

002564 TN402-013  
1  
高等学校教材

# 结 构 分 析

朱钟淦 编

西北电讯工程学院出版社

1986

## 内 容 简 介

本书以能量原理的观点贯穿全书,把经典方法与矩阵方法结合起来。内容有结构组成分析、能量原理、杆件系统分析的经典方法、结构分析矩阵方法、结构动力学的基本分析方法、结构稳定性分析。并有可供学习计算机辅助分析入门的基本内容。为了便于学习,还编有弹性理论基本方法。

本书是一本简明教材,还可供结构分析课程少学时的专业使用,也可供从事电子机械方面的工程技术人员参考。

高等学校教材

## 结 构 分 析

朱钟淦 编

---

西北电讯工程学院出版社出版

七二二六印刷厂排版

西北电讯工程学院印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张 13 8/16 字数 323 千字

1986年6月第一版 1986年6月第一次印刷 印数 1—3,500

---

统一书号: 15322·43

定价: 2.25元

## 出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二~一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

## 前 言

本书系高等学校工科电子类电子设备结构专业统编教材之一。它是该专业的一本技术基础课试用教材。

本书以能量原理的观点贯穿全书，把经典方法与矩阵方法结合起来。重点介绍杆件系统分析的基本概念，基本方法。对当代广泛应用的计算机辅助分析方法作了入门的介绍。

本书以简明、扼要为编写宗旨，内容有结构组成分析、能量原理、杆件系统的经典分析方法、结构分析矩阵方法、结构动力学的基本分析方法、结构稳定性分析。对理论力学、材料力学中已经介绍过的，没有必要重复的内容，一概不予编入。所选习题为读者学习时必须做的。本书以 60 学时左右，或 3 学分为讲授要求。

本书提供的两个学习入门的计算程序是由成都电讯工程学院卢延诗同志编写的。

由上海科技大学汪勤恣副教授对全书进行了认真的审阅，对书稿提出了许多宝贵的意见。另外在编写过程中得到其他许多同志的指导和帮助，对此编者一并表示深切的谢意。

由于编者工作较忙，水平有限，所以书中缺点和错误在所难免，恳切希望读者给予批评和指正。

编 者

# 目 录

## 引 言

### 第一章 结构组成分析

|                     |       |
|---------------------|-------|
| § 1-1 基本概念 .....    | ( 5 ) |
| § 1-2 系统的组成分析 ..... | ( 7 ) |
| 习题 .....            | (14)  |

### 第二章 能量原理

|                           |      |
|---------------------------|------|
| § 2-1 广义力和广义位移 .....      | (16) |
| § 2-2 功和余功 .....          | (17) |
| § 2-3 应变能和余应变能 .....      | (21) |
| § 2-4 虚功原理 .....          | (22) |
| § 2-5 余虚功原理 .....         | (23) |
| § 2-6 单位载荷定理和单位位移定理 ..... | (23) |
| § 2-7 互等定理 .....          | (24) |
| 习题 .....                  | (28) |

### 第三章 杆件系统分析的经典方法

|                                 |      |
|---------------------------------|------|
| § 3-1 静定系统的性质 .....             | (29) |
| § 3-2 静定系统的内力分析 .....           | (33) |
| § 3-3 静定系统的弹性位移计算 .....         | (42) |
| § 3-4 超静定系统的性质 .....            | (49) |
| § 3-5 超静定系统的内力分析方法之一——力法 .....  | (51) |
| § 3-6 超静定系统的内力分析方法之二——位移法 ..... | (57) |
| § 3-7 超静定系统的弹性位移计算 .....        | (67) |
| § 3-8 对称系统的简化计算方法 .....         | (69) |
| 习题 .....                        | (71) |

### 第四章 结构分析矩阵方法

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| § 4-1 概述 .....                  | (80)  |
| § 4-2 杆件系统中节点位移、节点力的矩阵表示法 ..... | (82)  |
| § 4-3 位移函数 .....                | (85)  |
| § 4-4 最小总位能原理 .....             | (86)  |
| § 4-5 杆单元刚度矩阵 .....             | (86)  |
| § 4-6 坐标变换 .....                | (90)  |
| § 4-7 杆件结构的整体刚度矩阵 .....         | (98)  |
| § 4-8 杆件结构的柔度矩阵 .....           | (105) |
| § 4-9 杆件结构的分析方法 .....           | (108) |

|                         |                |       |
|-------------------------|----------------|-------|
| § 4-10                  | 矩阵位移法          | (109) |
| § 4-11                  | 空间桁架结构分析程序     | (116) |
| § 4-12                  | 计算机辅助分析的一些问题   | (122) |
| § 4-13                  | 梁单元刚度矩阵与柔度矩阵   | (133) |
| § 4-14                  | 平面问题的三角形单元     | (150) |
| § 4-15                  | 实际结构分析中的一些问题   | (162) |
|                         | 习题             | (167) |
| <b>第五章 结构动力学的基本分析方法</b> |                |       |
| § 5-1                   | 自由度与集中质量       | (169) |
| § 5-2                   | 结构动力分析的基本方法    | (170) |
| § 5-3                   | 任意扰动力          | (175) |
| § 5-4                   | 多自由度系统的无阻尼自由振动 | (177) |
| § 5-5                   | 多自由度系统的无阻尼强迫振动 | (180) |
| § 5-6                   | 结构阻尼           | (182) |
|                         | 习题             | (183) |
| <b>第六章 结构稳定性分析</b>      |                |       |
| § 6-1                   | 应用能量定理确定临界载荷   | (185) |
| § 6-2                   | 剪力对临界载荷的影响     | (188) |
| § 6-3                   | 弹性杆件系统的稳定性分析简介 | (189) |
|                         | 习题             | (196) |
| <b>附录 弹性理论的基本方程</b>     |                |       |

# 引 言

## 一、结构分析的任务

在工程范畴内，凡由工程材料按照合理方式组成，并能承担预定任务的物体或体系都可称为结构。通常从力学观点所说的结构，是用来承受外载荷的物体或体系。例如，天线反射体主力骨架，方舱结构，电子设备的机壳、机架等。

结构分析是研究工程结构的组成方法及其强度、刚度、稳定性计算原理的科学。计算强度与稳定性的目的在于保证结构具有足够的，但又不是过分的安全度，也就是绝对安全与最大经济相结合。计算刚度的目的在于保证结构不致于发生过大变形，因为，过大的变形即使对结构本身还无多大的危险，可是从电子机械的要求来看，是不允许的，例如，天线反射面过大的变形，直接影响了天线的增益。

本书将要讨论下述一些问题：

1. 结构的组成方法及其性质；
2. 在已知外载荷作用下，结构各元件的内力求法；
3. 结构变形计算；
4. 结构动力分析；
5. 结构稳定性分析。

## 二、结构计算简图的概念与分类

一般，实际结构的受力系统是相当复杂的，想要严格地按照结构所有部分相互作用的实际情况，进行很精确的分析，几乎是不可能的。如果对没有简化的实际结构进行分析，则其艰巨性与计算的复杂程度，已丧失了工程实用的价值。任何一个实际工程结构，其所有组成部分，并非都是均等地起作用的，总有一些是起主要的作用，另外一些是起次要的作用。因而，在进行分析时要能抓住结构中起主要作用的部分，构成实际结构简化的形象，这就是通常所说的结构计算简图。由于结构计算简图能体现原来结构的主要性能，是按工程要求来确定的，所以分析时用它来代替原来的结构。这种计算简图也称为结构计算的力学模型。对于同一结构，由于采用了不同的简化，可能得到不同的计算简图，显然计算结果的精确度也就不同。因此，结构计算简图的选择是很重要的。

选择结构计算简图必须遵循两个基本要求：

1. 比较正确地反映出实际结构的工作情况，根据它计算的结果，能够保证可靠与精确；
2. 能简化计算过程。

例如，天线结构是由许多元件（杆件或杆件和板壳）所组成的一种结构。天线反射体的网状反射面板，从天线电性能来说，是必须的，但从受力情况看，它只能将本身结构的自重和受到的风、雪等载荷传递给主力骨架，而对结构总的受力情况很少起作用。因此，只需对

主力骨架进行分析。

现用实例说明。图 0-1(a) 所示的杆件焊接制成的辐射梁,在设计分析时,通常采用图 0-1(b) 所示的计算简图。各杆件相互焊接的地方都简化为理想的铰接,即假定所有杆件只受轴向力的作用,把实际结构简化为桁架结构。其所以能采用这样的计算简图,是因为能满足上述两个要求,一方面所得的结果具有足够的精确度,另一方面又使计算简化了。如果将各杆件端部互相连接处看成是刚性的,这样简化虽然与实际情况要接近一些,但计算工作比较复杂,因此要有综合的考虑。

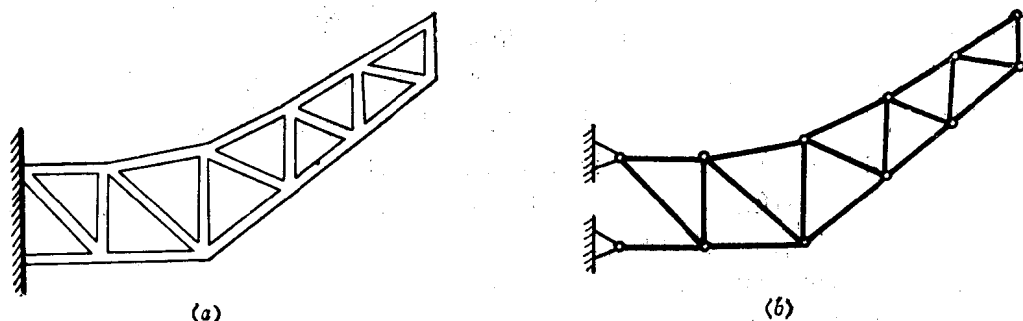


图 0-1

本书讨论的内容,只涉及结构计算简图的基本力学性质。

通常可以从不同角度进行结构计算简图的分类:

1. 按照结构元件的几何特征,结构可以分为杆件结构、薄壁结构、实体结构三种类型。

(1) 杆件结构:所谓杆件就是一个尺度(长度)大大超过其他两个尺度的物体。由杆件所组成的结构称为杆件结构。

(2) 薄壁结构:所谓薄壁元件就是一个尺度(厚度)远小于其他两个尺度的物体。由杆件和薄壁元件组成的,或只有薄壁元件的结构,称为薄壁结构。

(3) 实体结构:三个方向的尺度大约为同一数量级的结构。

2. 按照结构整体的几何特性,结构可以分为平面结构与空间结构两类。

(1) 平面结构:组成结构的元件的轴线均位于同一平面内,且外载荷也作用于此同一平面内。

(2) 空间结构:组成结构的元件不位于同一平面内,或者外载荷不作用于结构所在平面内。

3. 按照各杆件相互连接的特性,结构又可分为铰接结构、刚接结构、混合结构。在杆件结构中,两个或多个杆件共同连接处称为节点。节点的位置是由所有连接杆件几何轴线的交点确定的。

(1) 铰接结构:组成结构的各杆件,都只在两端按铰链连接起来,即节点处是铰链,如图0-2(a)所示。并假设铰链是没有摩擦的、理想的光滑铰链。各杆件的轴线通过其铰链中心点,中心点称为铰接节点。

(2) 刚接结构:组成结构的各杆件,其两端按刚性接头连接起来,如图0-2(b)所示。所谓



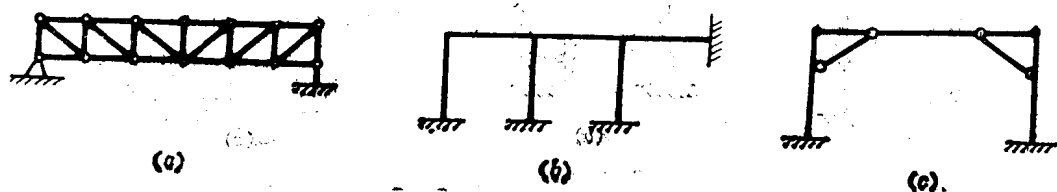


图 0-2

刚性接头，即能保证连接的元件间不产生相对转动的接头。也就是说，刚性接头能抵抗元件轴线之间夹角的改变。刚性接头的中心点，称为刚性节点。

一般工程实际结构的节点，具有较小的刚性，我们就将它简化为铰接结构。反之，简化为刚接结构。

(3) 混合结构：组成结构的各杆件，如它们端部连接，有的按刚性接头，有的按铰链连接，则此种结构称为混合结构，如图 0-2(c) 所示。

4. 按照经典的分析方法，结构可分为静定结构和超静定结构。

(1) 静定结构：如结构的所有反力及组成结构元件的内力均可由静力平衡方程式求得，则此种结构称为静定结构。

(2) 超静定结构：如结构的所有反力及组成结构元件的内力，不能仅仅由静力平衡方程式求得，还必须考虑结构变形条件才能够求得，则此种结构称为超静定结构。

结构计算简图中各元件的内力和变形的确定方法虽然各不相同，但它们分析的基础是相同的。这个基础主要是下列三条原则：

1. 结构上的作用力必须满足平衡条件；
2. 必须满足结构材料的应力和应变的关系；
3. 必须满足变形一致（连续）条件。

### 三、结构支座分类

一般，我们所讨论的结构总是由地面或其他结构物支承的。例如，方舱结构由地面支承着，抛物面天线主力骨架由天线座或旋转车箱支承着，或者支承在塔架上。为有效地支承某结构，必须使用某些装置，以保证该结构与支承之间无相对的移动和转动。这种用来阻止某结构相对于支承的几种或全部移动或转动可能性的装置，称为支座。常见的支座，其理想化的模型有下列四种：

#### 1. 可动铰链支座

仅能阻止和某结构相连接的节点处在支座面垂直方向上的位移。这种支座相当于一根支杆。其计算简图如图 0-3(a) 所示。

#### 2. 平面固定铰链支座

能阻止和某结构相连接的节点处在该铰链节点平面内任何方向的线位移。这种支座相当于该平面内两根支杆。其计算简图如图 0-3(b) 所示。

#### 3. 空间固定铰链支座

能阻止和某结构相连接的节点处任何方向的线位移。这种支座相当于不在同一平面内的

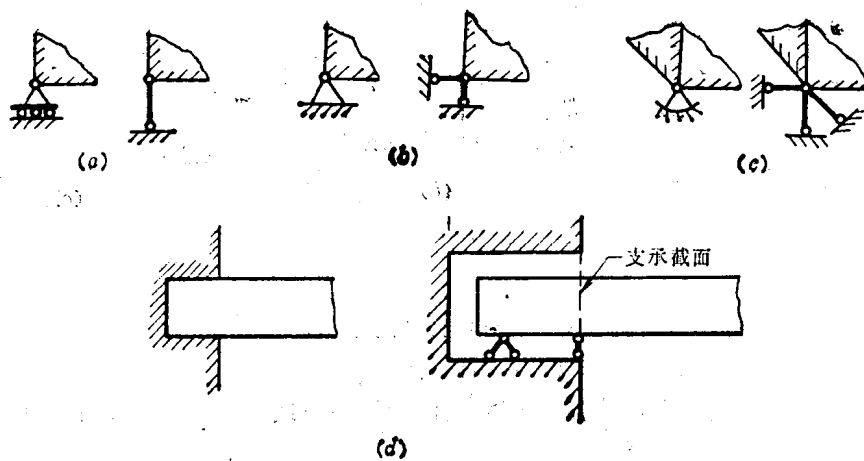


图 0-3

三根支杆。其计算简图如图 0-3(c) 所示。

#### 4. 固定支座

能阻止和某结构相连接的节点处任何方向的线位移和角位移。其计算简图如图 0-3(a) 所示。

# 第一章 结构组成分析

## § 1-1 基本概念

电子机械中结构是用来完成一定的功能,并能承受外载荷的装置。它必须是牢固的,并能保持它的几何形状和位置不变。我们把维持结构几何形状和位置不变的性质,称为系统的“几何不变性”。

在外载荷作用下,结构元件发生的弹性变形一般是很小的,结构组成分析时,可不予以考虑。

如果在外载荷作用下,结构元件没有弹性变形,而发生了系统几何形状的改变,则这种系统是几何可变的。一个几何可变系统是不可能承受任意形式的外载荷的。如图 1-1(a)所示的系统,在外力作用下,就不能维持系统的几何形状,其组成元件要产生刚体运动。若给此几何可变系统增加一根杆件(见图 1-1(b)),则系统便能维持其本身的几何形状和位置,它就成为几何不变的了。因此,任何结构在计算之前,必须分析其是否是几何不变的,否则计算便失去了意义。

若系统是几何可变的,则其全部或某一部分便具有某种位移的自由。我们可应用理论力学中自由度和约束的概念,来分析系统组成的关系。平面内一点  $A$ ,其位置由  $A$  改变至  $A'$ (见图 1-2(a)),可视为沿水平方向( $x$ 轴方向)的移动,又沿竖直方向( $y$ 轴方向)的移动。这就是说,平面内一点有两种独立的运动方式,或者说有两个独立的坐标可以改变。决定点的位置所需的独立几何参数的个数,称为自由度数。换句话说,一个点的自由度数,等于它独立运动方式的个数。所以,平面上的一个点有两个自由度。

我们把平面内几何形状不变的平面体,简称为刚片;把空间内几何形状不变的物体,简称为刚体。

同样道理,平面内一个刚片,由原来的位置  $AB$ ,改变到后来的位置  $A'B'$ (见图 1-2(b)),这个刚片有  $x$ 轴方向的移动( $\Delta x$ ),也有  $y$ 轴方向的移动( $\Delta y$ ),还可以在平

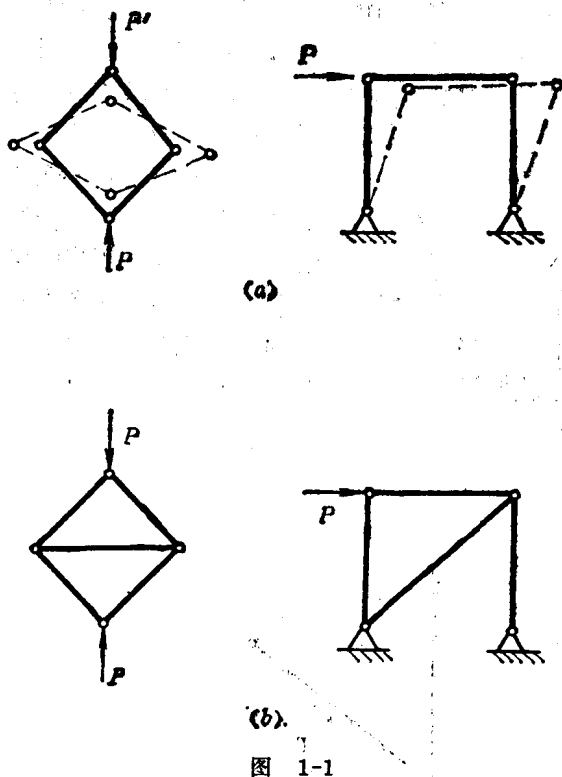


图 1-1

面内转动 ( $\Delta\theta$ )。因此,平面内的一个刚片有三个独立的运动方式,即可以在三个独立的坐标  $x$ 、 $y$ 、 $\theta$  中改变。所以,我们说平面内一个刚片具有三个自由度。

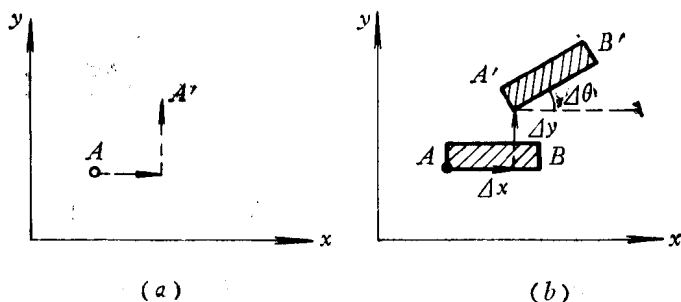


图 1-2

在空间内,一个点有三个独立的运动方式,即可在三个独立的坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  中改变。所以,我们说空间一个点有三个自由度。

在空间内,一个刚体有六个独立的运动方式,即可在六个独立的坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、 $\theta_z$  中改变。所以,我们说空间内一个刚体有六个自由度。

一般说来,如果一个系统有  $n$  个独立运动方式,那么这个系统就有  $n$  个自由度。

在运动机构中,至少有一个自由度,即至少有一种运动方式。凡是自由度数大于零的系统,都是几何可变的。工程结构应是几何不变的,所以它的自由度数为零,或者是负的。

使系统减少一个自由度的装置,称为一个约束。例如,平面内一个点有两个自由度,如将这个点用两端具有铰链的杆件连接到固定的坐标原点上(见图 1-3),则此点就失去一个自由度,因为该点的位置只需要有一个角度  $\theta$  就能够完全确定了。所以一根两端具有铰链的杆件相当于一个约束。进一步观察,如果使这一点完全失去自由度,则还需要有一根杆件与它连接。

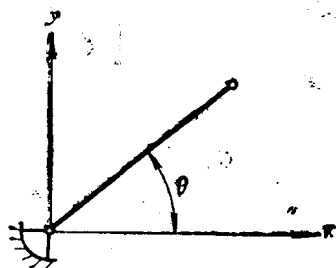
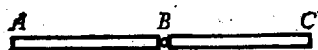
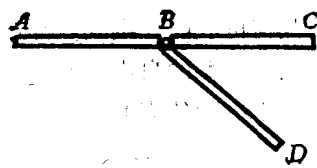


图 1-3



(a)



(b)

图 1-4

又如图 1-4(a)所示的两个杆件  $AB$  和  $BC$  用一个铰链  $B$  连接在一起后,原来两个在平面内共有六个自由度的孤立的杆件,现在的自由度数便减为四个。因为我们可以用三个独立的坐标先确定杆件  $AB$  的位置,这时杆件  $BC$  只能绕  $B$  点作转动,即只需要一个转角就可以确定杆件  $BC$  的位置了。由此可见,一个连接两个物体的铰链,使自由度数减少两个,也就是一个铰链相当于两个约束。这种铰链称为简单铰链。同理,连接三个杆件的铰链(见图 1-4(b)),使系统减少了四个自由度,相当于四个约束,因而可以把它看作两个简单铰链。

一般说来,一个杆件相当于一个刚片,连接 $n$ 个刚片的铰链可以当作 $n-1$ 个简单铰链。

显而易见,在空间,连接杆件的球形铰链,相当于三个约束。

## § 1-2 系统的组成分析

我们从图 1-1 可以看到,系统的几何不变性可应用自由度和约束的概念进行分析。无论是平面系统,还是空间系统,只要有足够数目的约束,系统就没有多余的自由度数,也就有可能维持本身的几何形状和位置,即具有几何不变性。

若系统由两端铰链连接的杆件组成,就可以把系统中的节点看作是具有自由度的。设以 $j$ 表示节点数, $b$ 表示杆件数, $r$ 表示支杆数,则这种平面铰接系统的自由度 $W$ 为

$$W = 2j - b - r \quad (1-1)$$

必须注意,节点数 $j$ 包括所有连接杆件端部的铰链在内,但支杆与基础连接的铰链则不计入。

当系统不与基础相连接,即支杆不存在时,可以把系统的自由度分为两部分:(1)系统作为一个整体在平面内运动的自由度,其数值等于3;(2)系统内各部分之间相对运动的自由度,简称为内部可变量,用 $V$ 表示。将 $r=0$ 和 $W=V+3$ 代入(1-1)式,则得杆件系统的内部可变量为

$$V = 2j - b - 3 \quad (1-2)$$

空间铰接系统自由度的计算公式为

$$W = 3j - b - r \quad (1-3)$$

当系统不与基础相连接时, $r=0$ 。以 $V$ 表示系统内部可变量,则 $W=V+6$ ,所以

$$V = 3j - b - 6 \quad (1-4)$$

若把杆件视作刚片,则系统由刚片组成。设 $m$ 表示刚片数, $h$ 表示简单铰链数, $r$ 表示支杆数,则这种平面系统的自由度为

$$W = 3m - 2h - r \quad (1-5a)$$

必须注意,简单铰链数 $h$ 只包括刚片与刚片之间互相连接的铰链,而不包括刚片与支杆相连接的铰链。

如果刚片与刚片之间用杆件连接,在计算时同样不包括刚片与杆件相连接的铰链。仍以 $b$ 表示杆件数,这种平面系统的自由度为

$$W = 3m - b - r \quad (1-5b)$$

当系统不与基础相连接时, $r=0$ 。以 $V$ 表示系统内部可变量,则 $W=V+3$ ,所以

$$V = 3m - 2h - 3 \quad (1-6a)$$

同样地,用杆件连接的系统,内部可变量为

$$V = 3m - b - 3 \quad (1-6b)$$

这里必须指出: $W \leq 0$ 是系统具有几何不变的必要条件,但不是充分条件。同样, $V \leq 0$

是系统内部几何不变的必要条件，而不是充分条件。如果约束布置得不合适，即使  $V \leq 0$ ，系统还可能是几何可变的。如图 1-5 所示的平面杆件铰接系统， $j=6$ ， $b=9$ ，系统不与基础相连接，满足  $V=0$  的条件，但因该系统杆件布置得不合适，成了一种几何可变系统。这是属于内部几何可变的系统。

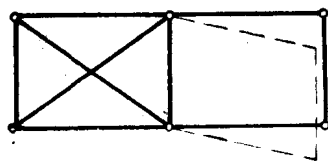


图 1-5

又如，平面内一点  $C$ ，用两根杆件作约束，连接到基础上。若这两根杆件在同一直线上（见图 1-6(a)），虽然点  $C$  满足  $W=0$  的条件，但它能在垂直于  $ACB$  的方向上有微小的位移。因为点  $C$  能绕  $A$  点作圆周运动，此时两圆周在  $C$  点相切， $C$  点就可能在两圆弧的公切线方向上移动。但只要发生微小移动后，两杆件就不再在同一直线上，成为几何不变的了。我们把这种系统称为瞬时可变系统。

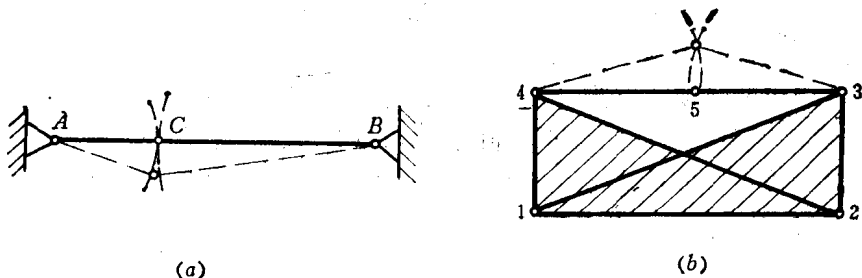


图 1-6

图 1-6(b) 所示的系统也是一个瞬时可变系统。如果杆件 3-5 与杆件 4-5 不在同一直线上，如在图中虚线表示的位置，则这样的系统是几何不变的。因为两个圆弧没有公共切线，节点 5 不可能同时在两个圆弧上移动。

由此可以归纳系统具有几何不变性的几条几何规律。这些规律是结构组成分析的基础。

1. 在组成平面铰接杆件系统的过程中，每次从两个定点出发，用不在同一直线上的两根杆件来组成新的节点，这样组成的系统是几何不变的。这种方法称为逐次连接节点法。铰接三角形是最基本的几何不变平面系统。

若平面铰接系统，由铰接三角形开始，每加两根不在同一直线上的杆件就得到一个新的节点，如此组成的系统是几何不变的。如图 1-7 所示的铰接系统就是这样组成的。图 1-8 所示的平面系统，也是由铰接三角形开始，每加一个新的节点也是用不在同一直线上的两根杆件连接的。但节点 13 却连接得不正确，因为它所连接的两根杆件 10-13 及 11-13 在同一直线上。如果每加一个新的节点用三根杆件或三根以上杆件去连接，那就具有多余约束了。

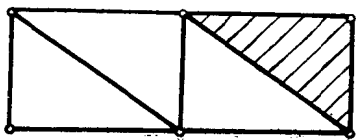


图 1-7

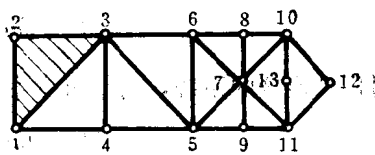


图 1-8

若空间铰接系统，由平面铰接三角形开始，每加一个新的节点用三根不在同一平面内的杆件相连接，这样组成的空间铰接系统是几何不变的。图 1-9 所示的系统就是这样组成的。又如图 1-10 所示的空间铰接系统，也是以铰接三角形 1-2-3 作为起始系统，以后按节点号码顺序组成。但图中节点 9 就连接得不正确，因为三根杆件在同一平面内。

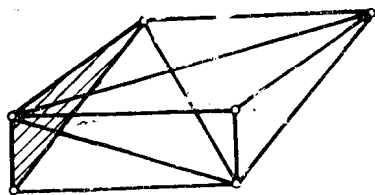


图 1-9

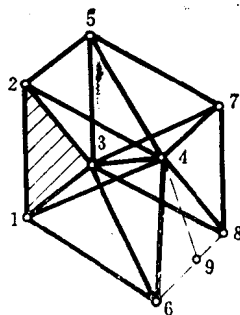


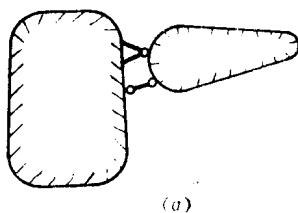
图 1-10

2. 同一平面内的两个刚片，用一个铰链和一根轴线不通过铰链中心的杆件相连接，或用不完全平行，也不同交于一点的三根杆件连接，这样组成的系统是几何不变的。

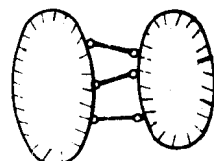
这里，我们把具有几何不变性的平面系统或空间系统也认为是刚片或刚体。

图 1-11 所示平面内两个刚片的连接是正确的，所组成的系统是几何不变的。

现在分析满足几何不变的必要条件的三个系统，如图 1-12 所示。

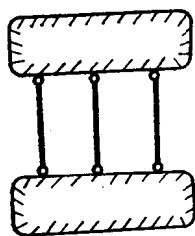


(a)

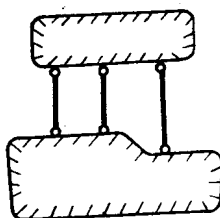


(b)

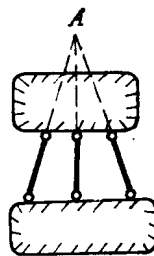
图 1-11



(a)



(b)



(c)

图 1-12

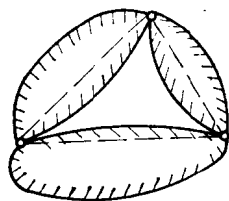
若平面内两个刚片是用三根长度相等且互相平行的杆件连接而成的一个系统，则一个刚片相对于另一个刚片有微小的相对水平位移后，三根杆件仍然平行，并且能继续发生相对的刚体移动。因而，这个系统是几何可变的，如图 1-12(a) 所示。

若平面内两个刚片是用三根互相平行但长度不相等的杆件连接而成的一个系统，当两个刚片有微小的相对水平位移后，三根杆件即不平行，则系统变为几何不变的。正如前述，此系统应是瞬时可变的，如图 1-12(b) 所示。

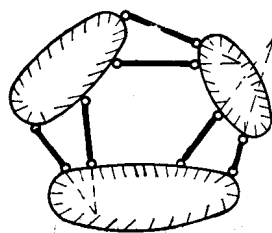
若平面内两个刚片是用三根相交于一点的杆件连接而成的一个系统，这样可使刚片绕其交点  $A$ （即瞬心）有微小转动，但转动发生后，一般说来三根杆件将不再交于一点，系统成为几何不变的了。因而这个系统应是瞬时可变的。如图 1-12(c) 所示。

图 1-12 所示的系统都满足自由度计算公式，即满足几何不变性需要具有的必要条件，然而由于连接杆件布置得不合理，系统可能是几何可变的，或者是瞬时可变的。所以上述三种情形，是用来判断平面内刚片相互连接是否正确，是否具有几何不变性的条件。

3. 同一平面内的三个刚片，用不在一直线上的三个铰链相连接，如图 1-13(a) 所示，则所组成的系统是几何不变的，因为三个铰链间的连线形成的三角形是最基本的几何不变系统。



(a)

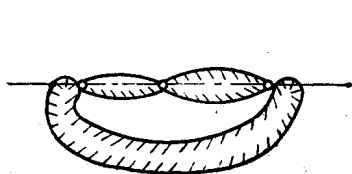


(b)

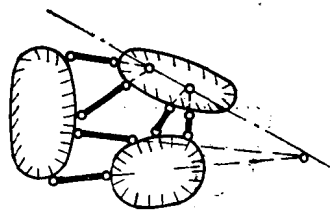
图 1-13

显然，三个刚片也可以采用在每两个刚片之间用两根不平行杆件相连接的方式组成，如图 1-13(b) 所示，因为连接两个刚片的两根杆件的交点相当于一个铰链，我们称为虚铰。只要六根杆件所形成的三个虚铰不在一条直线上，系统仍是几何不变的。

若三个刚片，相互以在同一直线上的三个铰链所连接，则系统是瞬时可变的，如图 1-14(a) 所示。事实上，它与图 1-6 的情形相似。



(a)



(b)

图 1-14

图 1-14(b) 所示的系统也是瞬时可变系统，因为六根连接的杆件所形成的三个虚铰在一条直线上。

4. 空间内两个刚体用不相交于同一轴（无论这轴是在有限远处或无限远处）的六根杆件相连，所组成的系统是几何不变的。

反之，若六根杆件相交于一根轴，则系统是几何可变的，或者是瞬时可变的。此轴称为瞬时转动轴。



如果空间内与两个刚体相连接的六根杆件形式上不相交于一轴，也不能说明系统是几何不变的。当六根杆件布置得不适当，系统还可能是几何可变的，或者是瞬时可变的。我们以空间一个刚体固定于基础来说明此问题。图 1-15(a)所示的是布置适当的六根支杆，完全把刚体固定了。假如六根支杆的布置如图 1-15(b)所示，显然刚体可绕直线  $AB$  有微小的转动。

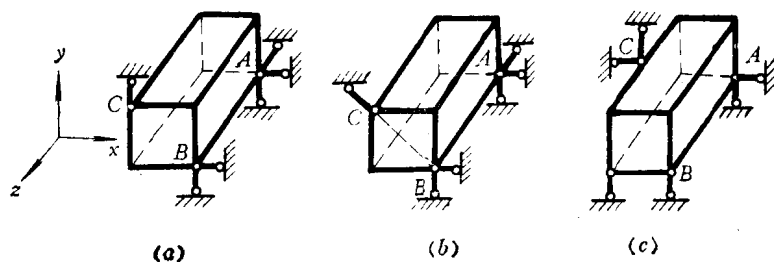


图 1-15

又如图 1-15(c)中六根支杆都在直线  $AB$  的垂直平面内，则刚体可沿直线  $AB$  有微小的移动，此时也可认为六根支杆交于一直线，即交于三对支杆所在的三个互相平行平面的交线上，而此交线是在无穷远处。这样看来，在图 1-15(b)、(c)中刚体都有一根转动轴，即六根支杆的交线，所以刚体没有完全固定于基础。总之，当六根支杆相交于同一直线时，刚体的支承是几何可变的。

必须注意，六根支杆不相交于同一直线，是使刚体固定于基础的必要条件而不是充分条件。换句话说，当六根支杆不相交于同一直线，刚体未必已经固定于基础，在某些情况下，仍然有可能发生位移。这是因为刚体的微小位移可以是一个线位移或一个角位移，而不是单纯的角位移。为了实用上方便，下面指出使刚体六根支杆支承是几何不变的充分条件。

#### (1) 三根支杆交于一点的情况

若有三根支杆不在同一平面内，并交于一点，则该点是固定的，若此时六根支杆又不交于同一直线，则刚体的支承是几何不变的。

#### (2) 三根支杆在同一平面内的情况

若六根支杆中有三根在同一平面内但不交于一点，且此六根支杆不交于同一直线，则刚体的支承是几何不变的。

#### (3) 一般情形

为了确定六根支杆是否已将刚体完全固定于基础，还可以应用空间力系的六个静力平衡方程计算六根支杆的反力。若六根支杆的反力能唯一确定，则支承是几何不变的，反之是几何可变的。

同样道理，空间内两个刚体用六根杆件相连接成的系统，其几何不变的充分条件，也应是上述三种情形。

下面讨论瞬时可变系统的特征。

从理论上分析，瞬时可变系统只有无穷小的活动性，但实际上加载以后，将会有很大的位移，并且其内力可能是很大的，或者是不定值。现用图 1-16 的系统来证明这一点。设系