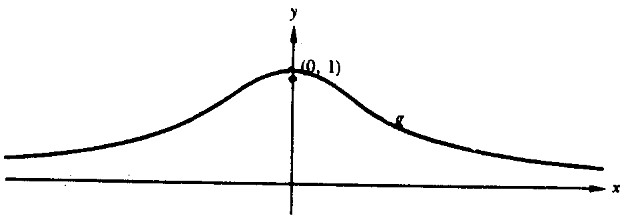
超越函數之導數公式一經求得，本書中將以之討論這些函數在代數及幾何上的某些性質。

5.2 自然對數函數的定義

1　在5·2與5·3中完全討論自然對數函數之發展，前面章節裏，我們曾經學過以整數為基礎的普通函數問題，自然對數的定義，只是運算技巧中特殊應用而已．

2　自進度2到17，用舉例方法來講，從這些例題的內容可以看出自然對數函數的某些性質，首先講一個與對數函數無關的函數

令 $g(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$，則 g 是一連續函數，它的定義域是__________，g 之圖形如下圖．



$(-\infty, \infty)$

3　函數G是由下面公式而定義的，對所有的 x 而言．

$G(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$，則$G(0)$之數值是__________．

0　（因為任何函數在 $x=a$ 時，均有$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$ 之結果

，參閱*4·5·20*

4 在微積分中有個很重要的定理，（定理*4·6·16*）設 f 在 $[a, b]$ 是一連續函數，由

$$G(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

所定義的函數 G，其中 $x \in [a, b]$，則．
$G'(x) =$ ________________________.

$G'(x) = f(x)$，所有的 $x \in [a, b]$

5 當 $G(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$，則 $G'(x) =$ ________________

$$\frac{1}{1+x^2}$$

6 對每一實數 x 而言，導數 $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ．
則 G' 的定義域是________.

$(-\infty, \infty)$

7 由上進度可知 $G(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$，在它的定義域內的每一點都有一個導數，由此可知對每一實數而言，G 是連續的．寫出（用你自己的意思）這一段話是那一個定理的特例，寫出該定理的名稱與含義．
若函數 f 在 a 有一導數，則 f 在 a 是連續的，（見定理2·6·2）

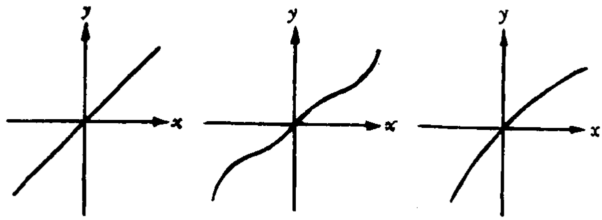
8 對所有實數 x 而言，若 $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$，則就實數集合而言

有$G'(x)>0$，通常G是$\underset{(\text{一增，一減})}{\underline{\qquad\qquad}}$函數．

一增

9 今知G是連續增函數，而$G(0)=0$，多數的函數都有這種性質，所以我們可以把G的圖形畫出來，試繪三個函數的圖形，每一個圖形都是連續增函數，並令在y軸上之截距為0．

此三圖形如下：



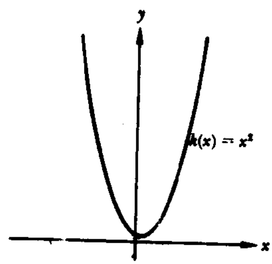
10 我們暫離本題，試看函數第二次導數的符號，與其圖形彎曲性的關係．

令$k(x)=x^2$

則$\underline{k'(x)=\qquad\qquad}$，及

$\underline{k''(x)=\qquad\qquad}$．

試寫出$k''(x)$的符號與k的彎曲性二者之關係．



$k'(x)=2x$　　　$k''(x)=2$

$k''(x)$的符號永為正號，　k是永遠向上彎曲．

11 若一函數的第二次導數為$\underset{(\text{正，負})}{\underline{\qquad\qquad}}$號，則此函數在某區間的

圖形向下彎曲，若第二次導號為 $\underset{(正，負)}{\underline{\qquad\qquad}}$ 號，則此函數在某區間的圖形是向上彎曲．

負，正

12 再講函數 G，如果 G 的圖形是向上或者向下，那麼它的第二次導數如何求法？

$$G'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad G''(x)=\underline{\qquad\qquad}.$$

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}(G'(x)=(1+x^2)^{-1};\ G''(x)=-1(1+x^2)^{-2}(2x))$$

13 自進度 12 得知 $G''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，對所有實數 x 而言，分母 $(1+x^2)^2$ 是 $\underset{(正，負)}{\underline{\qquad\qquad}}$，所以當 x 為 $\underset{(正，負)}{\underline{\qquad\qquad}}$，

$G''(x)>0$，當 x 為 $\underset{(正，負)}{\underline{\qquad\qquad}}$，$G''(x)<0$

正　負　正

14 自進度 11 與 13，可知在 $x<0$ 時，G 的圖形是______彎，$x>0$ 時，G 的圖形是______彎．

向上，　向下

15 儘你所知，用表列方式寫出函數 G 的性質．

至目前爲止，已知函數 G 有下列諸性質：

(1)　$G(0)=0$.

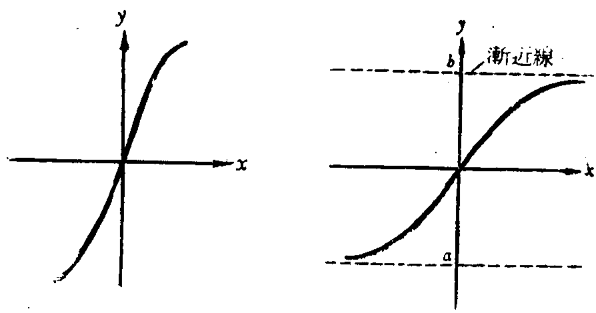
(2)　G 是一個增函數 .

(3)　G 在任何點都有導數 .

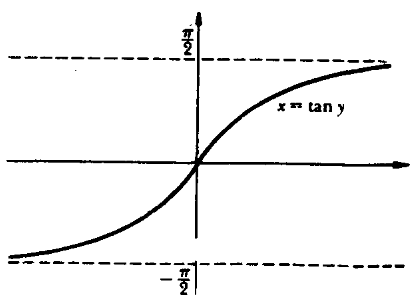
(4)　G 在任何點都是連續的 .

(5)　當 $x<0$ 時，G 向上彎曲，$x>0$ 時向下彎曲 .

16　以進度 15 爲已知條件，繪出兩個函數的圖，並令一函數之值域爲 $(-\infty,\infty)$，另一函數之值域爲 (a,b) .



17　你不須要知道右邊的 G 圖爲什麼是正確的，函數 G 以及它的圖形，將在這章書的後面討論它，（進度 5·9·32）.



18 在進度2－17中，曾經講到函數G的定義是由連續函數$g(t)=\frac{1}{1+t^2}$的積分而來的連續函數，由$g(t)=\frac{1}{1+t^2}$定義，G之性質因之得以顯示，在進度19，將討論一個新的函數f，此處$f(t)=\frac{1}{t}$，它的定義與它的分析頗似函數G，自進度34，讀者對函數的圖形，必須具有粗淺的觀念，這個函數就是自然對數函數，其定義爲$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$，自然對數函數，必須遵守常用對數的一些性質，這就是在本書後面爲什麽要多講自然對數作圖的原因．

19 設有連續函數$f(t)=\frac{1}{t}$，它的定義域限制在開區間$(0,\infty)$

***5.2.19*定義** 我們定義自然對數函數l如下：l的定義域是集合$(0,\infty)$，對每一個$x>0$之數，$l(x)$由下式表之：

$$l(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

20 $l(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$，$l(1)=$______________.

$l(1)=0$

21 $l(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.　$l'(x)=$______.

$l'(x)=\frac{1}{x}$（如有不解閱進度5·2·4或定理4·6·16）

22 若l的定義域是$(0,\infty)$，它的導函數l'的定義域必定是l定義域的部份集合，l'的定義域是________.