林师范大学教材

复变函数论教程

朱 静航 編

吉林师范大学

复变函数论教程

静航 编

大学印刷厂印刷

校内发行·L 79001

印数：2,500册

九七九年二月

目　　录

前　　言

科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。复变函数论所研究的对象主要是解析函数。解析函数是复变函数中的一类具有解析性质的函数。因之，复变函数论亦称解析函数论。

复变函数论是从十八世纪末期到十九世纪前半期随着生产和自然科学的发展而产生和发展起来的，并逐步发展成为数学领域中的一个重要组成部分。它在生产和其他自然科学领域里，如在微分方程、计算数学、概率论、流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学、热学里都有许多应用，已成为解决有关实际问题的有力工具。本教程将简略地介绍复变函数的理论和应用。

复变函数论的内容是很丰富的。特别是，在本世纪里，随着生产和自然科学的发展，许多崭新的概念、理论和方法的出现、使复变函数论的内容更加丰富、应用也更为广泛。在我国，复变函数论的发展也是很迅速的，有些领域还是领先的。随着我国四个现代化的实现，国民经济及工农业生产和科学技术的不断发展，以及实践经验的不断总结。复变函数理论和方法必将有更新的发展。

本教程根据任务和时间的要求，作为基础课的教材，需要从大量丰富的内容中，选取和介绍那些比较基础的理论部分。例如，初等函数、微分、积分、级数、留数、映射等基本内容。这些内容对于提高数学工作者（包括数学教师）的数学水平和实际工作能力，无疑是完全必需的；对他们也是最起码的学习要求。

在内容选取上，书中力求贯彻“少而精”原则，确保基本理论和基

本方法的详细讲述。在内容安排和概念引入方面，力求结合学生实际，从已有知识出发，循序渐进。为了培养学生的实践观点和初步运用

所学知识解决某些实际问题能力，我们力求贯彻理论联系实际的原则。并采取分散与集中相结合的处理方法：即对正文中的重要概念和理论，着重阐述其基本意义和某些应用，在附录中则集中介绍其应用方面的问题，供读者参考。

我们希望读者通过对本教程的学习，掌握这些内容的基本理论、基本方法和它们的一些实际应用，为进一步学习其他课程以及将来从事实际工作打下初步基础。

本教程的内容是按64—68学时安排的，其中课堂讲授48—51学时，课堂练习16—17学时。教师可以根据同学的实际情况，在教学过程中，对内容作必要的增删或改动次序。读者在学习中也应进行独立钻研和思考。努力培养自学能力和提高独立工作能力。

现将各章时间分配和各章应突出的主要问题列述于下，供教与学的参考。

第一章讲授 8 — 9 学时，主要内容是解析函数概念、判定解析函数的条件和解析函数的实际意义。我们围绕这一主题引入复变数运算和平面点集的某些概念(区域和曲线)。在数学分析相应概念（极限、连续、可导等）的基础上，引进解析函数概念。复变数理论不求完整，但要求加强复数运算的训练。这一章应是少讲多练。如果读者对数学分析已有较好的基础，本章进度还可稍快。章末稍微把解析函数的实际应用介绍了一些，目的在于使读者尽早了解解析函数的实际意义。

第二章讲授 4 — 5 学时，应着重弄清指数函数和对数函数的性质。对于对数函数，我们用限制辐角范围的办法，把它作为单值函数进行讨论。至于初等多值函数的讨论，则纳入附录Ⅰ。初等函数的映射性质则并入共形映射里讨论。本章要求读者掌握初等函数的性质，便于以后的学习。

第三章讲授 7 学时。重点是柯西定理和柯西积分公式。这是复变函数论的理论和方法的基础,应该加以深入体会和掌握。柯西定理是在加强条件的情形下。用数学分析中的格林公式证明的,推广定理也只述而不证。

第四章讲授11学时。主要讲解析函数如何用级数来表示。这是讨论解析函数局部性质的基本工具，其中只讲函数项级数，未讲函数序列，

也没引进柯西—阿达马公式。对函数在本性奇点和∞点邻域的性质，也只举例说明，未作更多讨论。要求读者通过例题和习题加强对函数展成级数的训练。

第五章讲授5—6学时。主要是留数基本定理。通过围道积分来说明留数理论在实变函数定积分计算上的实际应用，其他方面的应用没有涉及。

第六章讲授11学时。第五章是分析理论的应用，本章是几何理论的应用。重点是如何运用初等函数映射和线性映射解决简单区域的共形映射问题。对共形映射的一般原理，我们只介绍了保域性定理、存在唯一性定理，和边界对应定理。但都述而不证。在这一章不要求理论的严格证明，而是要求如何运用几何方法解决实际问题。本章之末的几个例题，最好能结合附录Ⅰ一起来讲授，借以阐明复变函数论的实际应用，增强理论联系实际的观念。

本教程各章所列的例题和习题，旨在阐明理论和说明方法，但为数不多，也比较简单，远不能包括全部主要内容或适合学生的实际。为了培养学生的论证和运算能力及熟练技巧，还应该结合实际另选一些习题来补充或代替。书中选入了一些难度稍大的带* 号的习题，以供教师和学生选用。

本教程末有两个附录。其中附录Ⅰ说明复变函数论在力学和物理学上的实际背景和应用，可以讲2学时。教师可以在教学中选讲这些内容，也可以根据各自学校的实际情况代以能结合我国当前建设实际的其他内容。如时间允许，这方面的教学还应加强。

附录Ⅱ以及各章带＊号的内容，如最大模原理、唯一性定理、辐角原理、零点个数比较定理、对称原理等，都未计时间，教师和同学可根据需要与可能予以取舍。

尽管本教程是以过去的教材为基础的，在编审过程中，兄弟院校给予帮助，吸收了兄弟院校的经验重新修改而成的。但由于我们受水平所限，再加上我们对教学改革的精神领会不深，缺点和谬误之处，仍所难免，希望教师和同学及时提出批评和指正。

第一章　解析函数

我们对于函数的研究，是一步一步地由低级向高级发展的。数学分析主要研究实数域上的连续函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数。复变函数的某些基本概念和理论是在实变函数的基础上发展和推广的，有的几乎是逐字逐句的推广或极为类似。它在发展和推广的过程中，虽然还保留了实变函数的某些性质、相应的理论和方法，但又不断地产生了许多新的性质、新的理论和新的方法。这些都是来自生产实践，为实践所检验，而成为复变函数论的系统理论和方法并在数学、物理和某些生产技术上有许多应用，成为解决有关问题的有力工具。例如，物理上的某些平面稳定场的复势就是解析函数，因之，研究了解析函数，实际上是研究了某些平面场的复势。

这一章主要是从读者已有的数学分析知识出发，引入解析函数概念，并给出判定解析函数的条件。最后还简单地介绍了解析函数与稳定平面流场的复势的关系。希望读者深入理解解析函数概念，并了解它的实际意义。

在引入解析函数概念之前，先介绍一些预备知识。我们从复数谈起。

§1.1　复数及其几何表示

1. 复数及其运算。在代数学里，我们对复数概念和复数运算是熟悉的。这里只是回忆和叙述一些关于复数的概念、运算和它的几何表示。为了有利于今后的讨论，还作了一些补充。

我们称形如

$$x+iy$$

的数为复数。其中 x 与 y 都是实数，分别称为 $x+iy$ 的实部与虚部。称 i 为虚数单位，并规定 $i^2=-1$， $i=\sqrt{-1}$。称 iy 为纯虚数。若用 z 表示 $x+iy$ 则 x 与 y 可分别用符号表示为：

$$x=Re(z),\quad y=Im(z)$$

我们把复数 $x+oi$ 看成与实数 x 全同，特别地，把 $o+io$ 看成与 0 相同。

关于两复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的相等和四则运算，可以分别用下列等式来定义：

当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，$z_1=z_2$；

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$$

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2);$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}。z_2\neq o。$$

设 $z=x+iy$，称复数 $x-iy$ 为复数 z 的共轭复数，并表示为 $\bar{z}$，即 $\overline{x+iy}=x-iy$。称数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模，并表示为 $|z|$。很明显，下列关系式成立，

$$|z|\geqslant|x|;\quad |z|\geqslant|y|;\quad |z|=|\bar{z}|,z\bar{z}=|z|^2;$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2;\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2;\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},z_2\neq o。$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}。$$

2. 复数在平面上的表示。首先在平面上建立直角坐标系。对于任意一个复数 $z=x+iy$，令其与平面上的一点 $P(x,y)$ 相对应；反之，令平面上任意一点 $P(x,y)$，与一个复数 $z=x+iy$ 相对应。这样就建立了全体复数与平面上所有的点之间的一一对应关系。横轴上的点对应于实数 x，纵轴上的点对应于纯虚数 iy。称横轴为实轴。称纵轴为虚轴。称这种坐标平面为复数平面。

因此，我们把复数和复数平面上的点看成是完全相同的。

复数 $z=x+iy$，除了可以表示为复数平面上的点外，也可以表示为从坐标原点，到终点 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$（如图1.1）。反之，平面上一个向量 $\overrightarrow{OP}$ 也对应一个复数 $z=x+iy$。因此，根据需要，有时也把复数（向量）看作向量（复数）。此后提到复数 z 时，它总具有点或向量 $\overrightarrow{OP}$ 的意义。

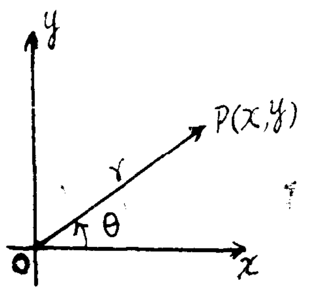

图1.1

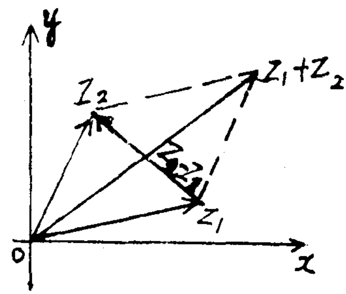

图1.2

在各种实际问题上，要常常用到向量，因之把复数表示为向量，更加增强了复数的实际意义。例如，河面上水流在每一点（x，y）的速度可以写成复数 $v=v_x+iv_y$，v_x, v_y 是分速度。

两个复数之和（或差），在几何上，由表示两个相加项的向量所作成的平行四边形的对角线来表示。这种表示，实际上符合力学和物理学中的向量：力、速度、加速度等的相加规律。因此，复数不单纯是形式上数的推广，而且还具有物理意义。

根据三角形的任一边之长不小于其他两边长之差，而不大于其他两边长之和，可得不等式（图1.2）：

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|,\ |z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|。$$

等号只在向量 z_1 和 z_2 共线而且同方向的时候成立。

利用直角坐标与极坐标间的关系：

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

可把 $z=x+iy$ 表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

并称之为z的三角式。其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$是z的模；θ是z的辐角，并记为$Argz$。数0是唯一的以零为模，辐角无定义的复数。

对于每一个复数z ($\neq 0$)，它的辐角θ可以有无穷多个值，彼此相差2π的整数倍，但其中必有一个而且只有一个辐角位于0与2π之间，称之为z的主辐角，用$argz$表示，或$0\leqslant argz<2\pi$①，而且

$$Argz=argz\pm 2n\pi,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

我们规定：

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}②,$$

其中θ为实数，则有$z=re^{i\theta}$，并称之为z的指数形式。

上述复数的三种表示形式，今后都将用在具体问题中。应用指数形式，则得

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+$$
$$+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

同样，$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$,

其中$z_k=r_ke^{i\theta_k}(k=1,2,\cdots,n)$。因之，

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdots|z_n|;$$

$$arg(z_1\cdots z_n)=\sum_{k=1}^{n}argz_k。$$

即复数的乘积的模等于它们的模的乘积；乘积的辐角等于它们的辐角之和。

设$z_2\neq 0$，由于

$$r_1e^{i\theta_1}=r_2{}^{i\theta_2}\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

则有 $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

---

①为了方便今后也用$-\pi<argz\leqslant\pi$

②此式称欧拉（*Euler*）公式。

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad arg\frac{z_1}{z_2}=argz_1-argz_2$$

即两复数的商的模等于模的商，商的辐角等于被除数与除数的辐角之差。

当$z_1=1$，$z_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)$时，由于$1=e^{i0}$，可得

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}。$$

3．无穷远点。为了需要，除了讨论有限复数外，还要讨论另一个复数，称为无穷大，记为∞。它和有限复数的运算规定如下：

如果a与b是有限复数，其中$b\neq0$，则

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty,\quad \infty\cdot b=b\cdot\infty=\infty,$$

$$\infty\cdot\infty=\infty,\quad \frac{a}{\infty}=0,\quad \frac{\infty}{a}=\infty,\quad \frac{b}{0}=\infty。$$

但是，$\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$仍无意义。

在复数平面上，我们找不到一个和∞相对应的点。但是，我们可以设想复数平面上有一个“理想点”和∞对应，称之为无穷远点。复数平面加上无穷远点，称为扩充平面。不含无穷远点的平面称为复数平面。和有限复数相对应的点，称为有限（远）点。

4．复数在球面上的表示。上面曾把复数表示为平面上的点和向量，这只是表示方法的一种。在许多实际问题中，也需要用别的方法来表示复数。例如，在地图制图学中，要考虑球面与平面上点的对应关系，就把地球投影到平面上去研究。这种方法称为测地投影法。我们就利用这种方法以建立复数与球面上的点的对应，即用球面上的点表示复数。

取一个在原点0与复数平面相切的球面。通过点0（南极S）作一垂直于平面的直线与球面交于N点(北极)。用直线段将点N与球面上的点Z相连，其延长线与平面交于一点z。这样就建立起球面上的点（不包括N点）与平面上的点（有限点）的一一对应关系。点z是点Z在平面上的投影，点Z是复数z在球面上的投影，（图1.3）。

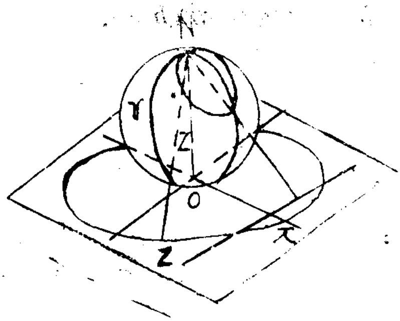

图 1.3

设点Z在平面上沿任一直线离开原点0向无穷远点进行时，则点Z在球面上必沿一条孤线逐渐趋向点N（见图1.3）。因之，在平面上与点N成对应的点是无穷远点。这样，球面上的点与扩充平面上的点就完全一一对应了。称球面为复数球面，它是扩充平面的直观模型。因此，在复变数的情形下，我们可以把复数平面看成是半径为无穷大的球面。

必须注意，在实变数的情形下，$+\infty$与$-\infty$是有区别的，而在复变数的情形下，这种区别是不必要的。这时无穷大就是扩充平面上的无穷远点，它对应于N点沿着z平面的任何路径无限离开原点时，都可以达到这个无穷远点。这与影射几何的平面不同，后者考虑的是无穷远直线。也就是说，它有无限多个不同的无穷远点排列在一条直线上。又在实变数情形下，$\pm\infty$是表示“点列”无限增大或无限减小的状态的记号；而在复变数情形下，所谓∞指的是复数平面上的无穷远点。两者之间有密切关系，表示状态的无穷大与无穷远点的关系，犹如“无穷小”与“零”间的关系。

习　　题 1,1

1. 求下列复数的实部、虚部、模和辐角：

1）$3i$；2）-2；3）$1+i$；4）$-1-i$；5）$1-\cos\theta+i\sin\theta$；

6）$\dfrac{1-i}{1+i}$；　7）$\dfrac{1}{i}$。

2. 证明下列不等式：

1）$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|$，$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$；

2）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$