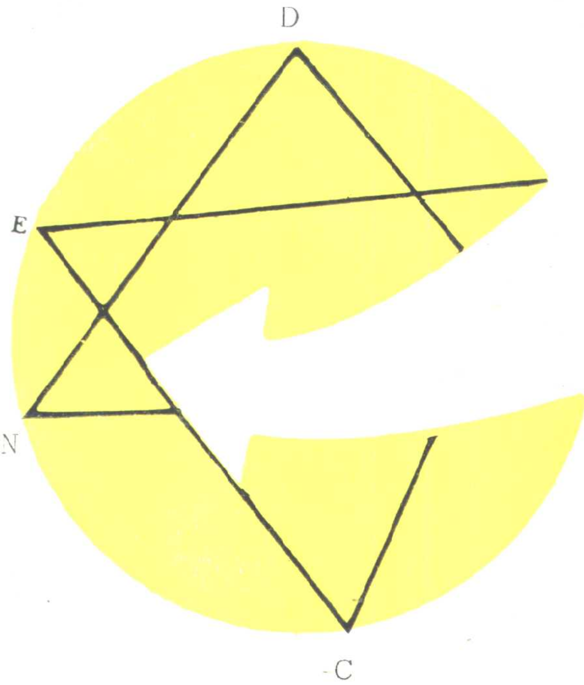
IMO

数学奥林匹克竞赛题详解

编著
湖北省数学会
湖北大学数学奥林匹克函授学校



人民邮电出版社

数学奥林匹克竞赛题详解

湖　北　省　数　学　会
湖北大学数学奥林匹克函授学校　编著

人 民 邮 电 出 版 社

登记证号（京）143号

内 容 提 要

本书是湖北省数学会、湖北大学数学奥林匹克函授学校集多年数学奥林匹克研究成果编著的。书中列出了48道饶有趣味的数学竞赛题。这些题目形式新颖、独特，给人耳目一新之感。作者对每题给出了详尽的分析与解答，使之通俗易懂。本书适合中学生、中学教师、大专院校理工科学生及数学爱好者阅读。

数学奥林匹克竞赛题详解

Shuxue Aolin Pike Jinsaiti Xiangjie

湖北省数学会
湖北大学数学奥林匹克函授学校 编著

责任编辑 赵桂珍

*

人民邮电出版社出版发行
北京东长安街27号
人民邮电出版社河北印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所经销

*

开本：787×1092 1/32　1992年 3 月 第一版
印张：3 4/32 页数：50　1992年3月河北第 1 次印刷
字数：71 千字　印数：1—15 000 册

ISBN7-115-04658-1/G・154

定价：2.00元

前　　言

国际数学奥林匹克（简称IMO）作为一项国际学科竞赛活动是1959年从东欧开始的．我国从1986年全面参加这项活动以来，至今短短数年已跻身于IMO强国之列．在1990年第31届国际数学奥林匹克竞赛中，中国队以230分的总分蝉联第一，获5枚金牌，1枚银牌．现在IMO竞赛活动已在我国青少年当中卷起了一股热潮．

湖北省数学会、湖北大学数学奥林匹克函授学校自1985年成立以来，为在全国普及IMO活动做了很多工作．本书是根据他们多年数学奥林匹克研究的成果组织编写的．原稿经多次在青少年中讲授，效果较好．本书收集了代数、初等数论、平面几何、立体几何、几何不等式、不等式、组合概率及解析几何等8个专题中的48道习题．这些竞赛题的题型新颖、解答独特巧妙．为了体现数学奥林匹克的特点，作者还发掘了每题的选题背景以及它们与现代数学新思想的关系．本书将以它精巧解题方法和独特风格吸引广大中学生的好奇心，激励他们去探求更新颖的解题方法，激发他们克服困难的创造精神．

为了便于读者掌握解数学奥林匹克竞赛题的必要方法，本书最后以附录形式列出了解题的定理与公式．

本书由郑玉美副教授主编，参加编写的还有王学宽、王茂福、肖铿、严启平四位同志．湖北大学数学系资料室的曹钟璧、张全树同志为我们提供了许多信息资料，并对本书进行了校正，中国教育学会中学数学教育研究会学术委员王本中同志审了此书，特此表示感谢．

由于水平所限，书中难免有错误，望读者给予指正．

作者　1991年6月

第一部分　竞赛题

§1 代　数

1.1　设n是一个至少有两个不同的素因子的正整数，证明：存在（1，2，…，n）的一个排列（a_1，a_2，…，a_n）使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{2\pi a_k}{n}=0$$

1.2　一个990次多项式$P(x)$满足

$P(k)=F_k$，$k=992$，993，…，1982，

其中$\{F_k\}$是非波那契数列，定义为：

$F_1=F_2=1$，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$，$n=2$，3，4，…

证明　$P(1983)=F_{1983}-1$．

1.3　试证明存在唯一的正整数的无穷数列$\{u_0$，u_1，u_2，…$\}$，对于所有$n\geqslant 0$，

$$u_n^2=\sum_{r=0}^{n}\binom{n+r}{r}u_{n-r}.$$

1.4　设a、b和c都是实数，而且

$(bc-a^2)^{-1}+(ca-b^2)^{-1}+(ab-c^2)^{-1}=0$，

求证：$a(bc-a^2)^{-2}+b(ca-b^2)^{-2}+c(ab-c^2)^{-2}=0$．

1.5　方程$x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$的三个根是$\mathrm{tg}A$、$\mathrm{tg}B$

和$\mathrm{tg}C$，其中A、B、C是一个三角形的三个内角，求第 4 个根，写成p、q、r和s的函数表达式.

1.6 设$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$，其中$x_i$均为实数，如果$s_1=s_2=\cdots=s_{n+1}$，证明对于每个$i=1, 2, \cdots, n$，$x_i$是 0 或是 1.

1.7 如果一个三角形三边的长为a、b、c，并满足$2(bc^2+ca^2+ab^2)=b^2c+c^2a+a^2b+3abc$，证明这个三角形是等边三角形，而且这个方程还适合于不是一个三角形三边长度的三个正实数.

1.8 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$是两个自然数数列，对于所有的$n\geqslant 1$，

$$a_{n+1}=na_n+1 \text{ 和 } b_{n+1}=nb_n-1$$

证明这两个数列仅有有限个相同的项.

1.9 求出满足下述条件的所有数列$\{a_1, a_2, \cdots\}$：对于所有的正整数m和n，

$$a_1=1, \text{ 并且 } |a_n-a_m|\leqslant\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

1.10 求出所有的连续函数f，使得对于一切实数x和y成立：

$$f(x+y)f(x-y)=(f(x)f(y))^2$$

§ 2 初等数论

2.1 证明存在无限多个由1983个连续正整数所组成的集合，每一个这样的正整数均可被某个形为a^{1983}的数整除，其中a是一个不等于 1 的正整数.

2.2 $x_1, x_2, \cdots, x_n$中每个数等于 1 或-1，并且x_1x_2

$x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_6+\cdots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1+x_{n-1}x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3=0$，证明$n$能被4整除.

2.3 将$5^{1985}-1$分解成三个整数的积，其中每一个数要大于5^{100}.

2.4 设有m个盒子，每个盒子里装有一些球，设$n<m$是一个已知整数，进行下述的操作：取出n个盒子并且在这些盒中各放入一个球，证明：(a)如果m和n是互素的，那么可以用有限次操作使得所有的盒子装有的球的个数相同.(b)如果m和n不是互素的，那么最初有一种在这些盒子里装球的方法，使得不可能用上述操作让每个盒子里装有相同个数的球.

2.5 如果$(1+x+x^2+x^3+x^4)^{496}=a_0+a_1x+\cdots+a_{1984}x^{1984}$

(i)求这些系数a_3，a_8，a_{13}，…，a_{1983}的最大公约数。

(ii)证明：$10^{347}>a_{992}>10^{340}$.

2.6 设$a_0=0$，并且

$a_{n+1}=k(a_n+1)+(k+1)a_n+2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$，

$n=0$，1，2，…，其中k是一个正整数，证明对于$n=1$，2，3，…，a_n是一个正整数.

§3 平面几何

3.1 设A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2是等边三角形ABC的三边BC，CA，AB上的三条相等线段，直线C_2A_1，A_2B_1，B_2C_1两两相交于B'，C'，A'，证明$B_2C_1:C_2A_1:A_2B_1=B'C':C'A':A'B'$.

3.2 平面π上有一已知直线l和已知圆，圆心为O，半径

为r，点O到直线l的距离为d且$d>r$，在直线l上取点M、N，使得以MN为直径的圆$\odot O'$与$\odot O$相外切，证明平面π上存在一点A，对线段MN张成定角.

3.3 平面上是否有100条不同的直线，使得它们正好有1985个不同的交点?

3.4 已知$\odot O$内有一个闭凸集F，且$\odot O$上每一点到F的视角均为$90°$，证明O是F的对称中心.

§4 立体几何

4.1 如果从四面体的各个顶点向对面引高线，垂足均为对面的垂心，则该四面体的四条高线交于一点.

4.2 一个简单多面体除去在某一个顶点处的面角之外，其余所有面角之和为$5160°$，求该多面体的所有面角之和.

4.3 设T是三维空间格点(坐标均为整数)的集合，当且仅当$|x-u|+|y-v|+|z-w|=1$时，两点(x, y, z)和(u, v, w)称为相邻的点，证明存在T的子集S，使得对T中每一个点P，在点P与其相邻的点中，恰有一点属于S.

4.4 一个四面体T内接于单位球O，试求过T各个面重心的球S的半径，并求出球S的中心到O的距离与T的棱长之间的函数关系.

§5 几何不等式

5.1 设P是以O为圆心的单位圆，P_1，P_2，…，P_n是圆P上的点，使得

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{O}$$

证明：对于所有点Q，$\overrightarrow{P_1Q}+\overrightarrow{P_2Q}+\cdots+P_nQ\geqslant n$

5.2 已知一个凸四边形内接于一个单位圆，证明：四边形的周长与对角线长度之和的差u满足$0<u<2$.

5.3 已知两个等边三角形都内接于一个半径为r的圆，令K是在两个三角形内部的所有点作成集合的面积，证明：$2K\geqslant r^2\sqrt{3}$.

5.4 已知ΔABC内任一点P，直线AP，BP和CP分别与A，B，C的对边相交的交点为D,E,F，确定一点P，使得ΔDEF的面积为最大.

5.5 证明：在平行六面体中，棱长之和不超过四条主对角线之和.

5.6 设在单位立方体内有1985个点，证明：我们总可以用这样一种方法在其中挑选出32个点，使以这些点为顶点的每个（可能缩小）封闭多边形的周长$<8\sqrt{3}$

5.7 一个四面体内接于一个单位球，球心在这个四面体的内部，证明：这个四面体的棱长之和大于6.

§6 不等式

6.1 在约束条件$0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$之下，求$s=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$的最大值.

6.2 令$x_n=\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{\cdots+\sqrt[n]{n}}}}$，证明：
$x_{n+1}-x_n<1/n!$，$n=2,3,4,\cdots$.

6.3 已知函数$F(x)=ax^2+bx+c$和$G(x)=cx^2+bx+a$，其中$|F(0)|\leqslant1$，$|F(1)|\leqslant1$且$|F(-1)|\leqslant1$，证明：对于$|x|\leqslant1$，有：(i) $|F(x)|\leqslant5/4$；(ii) $|G(x)|\leqslant2$.

6.4　证明：对于所有的$n\geqslant 2$，

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots$$

$$+\frac{x^2_{n-1}}{x^2_{n-1}+x_nx_1}+\frac{x^2_n}{x^2_n+x_1x_2}\leqslant n-1,$$

其中所有的x_i都是正实数。

§7　组合与概率初步

7.1　用24块尺寸为$1\times1\times2$的砖去填墙上的一个尺寸为$2\times2\times12$的洞，如果这些砖是无区别的，问有多少种不同的填法？

7.2　设P_1，P_2，…，P_n是集$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中不同的二元子集，使得如果$P_i\cap P_j\neq\phi$，则$\{a_i, a_j\}$是诸$P_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）中的一个。证明：每一个$a_j$（$j=1, 2, \cdots, n$）在诸$P_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）中出现的次数恰好相同。

7.3　10条航线连接1983个城市。任何两个城市之间可直达（飞机中途不停），且如果飞机从A到B可直达，那么从B到A也可直达。证明：至少有一条航线中有一个具有奇数个着陆点的圈.

7.4　一个盒子中有p个白球和q个黑球，这个盒子旁还放着一大堆黑球. 从盒中随机地取出两个球，如果它们同色，这两个球不再放入，那么从外面一堆里取一个黑球放进盒中. 否则，只将取出的一个白球放回盒中. 这个过程重复进行，直到最后两个球被取出，最后一个球放进盒子. 问最后一个放进盒子的球为白球的概率是多少？

7.5　一个均匀的硬币被重复投掷，直到连续出现奇数次正面向上，紧接着反面向上的情况为止，确定投掷次数的数学期望.

§8　解析几何

8.1 已知$a\cos\theta+b\sin\theta=c$，$a\cos\phi+b\sin\phi=c$，其中$\phi-\theta/2\neq 2k\pi$，求证：$a/\cos\dfrac{\phi+\theta}{2}=b/\sin\dfrac{\phi+\theta}{2}=c/\cos\dfrac{\phi-\theta}{2}$

8.2　已知$0\leqslant\alpha\leqslant\beta<\gamma\leqslant 2\pi$，且$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，求$\beta-\alpha$及$\gamma-\beta$的值.

8.3　已知$z_1=x+\sqrt{5}-yi$，$z_2=x-\sqrt{5}+yi$，此处x、y均为实数，且$|z_1|+|z_2|=6$，求$f(x, y)=|2x-3y-12|$的极值.

8.4　设$x^2+y^2\leqslant 1$，$(x+y)xy\leqslant\sqrt{2}/2$，求$(x+y)^2+x^2y^2$的极值.

8.5　求椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2=1$的内接三角形的面积的最大值.

8.6　试证：抛物线的外切三角形的外接圆必通过其焦点.

8.7　边长为1的菱形$ABCD$的$\angle B=60^\circ$，顶点A在x轴上移动，点B在$x^2+y^2=1$上移动，A、B、C、D为顺时针方向，问点D运动成什么图形？

8.8　椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2=1$的内接正三角形的一顶点为$(0, b)$，试证：当$3a^2-7b^2>0$时，此三角形的边长$(a>b>0)$不是唯一的.

第二部分　竞赛题详解

§1 代　数

1.1【分析】 我们利用平面向量证明所要证明的等式．为此先证明一个更一般的结论：

设$\vec{V}_k$是与 x 轴正方向所成角为 $2\pi k/n$的平面向量，其长度为1．则存在（1，2，…，n）的一个排列（b_1，b_2，…，b_n），使得

（1）$\vec{S}=b_1\vec{V}_1+b_2\vec{V}_2+\cdots+b_n\vec{V}_n=\vec{0}$

如果证明了上面结论，那么向量$\vec{S}$在 x 轴上的分量必为0，即$\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\cos\frac{2\pi k}{n}=0$，这就是本题要证的等式，不过这个和式是按角的自然顺序（而不是按系数的顺序）写出的．实际上，把和式按b_k的大小重排，若$b_k=i$，则b_k是从（1，2，…，n）中第 i 个数换到第 k 个位置，现在又换回原来的第 i 个位置，在这个重排过程中 k 变成a_k，因此$\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos\frac{2\pi a_k}{n}=0$．例如 $n=4$ 时，（b_1，b_2，b_3，b_4）=（2，1，4，3）

$$2\cos\frac{2\pi\cdot1}{4}+1\cos\frac{2\pi\cdot2}{4}+4\cos\frac{2\pi\cdot3}{4}$$

$$+3\cos\frac{2\pi\cdot4}{4}$$

$$=1\cos\frac{2\pi\cdot 2}{4}+2\cos\frac{2\pi\cdot 1}{4}$$

$$+3\cos\frac{2\pi\cdot 4}{4}+4\cos\frac{2\pi\cdot 3}{4}$$

其中 $(a_1, a_2, a_3, a_4)=(2, 1, 4, 3)$.

【证明】 因为 n 至少有两个不同的素因子，所以 n 可以写成两个互素的整数的积：$n=pq$，其中 $p>1$，$q>1$.

设单位向量 $\vec{V}_k$ 意义同分析中的一样，则对于 $r=1, 2, \cdots, p$，向量 $\vec{V}_r$ 与 $\vec{V}_{r+p}$ 的夹角为 $2\pi p/n$，同样 $\vec{V}_{r+p}$ 与 $\vec{V}_{r+2p}$，$\cdots$，$\vec{V}_{r+(q-2)p}$ 与 $\vec{V}_{r+(q-1)p}$ 以及 $\vec{V}_{r+(q-1)p}$ 与 $\vec{V}_r$ 的夹角均为 $2\pi p/n$，因此，$\vec{V}_r$，$\vec{V}_{r+p}$，$\cdots$，$\vec{V}_{r+(q-1)p}$ 这 q 个向量的端点构成一个正 q 边形，于是我们得到

(2) $\vec{V}_r+\vec{V}_{r+p}+\vec{V}_{r+2p}+\cdots+\vec{V}_{r+(q-1)p}=\vec{0}$

此处 $r=1, 2, \cdots, p$.

同理，对于 $s=1, 2, \cdots, q$，向量 $\vec{V}_s$，$\vec{V}_{s+q}$，$\cdots$，$\vec{V}_{s+(p-1)q}$ 的 p 个端点构成一个正 p 边形，从而我们得到

(3) $\vec{V}_s+\vec{V}_{s+q}+\vec{V}_{s+2q}+\cdots+\vec{V}_{s+(p-1)q}=\vec{0}$

此处 $s=1, 2, \cdots, q$

将(2)的每个等式分别乘以 $r=1, 2, \cdots, p$；将(3)的每个等式分别乘以 $0, p, \cdots, (s-1)p, \cdots, (q-1)p$，然后将所有的等式相加得到：

$$\vec{V}_1+\vec{V}_{1+p}+\cdots+\vec{V}_{1+(q-1)p}+$$

$$(2\vec{V}_2+2\vec{V}_{2+p}+\cdots+2\vec{V}_{2+(q-1)p})+$$

$$\cdots\cdots$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & +(p\vec{V}_p+p\vec{V}_{p+p}+\cdots+p\vec{V}_{qp})+\\
& +(p\vec{V}_2+p\vec{V}_{2+q}+\cdots+p\vec{V}_{2+\overline{p-1}q})+\\
& +(2p\vec{V}_3+2p\vec{V}_{3+q}+\cdots+2p\vec{V}_{3+\overline{p-1}q})+\\
& \cdots\cdots\\
& +((q-1)p\vec{V}_q+(q-1)p\vec{V}_{q+q}+\cdots+(q-1)p\vec{V}_{pq})\\
= & \vec{0}.
\end{aligned}
$$

(4)式经整理后$\vec{V}_k$的系数为b_k，于是

$$b_1\vec{V}_1+b_2\vec{V}_2+\cdots+b_n\vec{V}_n=\vec{0}.$$

以下我们必须证明（b_1，b_2，…，b_n）是（1，2，…，n）的一个排列.

由于$n=pq$，p与q互素，据余数定理，对于$r=1,2,\cdots,p$；$s=1,2,\cdots,q$，一定存在整数k，$1\leqslant k\leqslant n$，使得$k\equiv r\ (\mathrm{mod}\ p)$，$k\equiv s\ (\mathrm{mod}\ q)$．而且这种$k$是唯一的；否则，有$k'\neq k$而$1\leqslant k'\leqslant n$，$k'\equiv r\ (\mathrm{mod}\ p)$，$k'\equiv\ (\mathrm{mod}\ q)$，不妨令$k'>k$，则$0<k'-k<n$．而$k'-k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$，$k'-k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q)$．即有$p\,|k'-k$，$q|\,k'-k$，故$pq\,|k'-k$，即$n|\,k'-k$，这与$0<k'-k<n$矛盾.

取定一个$\vec{V}_k$，如果$k\equiv r\ (\mathrm{mod}\ p)$，$k\equiv s\ (\mathrm{mod}\ q)$，那么根据(4)式的作法，$\vec{V}_k$只能出现在(4)式中前$p$行中的第$r$行和后$q-1$行中的第$s-1$行，于是$\vec{V}_k$的系数$b_k=r+(s-1)p$，容易证明当$r=1,2,\cdots,p$；$s=1,2,\cdots,q$时，$b_k=r+(s-1)p$正好取遍从1到$n$的一切自然数．这就证明了上面的解是正确的.

当$n=15$，$p=5$，$q=3$时我们用一个图形来说明这种构造方法（见图1）：

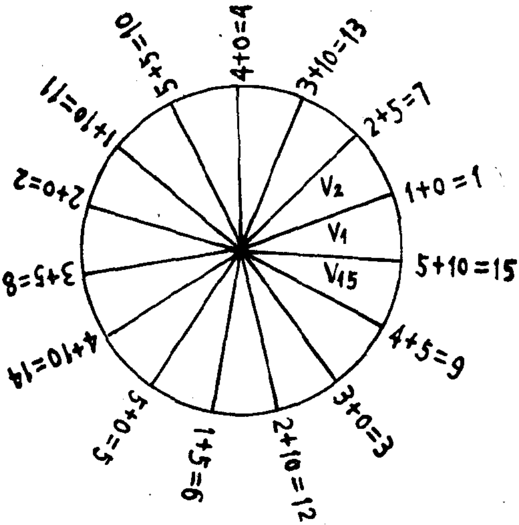


图 1

图中每个向量的终点的第一个加数是根据方程(2)决定的，第二个加数是根据方程(3)决定的，当然，这种构造方法可以有很多变化.

有趣的是，如果 n 是一个素数，$n=p$，如果(1)式对于整数系数成立，那么这些系数b_i一定相等.

要证明这个结论，我们把这些向量$\vec{V}_1$，$\vec{V}_2\cdots\vec{V}_p$看成复数，于是根据棣·美弗定理，$\vec{V}_k=\vec{V}_1^{\,k}$，而且这些复数$V_1$，$V_2$，$\cdots$，$V_p=1$是

(5)　　$x^p-1=0$的根.

我们还需要用到以下结论：当 p 为素数时分解式 $x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)=(x-1)p(x)$中的第二个因式$p(x)$是不可约的.

如果存在整数b_i，使得$b_1\vec{V}_1+b_2\vec{V}_2+\cdots+b_p\vec{V}_p=\vec{0}$ 由$\vec{V}_k=\vec{V}_1^k$得到：

$$b_1v_1+b_2v_1^2+\cdots+b_pv_1^p=0$$

于是V_1是多项式

（6） $b_px^{p-1}+b_{p-1}x^{p-2}+\cdots+b_1$的一个根.

又因$V_1^p-1=0$，即$(V_1-1)(V_1^{p-1}+V_1^{p-2}+\cdots+V_1+1)=0$而$V_1\neq 1$，所以$V_1^{p-1}+V_1^{p-2}+\cdots+V_1+1=0$。

即V_1也是多项式

（7） $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1$的一个根.

于是多项式（6）与（7）有一个公因式$x-V_1$，从而它们的最大公因式不是一个常数，又由于（7）式是不可约的多项式，所以（6）与（7）的最大公因式一定是（7）的倍式，又因为（6）与（7）式有相同的次数，（6）式必定恰好是（7）式的整数倍，即（6）式的系数b_i都相等.

1.2【证明】 我们需要用牛顿—格里戈里插值公式，先介绍如下：设$f(x)$为一个函数，$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$叫步长h的一阶差分，$\Delta^2f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$叫二阶差分，同样可定义高阶差分，$f(x)$的牛顿插值差分多项式是

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{u}{j}\Delta^jf$$

其中$u=x-x_0/h$。当$h=1$时，$f(x)$是一个n次多项式时，$f(x)$与它的牛顿插值差分多项式恒等。

对于任一数列a_{992}，a_{993}，…，a_{1982}，作差分数列：

$$\begin{array}{lllllll}(1) & a_{992} & a_{993} & a_{994} & a_{995} & \cdots\cdots & a_{1982}\\ & & \Delta a_{992} & \Delta a_{993} & \Delta a_{994} & \cdots\cdots & \Delta a_{1981}\\ & & & \Delta^2a_{992} & \Delta^2a_{993} & \cdots\cdots & \Delta^2a_{1980}\end{array}$$

$$\Delta^3 a_{992} \quad \cdots\cdots \quad \Delta^3 a_{1979}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta^{990} a_{992}$$

其中 $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$， $\Delta^2 a_i = a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i$ 等等，当$a_i = F_i$时，$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i = F_{i-1}$，（1）简化为

$$\begin{array}{lccccccc}
(2) & F_{992} & F_{993} & F_{994} & F_{995} & \cdots\cdots & F_{1982} \\
 & & F_{991} & F_{992} & F_{993} & \cdots\cdots & F_{1980} \\
 & & & F_{990} & F_{991} & \cdots\cdots & F_{1979} \\
 & & & & \cdots\cdots & & \\
 & & & & F_2 & &
\end{array}$$

因为$\Delta F_{992} = F_{991}$，$\Delta^j F_{992} = \Delta^{j-1} F_{993} - \Delta^{j-1} F_{992}$，用数学归纳法容易证明$\Delta^j F_{992} = F_{992-j}$。

现在根据牛顿插值公式我们有

$$(3) \quad P(x) = \sum_{j=0}^{990} \binom{x-992}{j} \Delta^j P(992)$$

$$= \sum_{j=0}^{990} \binom{x-992}{j} \Delta^j F_{992}$$

$$= \sum_{j=0}^{990} \binom{x-992}{j} F_{992-j}$$

今设$Q(x)$是一个 991 次多项式，对于整数k：$992 \leqslant k \leqslant 1983$，$Q(k) = F_i$，则据上面推证有

$$(4) \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{991} \binom{x-992}{j} F_{992-j}$$

$$= P(x) + \binom{x-992}{991}$$