大学入学考试
数学试题选

[日本] 聖文社 编
刘远图 魏群 译

人民教育出版社

大学入学考试

数学试题选

[日本] 圣文社 编

刘远图 魏 群 译

人民教育出版社

1979·北京

大学入学考试
数学试题选
[日本]圣文社编
刘远图 魏 群 译
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 83,000
1979年6月第1版 1979年12月第1次印刷
印数 000,001—730,000 册
书号 13012·0369 定价 0.29 元

出版说明

本书是根据日本圣文社编的《一九七八年度全国大学数学入试问题详解》选译的．原书共汇集了一百一十一所大学的数学试题．

日本的学制是：小学六年，中学三年，高等学校三年，大学四年．原书汇集的入学试题，是学生读完十二年中小学以后，报考大学时的入学试题．

日本高等学校的数学教材共分四册：《数学Ⅰ》，《数学ⅡA》，《数学ⅡB》，《数学Ⅲ》．有四种使用方法：①只学《数学Ⅰ》，②学完《数学Ⅰ》后学《数学ⅡA》，③学完《数学Ⅰ》后学《数学ⅡB》，④学完《数学Ⅰ》和《数学ⅡB》后学《数学Ⅲ》．

本书选译了十一所大学的入学试题．校名下面的"时间"系指考试时间．试题后面的解答，是由圣文社编写的．翻译时，对个别试题的解答作了一些更动或者增加了另外的解法．

书末附有"日本高等学校数学课本目录"．

本书对于研究日本中学、高等学校数学改革、对中学生数学质量的要求以及命题原则等，有一定参考价值．可供中学教师、师范院校数学系师生以及中学数学教学研究人员参考．

人民教育出版社

一九七九年四月

目　　录

东 京 大 学

第一次考试

理 科 系

〔时间：数学、英语、日语、社会、理科共 200 分钟〕

1. 适合下面空格里的数是什么？

按照

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

把点 (x, y) 映到点 (x', y') 的一次变换，把直线 $y = lx$ 上的各点映到这点本身，而把直线 $y = mx$ 上的各点映到这点关于原点的对称点.

这时，$l =$ [a] $\boxed{}$，$m =$ [b] $\boxed{}$，$p =$ [c] $\boxed{}$，$q =$ [d] $\boxed{}$.

2. 适合下面空格里的数是什么？

设 a、b 是常数，且 $a \neq 0$. 现在再设函数 $f(x) = \dfrac{x}{ax+b}$ 满足下列条件 (i)、(ii).

(i) $f(2) = 1$;

(ii) 使 $f(x) = x$ 的 x 只有唯一的一个值.

这时，$a =$ [e] $\boxed{}$，$b =$ [f] $\boxed{}$. 另外，当 $x_1 > 0$

时，根据

$$x_n=f(x_{n-1})\quad(n>1)$$

确定数列$\{x_n\}$时，

$$\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{^{g}\boxed{\qquad}}{x_n}\qquad(n>1)$$

成立．特别是设 $x_1=1$ 时，$x_{10}={}^{h}\boxed{\qquad}$．

3．适合下面空格里的数是什么？

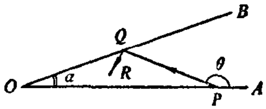
设 a 是正实数．设通过空间中的四点 $O=(0,0,0)$，$A=(6,0,0)$，$B=(3,5,0)$，$C=(3,2,a)$的球面的中心是 P．

这时，若 $a=3$，则$P=({}^{i}\boxed{\qquad},\ {}^{j}\boxed{\qquad},\ {}^{k}\boxed{\qquad})$．

另外，为了使P被包含在四面体 $OABC$ 内或者它的四个面的某一个面里，当 a 变化时，a 取的最小值是$\sqrt{^{l}\boxed{\qquad}}$．

4．适合下面空格里的数是什么？

两条射线 OA、OB 相交成 $\alpha°$ 角．现在假定 OA、OB 是两面墙壁，从 OA 上一点 P(如图)以 $\theta°$ 角$(0°<\theta<180°)$发射小球．假设小球的大小不计，小球在壁以外的地方都是直线前进．又设小球在壁上反射时，象图上那样，



成 $\angle PQB=\angle OQR$ 那样反射．而且对于某个 $\theta°$ 角来说，小球在壁上作几次反射（至少 1 次），最后就顺着平行于 OB的方向前进．这时：

(1) 如果 $\alpha°=15°$，这样的发射角 $\theta°$ 就有${}^{m}\boxed{\qquad}$种，其中最大的是${}^{n}\boxed{\qquad}$．

(2) 如果 $\alpha°=50°$，这样的发射角 $\theta°$ 就只有一种，是${}^{\bullet}\boxed{\qquad}°$．又设这时线段 OP 的长是 1．小球从 P 到跟壁

最后的撞击点所前进的距离是 $2\cos^{p}\boxed{}^{\circ}$. 但是设写在 $p\boxed{}$ 内的数 x 满足 $0^{\circ}<x<180^{\circ}$.

解　　答

答

a	b	c	d	e	f	g	h
1	3	3	-2	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{2}{11}$
i	j	k	l	m	n	o	p
3	$\frac{8}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{57}{5}$	5	165	150	50

【解答】

1. 由于一次变换，点 (x, lx) 映到点 (x, lx)，所以有

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ lx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ lx \end{pmatrix}$$

$$\therefore \qquad 2x-lx=x, \quad px+qlx=lx$$

由于 x 是任意数，所以

$$2-l=1, \quad p+ql=l \qquad (1)$$

又由于 (x, mx) 映到点 $(-x, -mx)$，所以

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -mx \end{pmatrix}$$

$$\therefore \qquad 2-m=-1, \quad p+qm=-m \qquad (2)$$

由(1)、(2)得 $l=1, m=3, p+q=1, p+3q=-3$

$$\therefore \qquad p=3, \quad q=-2$$

关键：对于任意实数 x，点 (x, lx) 映到 (x, lx).

2. 由 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$, 根据条件(i), 得

$$f(x)=\frac{2}{2a+b}=1$$

$$\therefore \qquad 2a+b=2$$

根据条件(ii),得

$$\frac{x}{ax+b}=x$$

$$\therefore \qquad x(ax+b-1)=0$$

要使 x 只有唯一的一个值, 必须有 $b=1$.

这时, $\qquad a=\dfrac{1}{2}, \quad f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$.

另外, 由于 $x_n=f(x_{n-1})=\dfrac{2x_{n-1}}{x_{n-1}+2}$, 得

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_{n-1}}$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_n}$$

两边分别相减, 得

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{2}{x_n}$$

当 $x_1=1$ 时, $x_2=\dfrac{2}{3}$, 数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{x_1}=1$, 公差为 $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ 的等差数列, 因此

$$\frac{1}{x_{10}}=1+9\times\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\therefore \qquad x_{10}=\frac{2}{11}$$

关键：取 $x_n=f(x_{n-1})$ 的倒数.

3. 设通过四点 $O(0,0,0)$，$A(6,0,0)$，$B(3,5,0)$，$C(3,2,3)$ 的球面的中心是 $P(x,y,z)$，有

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=(x-6)^2+y^2+z^2\\ &=(x-3)^2+(y-5)^2+z^2\\ &=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \end{aligned}$$

整理后得

$$x=3,\quad 3x+5y=17,\quad y-z=2$$

$$\therefore \quad x=3, \qquad y=\frac{8}{5}, \quad z=-\frac{2}{5}$$

另外，由于已知 $a>0$，当 P 在四面体 $OABC$ 内或者在它的面上时，要使 a 值最小，P 应当在 OAB 面上. 这时，$P\left(3,\frac{8}{5},0\right)$，由于 $OP=CP$，所以有

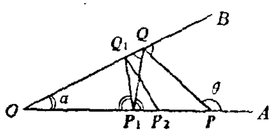
$$3^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\left(-\frac{2}{5}\right)^2+a^2$$

$$a^2=\frac{57}{5}$$

因此，a 的最小值是 $\sqrt{\frac{57}{5}}$.

关键：研究 a 取最小值时 P 的位置.

4. 如图，设小球在 OA 和 OB 上的撞击点依次是 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, Q, Q_1, Q_2, \cdots\cdots$ 于是，



$$\angle P_1QB=\angle PQO=\theta-\alpha$$

$$\angle AP_1Q_1=\angle OP_1Q=\theta-2\alpha$$

同样可以得出:

$$\angle AP_2Q_2=\theta-4\alpha,\ \angle AP_nQ_n=\theta-2n\alpha$$

因此小球顺着平行于 OB 的方向运动时，有

$$\theta-2n\alpha=\alpha,\quad \therefore\quad \theta=(2n+1)\alpha$$

(1) 当 $\alpha=15°$ 时，

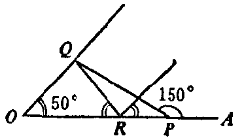
$$\theta=15°(2n+1)\quad (n\geqslant 1)$$

由于 $0°<\theta<180°$, $n=1, 2, 3, 4, 5$, 共五种．其中最大的是

$$\theta=165°$$

(2) 当 $\alpha=50°$ 时，$\theta=50°(2n+1)\quad (n\geqslant 1)$

由于 $0°<\theta<180°$，仅当 $n=1$ 时，$\theta=150°$．这时，在 $\triangle OPQ$ 中应用正弦定理，有



$$\frac{OP}{\sin 100°}=\frac{OQ}{\sin 30°}=\frac{PQ}{\sin 50°}$$

另外，

$$\angle QRO=\angle QOR=50°$$

$$\therefore\quad QR=OQ$$

因此，当 $OP=1$ 时，

$$PQ=\frac{\sin 50°}{\sin 100°},\quad QR=OQ=\frac{\sin 30°}{\sin 100°}$$

$$\therefore\quad PQ+QR=\frac{\sin 50°+\sin 30°}{\sin 100°}$$

$$=\frac{2\sin 40°\cos 10°}{\cos 10°}$$

$$=2\sin 40°=2\cos 50°$$

关键: $\angle AP_nQ_n=\theta-2n\alpha\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

文　科　系

〔时间：数学、英语、国语、社会、理科共 200 分钟〕

1. 适合下面空格里的数是什么？

设 $x>0$. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 和 $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 满足条件：

$AJ=JA$ 以及 $A^2=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. 这时，

$x=$ [a] $\boxed{}$，$y=$ [b] $\boxed{}$，$z=$ [c] $\boxed{}$，$w=$ [d] $\boxed{}$.

2. 有 5 个男人和 2 个女人. 这时，适合下面空格里的数是什么？

(1) 7 个人排列在一个圆周上，使两个女人不相邻的排列方法有 [e] $\boxed{}$ 种.

(2) 7 个人排成一列，两端是男的，这样的排列方法有 [f] $\boxed{}$ 种.

(3) 在(2)的排列方法中，女人的两边都是男人的排列方法有 [g] $\boxed{}$ 种.

(4) 在(3)的排列方法中，使特定的一对男女相邻的排列方法有 [h] $\boxed{}$ 种.

3. 适合下面空格里的数是什么？

设 a、b 是整数. 研究

直线 $$y=ax+b \quad ①$$

和三条抛物线
$$\begin{cases} y=x^2+3 & ② \\ y=x^2+6x+7 & ③ \\ y=x^2+4x+5 & ④ \end{cases}$$

如果直线①和抛物线②、③、④的交点的个数分别是2、1、0，那么 $a=$ i [ ]， $b=$ j [ ]. 而且这时①和③的交点的坐标是(k [ ]， l [ ]).

4. 适合下面空格里的数是什么？

某城镇的环形马路上顺次有第一小学至第五小学等五所小学. 各小学分别有显微镜 15、7、11、3、14 台. 现在为了使各小学的台数相等，各向相邻的小学移交了几台. 这时，要尽可能使移交的显微镜的总台数最小. 于是，

从第一小学向第二小学移交了 m [ ] 台，

从第二小学向第三小学移交了 n [ ] 台，

从第五小学向第一小学移交了 o [ ] 台.

另外，移动的显微境的总台数是 p [ ] 台.

同时假定，从甲向乙移交了 -3 台，意思是说从乙向甲移交了 3 台.

解　答

答

a	b	c	d	e	f	g	h
3	1	−1	3	480	2400	1440	576
i	j	k	l	m	n	o	p
2	3	−2	−1	3	0	−2	12

【解答】

1. 由 $AJ=JA$，得

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -y & x \\ -w & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & w \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $$z=-y, \qquad w=x$$

于是

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $$x^2-y^2=8, \qquad xy=3$$

消去 y，得

$$x^4-9=8x^2, \quad (x^2-9)(x^2+1)=0$$

由于 $x>0$，所以有

$$x=3, \quad y=1, \quad z=-1, \quad w=3.$$

关键：由 $AJ=JA$ 得出用 x、y 表示 z 和 w.

2. (1) 由于两个女人相邻的排列方法有 $2\times5!$ 种，所求的排列方法有

$$6!-2\times5!=4\times5!=480(\text{种})$$

(2) $$A_5^2\times5!=20\times120=2400(\text{种})$$

(3) 由于女人的两边都是男人的排列方法当中，女的和女的之间的男人有 3 人、2 人、1 人这三种情况，所以所求的排列方法有

$$6\times5!\times2!=6\times120\times2=1440(\text{种})$$

(i) 男女男男男女男　　　(iii) 男女男女男男男

(ii) 男女男男女男男　　　　　男男女男女男男

　　男男女男男女男　　　　　男男男女男女男

(4) 对于上面 6 种情况来说，每一种情况又有 $4\times4!$ 种排列方法，所以有

$$6\times4\times4!=24\times24=576(\text{种})$$

关键：女人的两边都是男人的排列有六种情况.

3. $y=ax+b$ ①

$y=x^2+3$ ②

$y=x^2+6x+7$ ③

$y=x^2+4x+5$ ④

由①和②，得　$x^2-ax+3-b=0$

由①和③，得　$x^2-(a-6)x+7-b=0$ ⑤

由①和④，得　$x^2-(a-4)x+5-b=0$

因此，由①和②、③、④的交点的个数分别是 2、1、0 这个条件，得

$$a^2-4(3-b)>0,\quad (a-6)^2-4(7-b)=0$$

$$(a-4)^2-4(5-b)<0$$

由第 2 个式子，得

$$4b=-(a^2-12a+8)$$

代入第 1、3 式，得

$$a^2-12-(a^2-12a+8)>0$$

$$a^2-8a-4-(a^2-12a+8)<0$$

$$\therefore \qquad \frac{5}{3}<a<3$$

因为 a 是整数，所以有

$$a=2$$

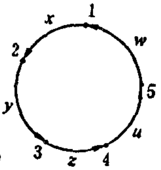
于是，　　　$4b=12$，$\therefore$　$b=3$

由⑤得　　　$x^2+4x+4=(x+2)^2=0$

因此，①和③的交点的坐标是$(-2, -1)$.

关键：交点的个数和二次方程的判别式的关系.

4. 设从第一小学向第二小学、第二小学向第三小学、……、第五小学向第一小学移交的显微镜台数，分别是 x、y、z、u、w. 由于总台数是



$$15+7+11+3+14=50$$

移交以后，各校的台数是

$$7+x-y=11+y-z=3+z-u=14+u-w$$
$$=15+w-x=10$$

$$\therefore \quad x-y=3, \qquad z-y=1, \qquad z-u=7,$$
$$w-u=4, \qquad x-w=5$$

即　　$y=x-3$，$z=x-2$，$u=x-9$，$w=x-5$

因此，移交的总台数是

$$|x|+|y|+|z|+|u|+|w|$$
$$=|x|+|x-2|+|x-3|+|x-5|+|x-9|$$

当 $x\leqslant3$ 时，它的值减小，当 $x\geqslant3$ 时，它的值增大. 因此，当 $x=3$ 时，移交的总台数最小. 这时，

$$y=0, \ z=1, \ u=-6, \ w=-2.$$

最小值是

$3+0+1+6+2=12$(台)

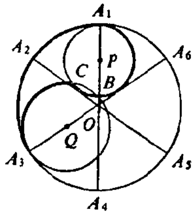
关键：将移交的总台数表示成只含 x 的式子.

第二次考试

理科系：1～6 题，150 分钟

文科系：1，2，7，8 题，100 分钟

1. 如图，圆 O 的半径为1，将它的圆周 6 等分，各分点依次为 A_1、A_2、……、A_6. 设与弧 $A_2A_1A_6$ 以及半径 OA_2、OA_6 相切的圆的圆心为 P，这个圆 P 的圆周和线段 OP 的交点为 B. 在线段 OA_3 上确定一点 Q，使它满足 $OQ=PA_1$. 以 Q 为圆心，QA_3 为半径的圆周与 P 圆的交点当中，相对于直径 A_1B 来说，同 A_2 位于同侧的一点记作 C.



证明四边形 $OPCQ$ 是平行四边形. 再求出弧 $A_1A_2A_3$、弧 A_3C、弧 CBA_1 所围成的部分(图中粗线围成的部分)的面积.

2. 设函数 $f(x)=(x^2-4)(x^2-9)$ 在 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 范围内的最大值是 $g(t)$. 当 t 在 $-3\leqslant t\leqslant 3$ 范围内变动时，求函数 $s=g(t)$，并画出它的图象.

3. 用 C 表示抛物线 $y=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$. 通过 C 上的一点 $Q\left(t,\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{3}\right)$、并且与 C 在 Q 点的切线垂直的直线，叫做 C 在 Q 点的法线.