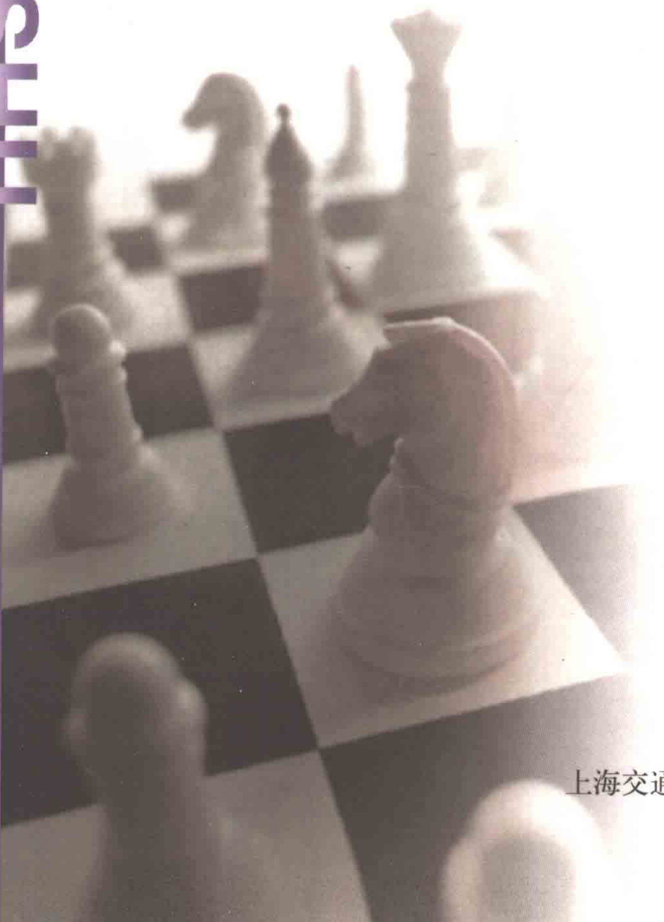
DAXUE DAISHU

大学代数

陆少华 沈 灏 著



上海交通大学出版社

上海交通大学“九五”重点教材

大学代数

陆少华　沈　灏　著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书包含了传统的“高等代数”、“矩阵理论”与“近世代数”的基本内容；即：多项式，行列式，矩阵及其各种运算，线性方程组，二次型，相似矩阵，线性空间，线性变换，Jordan 标准形，矩阵函数，群，环，域等。

本书体系新颖，选材先进，概念清晰，推理独创，方法简便，例题与习题配套。

本书可作为理工类本科生、研究生教学用书或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学代数/陆少华，沈灏著. —上海：上海交通大学出版社，2001
ISBN 7-313-02443-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①陆…②沈… Ⅲ.代数－高等学校－教材 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 04534 号

大学代数
陆少华 沈 灏 著
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)
电话：64071208 出版人：张天蔚
常熟市印刷二厂印刷 全国新华书店经销
开本：890mm×1240mm 1/32 印张：15.5 字数：444 千字
2001 年 4 月第 1 版 2001 年 4 月第 1 次印刷
印数：1～2050
ISBN 7－313－02443－6/O·136 定价：32.00 元

序

陆少华教授嘱我为他和沈灏教授合著的《大学代数》作序，当时我正担任该书的复审编辑，虽然出于情面应允了此事，但心里还是十分的茫然。复审刚刚开始，尚未见《大学代数》之一斑，还真不知该如何去避免一个平淡的序言。随着编审过的内容越来越多，心底的迷雾越来越少，落笔也渐渐地变得有把握起来。

20世纪总被称为是一个知识爆炸的时代。作为一个科学工作者，我深深感受到知识发展的速度。如果有几年不看文献，就会产生恍入二世的感觉，在学术交流会上，对一些发言有感坠入五里云雾中，这时连解决问题的方法都听不懂。这种感觉常常来自知识的贫乏。研究的对象越来越深入，研究的手段越来越进步，越来越多的近代数学用到了应用问题的解决中。记得我在求学的时代就有人提出"用'新三高(泛函分析、拓扑和近世代数)'来代替'老三高(微积分、解析几何和高等代数)'"的说法，对这种观点的正确性的认识是在从事科研工作后才真正建立起来的，因为不懂泛函分析、拓扑学和近世代数简直无法与处于前沿的研究者沟通。产生这种"容易落伍"现象的原因不只是由于应用科学的发展，同时由于数学本身的发展，一批应用性的数学成果建立，例如控制界称为20世纪标志性成果的最大值原理，使得抽象数学与应用科学的距离越来越近。在这种情况下，再照以前的模式，大学数学从空间解析几何开始，讲述经典微积分，讲解一点微分方程和矩阵计算，必然地使得数学教学落后于研究工作的现代化了，从而有必要将大学数学教育的锋线推进到一个新的层次，有必要对大学生特别是一些前沿大学里的学生讲述一些现代数学知识。陆少华和沈灏两位教授的《大学代数》做了这方面的尝试，这本教材，从多项式讲起，涵盖了行列式、矩阵论、线性空间与线性变换、二次型，还加入了通常非数学专业不讲的群、环、域的基本内容。我以为这些知识已经能满足攻读工科的学生包

括研究生在一般研究工作中对数学工具的需要了。

在与过去一样多的教学时间内要讲解比过去多一倍以上的内容，如果还是以前一样的平铺直叙，也许没有一位教师会敢采用这样的一本教材，也没有一位学生会喜爱它。于是课程的整合是必要的。整合是近年来教育改革的一个重要概念、科学在发展，课目随之而增多；由于开展素质教育，让学员有更大的活动空间，课时又要缩减。常常出现一门课的时间内要上过去两三门课的内容。简单地将两三门课程的内容放在一起肯定是不行的。这时候，就要求对课程内容进行筛选，对课程的线索进行调整，讲述的方法要作更新，要融合进新鲜的内容，这就需要课程的整合。读了陆少华教授和沈灏教授的《大学代数》，感到他们在课程的整合上是下了功夫的。书中的讲述体系作了新的安排，内容的处理有了新的思路，例如，先讲具体的多项式，实数上的矩阵和线性空间，使得学员产生比较形象的印象，然后进入抽象的域中，这和升华也许更自然，更有利于学生的学习；又如采用矩阵将线性代数部分都串起来，使得结构紧凑，论述更方便；我特别对书中介绍 Jordan 形的方式很赞赏，作者采用现代的方法，一鼓作气给出了矩阵标准形的结论。

陆少华和沈灏是上海交通大学的知名数学教授，陆教授长期从事数学教学，讲课以思路清晰和细腻著称；沈灏教授在组合数学上颇有造诣，在国内外很有影响。两位携手共著教材，可谓珠联璧合。陆少华教授谦逊地要我提一点建议，我想也许内容可以作进一步的精选，多将一些结论留给学员，让他们有更自由的思想活动空间，这作为再版时考虑。

以上是我的一些感受，窃以为可以作为序言。

韩正之

2001 年 1 月

目　　录

第一章　数与多项式

本章引进多项式的概念，导出有关数域上一元多项式因式分解的基本结论。

§1　连加号 $\sum$

数学中，为了方便常把 n 个数连加的式子 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 简单地记成 $\sum_{i=1}^{n} a_i$。$\sum$ 称为连加号，a_i 表示一般项，i 的取值从 1 到 n。例如：

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i;$$

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{i=0}^{n} a^i;$$

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i。$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 中的 i 称为求和指标，它与求和结果是没有关系的，也可用其他字母代替。例如：$\sum_{i=1}^{n} i$ 与 $\sum_{k=1}^{n} k$ 都表示同一连加式 $1 + 2 + \cdots + n$。

求和指标可以选用任意字母，但不能选用求和式中已出现过的其他字母。例如：

$k + 2k + \cdots + nk$ 可以写成 $\sum_{i=1}^{n} (ik)$，但不能写成 $\sum_{k=1}^{n} (kk)$，后者代表 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$，与原式含义不同。

求和号有如下性质：

(1) $k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(ka_i)$；

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$；

(3) $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\right)$。

利用数的加、乘运算满足分配律，即推得(1)；再由数的加法运算满足交换律与结合律，即推得(2)；(3)的证明如下：

$$\text{等式左边} = \sum_{i=1}^{s}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in})；$$

$$\text{等式右边} = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{sj})。$$

略加观察，容易发现，左、右两边都表示下列阵式中 $s \times n$ 个数的总和，等式左边表示先按行求和，等式右边表示先按列求和，因而相等。

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots, & a_{1n}\ ; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}, & \cdots, & a_{ij}, & \cdots, & a_{in}\ ; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{s1}, & \cdots, & a_{sj}, & \cdots, & a_{sn}\ 。
\end{array}$$

为了方便，可把连加式 $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8$ 写成 $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^{8} i$。一般规则是把求和指标需满足的附加条件写在连加号下。例如：

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{5} \frac{1}{k-3} = \frac{1}{1-3} + \frac{1}{2-3} + \frac{1}{4-3} + \frac{1}{5-3}；$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}；$$

$$\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(a_i - a_j) = \sum_{i=2}^{n}(a_i - a_1) + \sum_{i=3}^{n}(a_i - a_2) + \cdots + \sum_{i=n}(a_i - a_{n-1})。$$

§2 数

一、数集的概念

由复数组成的集合常称为数集。常见数集有：

(1) 正整数全体所成的集合，用 $\mathbf{Z}^+$ 表示，即

$$\mathbf{Z}^+ = \{1,2,3,\cdots\};$$

(2) 整数全体所成的集合，用 $\mathbf{Z}$ 表示，即

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,\cdots\};$$

(3) 有理数全体所成的集合，用 $\mathbf{Q}$ 表示，即

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\right\};$$

(4) 实数全体所成的集合，用 $\mathbf{R}$ 表示；

(5) 复数全体所成的集合，用 $\mathbf{C}$ 表示，即

$$\mathbf{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbf{R}\}。$$

这些例子中，我们用了集合的两种常用表示法，即列举法((1)与(2))和特性法((3)与(5))。

二、数环

定义 1.1 非空数集 R 叫数环，如果对任意 $a,b \in R$，必 $a + b$，$a - b$，$ab \in R$。即数环对数的加、减、乘三种运算封闭：数环包含了两个数的同时，包含了它们的和、差与积。

因为数环 R 非空，R 中有某个数 a，从而 $0 = a - a \in R$，即数环包含数零。

单个数零成一数环。数集 $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 都是数环。

由于 $1 - 2 \overline{\in} \mathbf{Z}^+$，因而 $\mathbf{Z}^+$ 不是数环。

三、数域

定义 1.2 数环 P 称为数域，如果 $0,1\in P$，且对任意 $a,b\in P$，$b\neq 0$，必 $\frac{a}{b}\in P$，即数域对数的加、减、乘、除四种运算封闭。

例 1.1 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 都是数域。

例 1.2 $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$是数域。

证 若 $a+b\sqrt{2}$ 与 $c+d\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$，则

$$\begin{aligned}&(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})\\=&(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}),\\&(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\\=&(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}),\end{aligned}$$

当 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{c^2-2d^2}[(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}]\in Q(\sqrt{2}),\end{aligned}$$

故 $Q(\sqrt{2})$ 是数域。

命题 1.1 若 P 是数域，则

$$P\supseteq\mathbf{Q},$$

即任意数域都包含了有理数域。

证 $0,1\in P$，从而 $n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}\in P$。

$$-n=0-n\in P,$$

故

$$P\supseteq\mathbf{Z}。$$

任意 $a,b\in\mathbf{Z}\subseteq P$，$b\neq 0$，必 $\frac{a}{b}\in P$。由此，$P\supseteq\mathbf{Q}$。

§3 一元多项式

中学数学中常把一元多项式表达成：$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，这里 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是数，x 是字母。但究竟字母 x 代表什么，x 的一个多项式的含意是什么，都是不够明确的。

为了确切理解多项式，我们给出下面的定义。

一、多项式的定义

定义 1.3 称无穷序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots)$ 为数环 R 上的一元多项式，如果

(1) $a_i \in R, i = 0, 1, 2, \cdots$；

(2) 存在 $n \geqslant 0$，当 $i \geqslant n$ 时，$a_i = 0$。

即数环 R 上的一元多项式是指数环 R 中无穷个数组成的序列，这无穷个数中仅有有限个可能不是零。

二、多项式的次数

我们采用传统的记号 $R[x]$ 表示数环 R 上一元多项式全体。用 $f(x), g(x)$ 等表示 $R[x]$ 中的多项式。

设 $f(x) = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$，称 $a_0, a_1, \cdots$ 为 $f(x)$ 的系数；如果 $a_n \neq 0$，而当 $i > n$ 时，$a_i = 0$，则称 $f(x)$ 为 n 次多项式，记成 $\deg f(x) = n$，a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数，一般地，a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数。

系数全为零的多项式 $(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ 称为零多项式，仍记成 0。为了方便，定义 $\deg 0 = -\infty$，且规定，对任意整数 n 均有：$-\infty < n$，$n + (-\infty) = -\infty$，$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$。

若多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有系数一一对应相等，则称两个多项式相等，记成 $f(x) = g(x)$。

三、多项式的运算及其性质

我们定义多项式的加法、数乘、乘法于下：

$$(a_0,a_1,\cdots)+(b_0,b_1,\cdots)=(a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots),$$
$$k(a_0,a_1,\cdots)=(ka_0,ka_1,\cdots),$$
$$(a_0,a_1,\cdots)\times(b_0,b_1,\cdots)=(c_0,c_1,\cdots),$$

这里

$$c_t=\sum_{i=0}^{t}a_ib_{t-i}=\sum_{i+j=t}a_ib_j。$$

显然，多项式的和与积仍是多项式。

例 1.3 (1) $(1,2,4,1,0,\cdots)\times(2,0,3,0,\cdots)$
$=(1\times 2,1\times 0+2\times 2,1\times 3+2\times 0+4\times 2,$
$1\times 0+2\times 3+4\times 0+1\times 2,\cdots)$
$=(2,4,11,8,12,3,0,\cdots)$;

(2) $2(1,-1,0,3,0\cdots)+(1,3,0\cdots)\times(2,0,4,0\cdots)$
$=(2,-2,0,6,0\cdots)+(2,6,4,12,0,\cdots)$
$=(4,4,4,18,0\cdots)$。

命题 1.2 (1) $\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max(f(x),g(x))$,
(2) $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$。

证 按定义，(1) 是显然的。证(2)于下：

若 $f(x)$与 $g(x)$中有一个为零多项式，则其积也是零多项式。此时，$\deg[f(x)\cdot g(x)]=-\infty=\deg f(x)+\deg g(x)$。

若 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$。设 $\deg f(x)=n,\deg g(x)=s,f(x)$ 与 $g(x)$ 的 首项系数分别为 a_n 与 b_s。此时，积 $f(x)\cdot g(x)$ 的$(n+s)$ 次项系数为

$$\sum_{i+j=n+s}a_ib_j,$$

因为 $i>n$ 时，$a_i=0$；$j>s$ 时，$b_j=0$。故上述和式中的非零项下标必满足 $i\leqslant n,j\leqslant s$，欲使其和为 $n+s$，必 $i=n,j=s$。
于是

$$\sum_{i+j=n+s}a_ib_j=a_nb_s\neq 0。$$

当 $t>n+s$ 时，积 $f(x)\cdot g(x)$ 的 t 次项系数为

$$\sum_{i+j=t} a_i b_j。$$

欲使和式中单项 $a_i b_j \neq 0$，必 $i \leqslant n, j \leqslant s$，但此时 $i+j \leqslant n+s<t$，故当 $i+j=t$ 时，和式中单项全为零，于是积 $f(x) \cdot g(x)$ 的 $t(>n+s)$ 次项系数为 0。

由上分析，得

$$\deg (f(x) \cdot g(x))=n+s=\deg f(x)+\deg g(x)。$$

从证明过程中可知，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不是零多项式，它们的首项系数分别为 a_n 与 b_s，则积的首项系数为 $a_n \cdot b_s$。

推论 非零多项式积的首项系数等于首项系数之积。

与数的运算相同，多项式的运算满足下面规律：

(1) 加法交换律 $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

(2) 加法结合律 $[f(x)+g(x)]+h(x)$
$=f(x)+[g(x)+h(x)]$；

(3) 乘法交换律 $f(x) \cdot g(x)=g(x) \cdot f(x)$；

(4) 乘法结合律 $[f(x) \cdot g(x)] h(x)$
$=f(x)[g(x) \cdot h(x)]$；

(5) 数乘法则 $(k+l) f(x)=k f(x)+l f(x)$，
$(k l) f(x)=k[l f(x)]$，
$k[f(x)+g(x)]=k f(x)+k g(x)$，
$k[f(x) \cdot g(x)]=[k f(x)] \cdot g(x)$
$=f(x) \cdot[k g(x)]$；

(6) 乘法对于加法的分配律 $f(x)[g(x)+h(x)]$
$=f(x) g(x)+f(x) h(x)$；

(7) 乘法消去律 若 $f(x) g(x)=f(x) h(x)$，且 $f(x) \neq 0$，则

$$g(x)=h(x)。$$

(1)、(2)、(3)、(5)和(6)的证明可由数的运算满足相应规律立即推出。

我们证(4)和(7)于下：

(4) 的证明 设 $f(x)=(a_0,a_1,\cdots)$,

$g(x)=(b_0,b_1,\cdots),h(x)=(c_0,c_1,\cdots)$。

$f(x)[g(x)h(x)]$ 的 t 次项系数 $=\sum\limits_{i+l=t}a_i(\sum\limits_{j+k=l}b_jc_k)=\sum\limits_{i+j+k=t}a_i(b_jc_k)=\sum\limits_{i+j+k=t}(a_ib_j)c_k=\sum\limits_{u+k=t}(\sum\limits_{i+j=u}a_ib_j)c_k=[f(x)\cdot g(x)]h(x)$ 的 t 次项系数。

故 $f(x)[g(x)h(x)]=[(f(x)g(x)]h(x)$。

(7) 的证明 由 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 得

$$f(x)[g(x)-h(x)]=0。$$

若 $g(x)\neq h(x)$,即 $g(x)-h(x)\neq 0$,由命题 1.2

$$\deg f(x)+\deg[g(x)-h(x)]=\deg 0=-\infty,$$

但上式左边是两个整数之和,不等于 $-\infty$,故必 $g(x)=h(x)$。

四、特殊多项式与多项式的传统表示

零多项式在多项式的运算中起着数零在数的运算中的作用:

$$0+f(x)=f(x),$$
$$0\cdot f(x)=0。$$

我们发现,若 $1\in R$,另有两个多项式在运算中起着特殊的作用:第一个是 $(1,0,0,\cdots)$,称为单位多项式,记成 **1**,它在多项式的运算中起着数 1 在数的运算中的类似作用:

$$\mathbf{1}\cdot f(x)=f(x)。$$

第二个是 $(0,1,0,0\cdots)$,记它为 x,对 n 用归纳法,可证得:

$$x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{n个}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n个},1,0,0\cdots)。$$

利用单位多项式 **1** 与特殊多项式 x 可表多项式 $(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,\cdots)$ 为

$$(a_0,0,\cdots)+(0,a_1,0,\cdots)+\cdots+(0,\cdots,0,a_n,0\cdots)$$