黄琳 编著

系统与控制理论中的线性代数

科学出版社

系统与控制理论中的线性代数

黄 琳 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书论述系统与控制理论中的线性代数，内容系统而全面．本书不但包括了线性代数的基本理论，还包括了近二十年来由于系统与控制工程实践的需要而发展起来的新理论．书中一些内容是作者长期研究的结果．

全书共十四章．前四章概述与深化了线性代数的基本理论．第五章至第九章阐述矩阵范数与摄动理论、矩阵函数、广义逆阵、奇异值分解与极小化理论．第十章至第十二章论述线性方程组、最小二乘解与特征值计算等数值线性代数的内容．最后两章讨论了矩阵方程与稳定性理论、系统矩阵、有理矩阵与实现理论．本书各章均附有习题．

本书可供从事应用数学、系统工程与系统理论、控制理论与控制工程、力学和其它应用学科的科研工作者和工程技术人员、高等院校有关专业的师生参考．对于需要进一步提高现代控制系统理论水平的人员，这也是一本很有价值的数学参考书．

系统与控制理论中的线性代数

黄　琳编著

责任编辑　刘兴民　袁放尧

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年1月第一版　　开本：850×1168 1/32

1984年1月第一次印刷　　印张：24 1/2

印数：0001—8,500　　字数：647,000

统一书号：15031・542

本社书号：3360・15—8

定价：4.50 元

序

现代系统与控制理论产生于本世纪五十年代末期，Понтрягин 和 Bellman 关于最优控制理论方面的贡献，Kalman 关于控制系统一般理论的工作，都是这方面的杰出代表[1-5]．从此开始的现代系统与控制理论，一方面由于对其研究必须引进更多更深入的数学；另一方面为了将理论应用于实际而必然与计算和计算机相结合，这两点都使矩阵或线性代数的理论和方法在这一领域内的作用日益显著．在五十年代的控制理论中，一般只在少数场合才用线性代数的理论处理问题，今天，这种状况已经完全改观了．现在当人们打开任何一本多变量线性系统理论的著作（即使是一本教科书）时，都会发现在系统的描述，系统理论中一些命题的提出、论述、解决的方法乃至结论，都与线性代数中的概念、方法和结论紧密相联．这种巨大的变化有其内在的深刻原因[1-18]．

在系统理论模型的建立上，线性有限维的模式总是基本的，这不仅由于这一模式便于从数学上进行处理，而且在相当广泛的范围内这一模式可以反映系统的实质．研究有限维线性系统最基本的工具乃是矩阵或线性代数．即使是非线性系统的研究，除了需要引入适应非线性特征的一些概念与方法外，在描述与推理过程中矩阵仍然是不可缺少的手段[17]．就分布参数系统来说，虽然其本质上应归于无穷维模型，但在实际应用中常可借助一些特定的手段(差分格式或有限元)，将其近似地转化成有限维系统来进行讨论．这种转化不仅便于使用计算机而且能较好地在实际上反映系统的性能．这种对分布参数系统近似模型的研究手段仍然以线性代数为主[19]．

从对 Kalman 所提出的系统可控性与可观测性的研究上，容易发现这两个刻画系统性能的基本概念深刻地反映在关于线性变

换的循环不变子空间及其生成元的论述中[20]．无论是系统中的各种解耦问题还是观测器理论，也总是同矩阵方程、矩阵或线性映射所形成的各种子空间的相互关系联系在一起．系统稳定性及二次性能指标最优的讨论，往往归结为线性或二次矩阵代数方程或矩阵微分方程的讨论．有时候在线性代数的领域内，长期并未得到很好应用的结果，在近年来控制与系统理论的推动下也获得了新的动力．例如关于奇值和奇值分解的研究在今天关于系统的灵敏性分析、优化计算乃至图象识别中都有了很好的应用．

由于计算方法和计算机的发展与普及，不仅为系统与控制理论的实际应用开辟了广阔的前景，而且也使系统理论的研究发生着变化．控制系统的计算机辅助设计就是适应这种变化而形成的一个分支．由于系统与控制理论目前的发展状况，数值线性代数中的各种理论和方法，在相当一段时间内都会在控制与系统理论的计算机辅助设计上起着重要作用．

用线性代数的基本理论来处理系统与控制理论中的问题，往往描述简洁而且便于抓住实质．这一点已为近二十年来的事实所证实． 例如当采用线性变换的几何理论来讨论状态空间型系统时，就易于把握住问题的核心而得到理论上深刻的结论，甚至象商空间这样抽象的概念也能在系统与控制理论上发挥重要作用．在用算子的多项式矩阵或有理函数矩阵描述的系统的研究中，多项式矩阵环及其上的理想的理论起着重要的作用．这方面的工作不仅已经通过 Laurent 多项式矩阵环的理论推广至更为一般的线性系统[12]，而且它还可以与经典的控制理论相联系起到独特的作用．为了寻求对线性系统更普遍的描述方式与研究工具，一些人从代数中较抽象的一个分支模论出发进行研究，也已经显示出一种新的图景[10,21,22]．

从上面的分析可以断言：线性代数的理论与方法是研究现代系统与控制理论的重要数学基础．本书正是基于这一要求而撰写的．

本书共四个部分：

第一部分是线性代数的基本理论．它包括线性空间与线性映射；多项式与多项式矩阵；线性变换的代数理论与几何理论；酉空间与正规矩阵等[23-33]．叙述采用空间的概念与矩阵形式相结合的方法，以求简洁与概括．阅读这部分内容不仅可以达到整理与加深理解常规线性代数理论的目的，而且也为今后的展开创造一个良好的条件．此外，在结合系统与控制理论的需要上也作了必要的展开，例如关于多项式矩阵的理想、线性变换的结构特别关于循环不变子空间及其生成元的论述都是为此目的而写出的．

第二部分是线性代数的几个特殊理论问题，它包括矩阵范数和它的应用；矩阵的摄动理论；矩阵函数；广义逆与投影算子理论；矩阵的奇值分解以及极小化理论等[34-37]．这部分内容的选取不仅考虑到当前系统与控制理论发展的状况，而且也为今后发展的需要做了一定准备．

第三部分是数值线性代数中与系统和控制理论关系密切的部分，它包括线性方程组的直接法；无约束与有约束的线性最小二乘解以及矩阵的特征值计算[37-46]．这一部分的叙述在给出严谨的理论论证的同时还给出了一种粗线条的原则性的算法，以期为应用计算机进行计算创造一定条件．对于基于差分法解偏微分方程的需要而发展起来的各种矩阵迭代方法[47]，限于篇幅将不作任何论述．

第四部分讲了两个专门问题：其中一个是与稳定性及二次型最优相联系的矩阵代数方程问题，由于引进了矩阵的 Kronecker 乘积而带来了方便，对于 Ляпунов 方程、代数 Riccati 方程以及 Hurwitz 问题均作了讨论[8,13,26,48-57]．另一个是关于系统矩阵及有理函数矩阵的内容，这一部分对于多变量系统的讨论是很必要的[8,13]．

本书每章均留有一些练习，一些比较简单的命题(包括引理、定理与推论)未给出证明，这些均提供读者以练习的机会．附录给出了书中符号的统一规定和代数的必备的基本知识，以便读者查阅．书后列有必要的参考文献，由于文献浩瀚，不可能周全，一些已见诸于书的成果就不再求源引原文献而只引有关书籍，以保证

读者能有线索可寻.

本书的前身是我写的一本《线性代数应用理论讲义》，该讲义的部分内容曾先后在近十个高等院校及研究所讲过，本书是在这些讲学基础上联系到系统和控制理论的需要改写而成的.

在撰写本书的过程中，我得到了很多单位及同志们的支持和帮助，其中特别应该提到的有关肇直、宋健、高为炳、张志方、秦化淑、贺建勋、于景元、郑应平和王恩平等同志，他们或给予作者以热情支持或在内容与写法等方面提供了宝贵意见.

北京大学力学系特别是一般力学教研室的同志给予作者以热情的鼓励和支持，北京大学计算数学教研室王颖坚同志阅读了有关数值线性代数的章节并提供了不少有益的意见.

对于在撰写本书过程中曾给予作者以支持和帮助的所有同志和单位，在此一并表示深切的感谢.

限于水平，书中不当乃至错误之处难免，热忱欢迎批评指正，以期今后改进.

黄　琳

1981年5月于北京大学力学系

目　　录

第一章　线性空间与线性映射

线性空间与线性映射的理论是线性代数的基本内容．线性空间的理论着重讨论关于线性空间的一般概念、一般线性空间中建立类似于坐标系的基的要求、子空间的运算的特点以及一般同维的线性空间之间的同一性．线性映射是线性空间之间简单而又有用的一类映射，线性映射及其运算与矩阵以及矩阵的运算完全对应．在线性空间中简单的代表是 $\boldsymbol{P}^n$，而在线性映射中简单的代表是$\boldsymbol{P}^{m\times n}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是某个数域．这些都是本章所要讨论的内容．

最后还对同矩阵 A 相联系的两个特殊线性空间 $\boldsymbol{R}(A)$ 与 $\boldsymbol{N}(A)$ 作了论述，利用这两个线性空间可以解答一般线性方程组的理论结果．

§1.1　线性空间的基本概念

线性空间是线性代数的基本概念，是对一些不同的数学对象，抓住其中线性的共同本质进行抽象而产生的．所谓线性空间，粗线条地讲就是一个定义了两种运算(加法与数乘)的一个集合，该集合在这两种运算下保持封闭性．

定义 1.1.1　集合 $\boldsymbol{S}$ 称为是域 $\boldsymbol{P}$ 上的一个线性空间，系指在 $\boldsymbol{S}$ 中的元间定义了加法，使任何 $x, y\in\boldsymbol{S}$ 有 $z=x+y\in\boldsymbol{S}$．又在 $\boldsymbol{S}$ 与域 $\boldsymbol{P}$ 间定义了数乘，使任何 $\mu\in\boldsymbol{P}, x\in\boldsymbol{S}$ 有 $\mu x\in\boldsymbol{S}$．并且加法与数乘满足下述规则:

1°　$x+y=y+x$，$\forall x,y\in\boldsymbol{S}$.

2°　$x+(y+z)=(x+y)+z$，$\forall x,y,z\in\boldsymbol{S}$.

3°　有唯一的 $0\in\boldsymbol{S}$ 使 $0+x=x$，$\forall x\in\boldsymbol{S}$.

4°　对任何 $x\in\boldsymbol{S}$，总有 $-x\in\boldsymbol{S}$ 使 $x+(-x)=0$.

5° 有 $1 \in \boldsymbol{P}$ 使 $1x = x$, $\forall x \in \boldsymbol{S}$.

6° 有 $0 \in \boldsymbol{P}$ 使 $0x = 0 \in \boldsymbol{S}$, $\forall x \in \boldsymbol{S}$.

7° $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{P}$, $\forall x, y \in \boldsymbol{S}$ 均有:

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$$
$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

由于在本书范围内讨论的线性空间基本上是建立在实数域 $\boldsymbol{R}$ 与复数域 $\boldsymbol{C}$ 上，均为常见的向量空间与函数空间，因此在这些空间中引进的加法运算和在这些空间与对应域之间引进的数乘运算，都是常规意义下复数运算或它的自然扩充，这样一来定义中所列举的规则 1°—6°，常常是自然满足的．由此今后再判断一个集合是否是线性空间将采用下述简化定义．

定义 1.1.1′ 集合 $\boldsymbol{S}$ 是域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间，系指在 $\boldsymbol{S}$ 上定义了加法和 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 间定义了数乘，使对任何 $m \in \boldsymbol{Z}_+$ 下式成立:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \boldsymbol{S}, \ \forall \alpha_i \in \boldsymbol{P}, \ \forall x_i \in \boldsymbol{S}.$$

由前述的理由，定义 1.1.1 中 1°—6° 均认为自动满足，因此从定义 1.1.1′ 中令 $m = 2$ 就能得到定义 1.1.1. 反之，由定义 1.1.1 利用数学归纳法就有定义 1.1.1′. 从而这两个定义是等价的.

定义 1.1.2 $\boldsymbol{P}$ 系一域，若 $\alpha_i \in \boldsymbol{P}$, $i \in \underline{n}$, 则称

$$\boldsymbol{P}^n = \left\{ a \,\middle|\, a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \ \alpha_i \in \boldsymbol{P}, \ i \in \underline{n} \right\}$$

为域 $\boldsymbol{P}$ 上的 n 维向量空间．在 $\boldsymbol{P}^n$ 中定义:

1° $a, b \in \boldsymbol{P}^n$, $c = a + b$ 系指

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \ i \in \underline{n},$$

其中 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为 a, b, c 的第 i 个分量.

2° $a \in \boldsymbol{P}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{P}$, $b = \alpha a$ 系指

$$\beta_i = \alpha\alpha_i, \ i \in \underline{n}.$$

3° $\boldsymbol{P}^n$ 中零向量系分量全为域 $\boldsymbol{P}$ 中零元所组成.

容易验证 $\boldsymbol{P}^n$ 是域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间.

当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 则对应向量空间称为 n 维实(或复)向量空间,且记为 $\boldsymbol{R}^n$ (或 $\boldsymbol{C}^n$).

例 1.1.1 给定 $a_1, a_2 \in \boldsymbol{R}^3$, 则集合

$$\boldsymbol{S}=\{x \mid x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2,\ \lambda_i \in \boldsymbol{R},\ i \in \underline{2}\},$$

是一个域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间,且 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^3$.

例 1.1.2 给定 $A \in \boldsymbol{C}^{m \times n}$, 则

$$\boldsymbol{R}(A)=\{x \mid x=Ay,\ y \in \boldsymbol{C}^n\},$$
$$\boldsymbol{N}(A)=\{x \mid Ax=0\}$$

都是线性空间. 但 $\boldsymbol{R}(A) \subset \boldsymbol{C}^m$ 而 $\boldsymbol{N}(A) \subset \boldsymbol{C}^n$.

例 1.1.3 次数 $\leqslant n$ 的复系数多项式的全体

$$\boldsymbol{C}_n[\lambda]=\{a \mid a=\alpha_n \lambda^n+\cdots+\alpha_1 \lambda+\alpha_0, \alpha_i \in \boldsymbol{C}\}$$

是域 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间. 但集合

$$\boldsymbol{T}=\{a \mid a=\alpha_n \lambda^n+\cdots+\alpha_1 \lambda+\alpha_0,\ \alpha_i \in \boldsymbol{C},\ \alpha_n \neq 0\}$$

是 $\boldsymbol{C}_n[\lambda]$ 的子集合但其本身不是线性空间.

例 1.1.4 n 阶常系数线性微分方程

$$L[\xi(\tau)]=\frac{d^n \xi}{d \tau^n}+\alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} \xi}{d \tau^{n-1}}+\cdots+\alpha_1 \frac{d \xi}{d \tau}+\alpha_0 \xi=0$$

的解的全体

$$\boldsymbol{S}=\{\xi(\tau) \mid L[\xi(\tau)]=0\}$$

是域 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间,其中 $\alpha_i \in \boldsymbol{C}$, $i \in \underline{n-1}$.

例 1.1.5 集合

$$\boldsymbol{X}=\left\{\xi \,\middle|\, \frac{d \xi}{d \tau}=\xi^2\right\}$$

表示方程 $\dfrac{d \xi}{d \tau}=\xi^2$ 的解的全体. 由于 $\xi_1=-\dfrac{1}{\tau} \in \boldsymbol{X}$ 但 $2 \xi_1 \bar{\in} \boldsymbol{X}$, 因此解集合 $\boldsymbol{X}$ 不是线性空间.

例 1.1.6 给定 $A \in \boldsymbol{C}^{m \times n}$, $0 \neq b \in \boldsymbol{C}^m$, 则集合

$$\boldsymbol{S}=\{x \mid Ax=b\}$$

表方程 $Ax = b$ 的解的全体. 由于 $0 \bar{\in} \boldsymbol{S}$ 因而 $\boldsymbol{S}$ 不是线性空间.

由定义 1.1.1′ 所刻划的线性空间的性质又称为迭加原理，线性空间中的元是满足迭加原理的，即元之间作加法或元通过对应域中的数产生数乘的元（相当于元的倍数）都仍为线性空间的元. 这样一种迭加原理一方面在齐次线性方程(代数的、微分的与积分的等)中相当普遍存在，另一方面人们可以利用迭加原理，对这样的线性空间(例如齐次线性方程的解空间)找出部分元，然后利用迭加的办法以找出线性空间的全部元（例如齐次线性方程的通解).

§1.2 线性组合、线性相关与线性无关

在通常的三维实向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中，若用 a_1, a_2, a_3 三个向量组成 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个标架，总要求:

1° 任何 $x \in \boldsymbol{R}^3$，总应有 $\xi_i \in \boldsymbol{R}$，$i \in \underline{3}$ 使

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \tag{1.2.1}$$

这称为用标架 a_1, a_2, a_3 来表示 x，其表示的系数 ξ_i，$i \in \underline{3}$ 称为 x 在标架 a_1, a_2, a_3 下的坐标.

2° 表示法 (1.2.1) 应是唯一的，即 a_1, a_2, a_3 若组成标架，则不仅可用它来表出任何向量 $x \in \boldsymbol{R}^3$，而且 x 在这组标架下的坐标仅有一种.

在 $\boldsymbol{R}^3$ 中满足上述要求 1°, 2° 的向量组 (a_1, a_2, a_3) 归结为该三向量不共面.

为了在一般有限维线性空间中建立类似于 $\boldsymbol{R}^3$ 中标架的向量组，将逐步引入一些定义与定理.

定义 1.2.1 设 $\boldsymbol{S}$ 是域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间，又

$$x_i \in \boldsymbol{S},\ \alpha_i \in \boldsymbol{P},\ i \in \underline{m},\ m \in \boldsymbol{Z}_+,$$

则表示式

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$