L. 倍尔斯 著

准解析函数论

科学出版社

准解析函数论

L. 倍尔斯 著

聞国椿 譯

科学出版社

1964

L. BERS

THEORY OF PSEUDO-ANALYTIC FUNCTIONS

New York University

1953

內容簡介

准解析函数論是复变函数論中一个較新的重要分支，它和偏微分方程、連續介质力学中的許多問題有着密切的联系.

本书是准解析函数論方面的一本基本著作，主要闡述平面上一阶橢圓型偏微分方程組解的函数論性質. 全书共分六章. 著者以开創性的方法先后論証了相应于解析函数的微商、积分、級数、逼近理論、多值函数等方面的結果，并且介紹了准解析函数与拟保角变换的关系及黎曼曲面上的准解析性. 书末，譯者还搜集了有关准解析函数論方面新近的文献.

本书的讀者对象是高等学校数学力学系高年級学生、教师及有关函数論、偏微分方程等方面的科学工作者，特别可作为高等学校数学专业函数論、微分方程专門化的参考书.

准解析函数論

L. 倍尔斯 著

聞国椿 譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1964 年 7 月第一版 书号：2975 字数：129,000

1964 年 7 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

(京) 0001—6,500 印张：5

定价：[科六] 0.80 元

譯者序

准解析函数論是近十多年来才蓬勃发展起来的复变函数論的一个重要分支．它是解析函数論的推广，而与偏微分方程、弹性力学、液体及气体力学有着不可分割的联系．L. 倍尔斯早期发表的論文就是結合連續介質力学問題来討論較簡单偏微分方程組解的函数論性質的．原书的出版标志着准解析函数論发展到了新的阶段；此后倍尔斯的工作不仅在方法与結果上丰富了本书的內容，而且着重于进一步研究拟保角变換及黎曼曲面上准解析函数的性質；他还将准解析函数理論用来处理空气动力学問題，这可参看他的"亚音速与跨音速气体动力学的数学面貌"一书．И. Н. 維庫阿及其学生們在发展准解析函数理論、尤其是关于边値問題方面作出了重大的貢献，并把这种理論用于弹性薄壳研究中．我国数学工作者近几年才开始准解析函数論的研究，并取得了一些成果．

本书是准解析函数論方面的基本文献之一，可惜国內原版极少．譯者于 1961 年間在北京大学复变函数討論班上对本书內容作过系統的报告，深感有必要翻譯出版，供有兴趣于准解析函数論的讀者参閱．閱讀本书只要具备复变函数論、偏微分方程等課程的基础知識即可．

为了使讀者便于了解准解析函数論新近发展的情况，譯者在附录四中收集了关于这方面的补充文献，尤其較詳細地列举了我国数学工作者有关的工作．在这些补充文献中，主要的有 L. 倍尔斯的[7]，[8]，[11]，[9]，[13]，L. 倍尔斯和 L. 阿尔福斯的 [2]，И. Н. 維庫阿的[62]，[63]，Л. И. 伏尔柯維斯基的[68]、H. P. 肯茨的[32]等．

在翻譯本书时，曾得到庄圻泰、閔嗣鶴两位教授的指教，譯者謹表感謝．限于譯者的水平，譯文恐有不妥之处，請讀者指正．

聞国椿　　1963 年 9 月于北京

著 者 序

本书是以 1951 年春季我在紐約大学数学力学研究所开設的一个課程为基础的. 其中大部分是新的結果，其証明初次发表于此. 这些結果是我逗留在高等研究所期間获得的，而且已发表在 Proc. Nat. Acad. Sci.（1950 年 2 月，1951 年 1 月）. 在书中所要用到的一些标准預备材料，除了几个关于位勢理論的定理（第一章 § 3）、弗来德霍姆替換的李兹形式（附录一）、关于綫性椭圓型方程第一边値問題的解（附录二）以及某些其他項目外，就不包含在本书之中了. 参考文献尤其是其他作者有关的著作及准解析函数論新近发展的部分叙述，見附录三.

我感謝 P. 倍尔格对本书認眞与精細的校訂.

L. 倍尔斯

目　　录

第一章　准解析函数

§1. 生成元. 微分法

对于一个綫性偏微分方程

(1.1) $$A_{11}(x, y)\varphi_{xx} + 2A_{12}(x, y)\varphi_{xy} + A_{22}(x, y)\varphi_{yy} + \\ + A_1(x, y)\varphi_x + A_2(x, y)\varphi_y + A(x, y)\varphi = 0,$$

如果由自变数的一个变换，它能轉化成以下形式

(1.2) $$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + B_1(x, y)\varphi_x + B_2(x, y)\varphi_y + \\ + B(x, y) = 0,$$

则称方程 (1.1) 是**椭圓型**的. 最簡单的椭圓型方程是拉普拉斯方程

(1.3) $$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

这种方程的理論已高度地发展了. 这是由于方程 (1.3) 的解是解析函数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ 的实部. 在本书中，我們将給出解析函数論的一种推广，它与一般椭圓型方程的关系如同經典函数論与拉普拉斯方程的关系一样[1,2, 1)].

表示法. 我們使用复变数 $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $Z = X + iY$, $w = u + iv$ 等. 复共軛用短横画表示 ($\bar{z} = x - iy$, $\bar{w} = u - iv$ 等). x 与 y 的函数写作 z 的函数，而不包含着解析性. 偏微商由下标表示. 形式微分算子 $(\partial/\partial z)$, $(\partial/\partial \bar{z})$ 由关系式

(1.4) $$2w_z = w_x - iw_y,\ 2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y$$

定义. 微商 w_z, $w_{\bar{z}}$ "存在"必須且只須 w_x 与 w_y 存在. 注意，

(1.5) $$w_z = \frac{1}{2}\{(u_x + v_y) - i(u_y - v_x)\},$$

---

1) 数字上标指搜集于附录三中的注.

$$(1.6)\qquad w_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\{(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)\}.$$

这些算子关于和、积等运算正如通常的微商一样.

一个区域是一个連通的开集（在平面內），区域D的閉包由$\overline{D}$表示．而边界由D'表示．如果D是有界的而且D'由有限条逐段連續可微的簡单閉約当曲綫組成，則称D为正则的.

对于函数$w(z)$，又$K(K>0)$，$\alpha(0<\alpha<1)$是两个常数，如果$|w(z)-w(z_0)|\leqslant K|z-z_0|^{\alpha}$，則称它在$z_0$滿足具有常数$K$与指数$\alpha$的赫尔台条件．如果函数在集合$\Delta$的所有点滿足具有相同的$K$与$\alpha$的赫尔台条件，則称它在集$\Delta$上滿足一致赫尔台条件．如果在区域$D$內的函数在每一个区域$D_1$, $\overline{D}_1\subseteq D$滿足一致赫尔台条件，則称它在$D$內是赫尔台連續的.

由于(1.5)，(1.6)，函数論中一个基本的結果可叙述如下.

引理 1.1. 如果微商

$$(1.7)\qquad w'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0}$$

存在，則$w_z(z_0)$, $w_{\bar{z}}(z_0)$存在，而且

$$(1.8)\qquad w_{\bar{z}}(z_0)=0,$$

$$(1.9)\qquad w_z(z_0)=w'(z_0),$$

如果$w_z(z)$与$w_{\bar{z}}(z)$在z_0的邻域內存在与連續，而且(1.8)成立，則(1.9)存在.

在(1.7)中，$w(z_0)$是一复常数，卽$w(z_0)=\lambda\cdot 1+\mu\cdot i$，其中$\lambda$与$\mu$都是实常数．我們对函数論的推广是基于由两个本质上說来是任意的函数$F(z)$, $G(z)$来代替1与i．假定这些函数都定义在某一区域D_0內（以后所有区域D将都認为是有界的，其閉包$\overline{D}\subset D_0$）．我們要求在D_0內

$$(\text{条件 1})\qquad \operatorname{Im}\{F(z)G(z)\}>0.$$

可見对于D內每一个z_0，能够找到唯一的实常数对λ_0, μ_0，使得$w(z_0)=\lambda_0F(z_0)+\mu_0G(z_0)$．如果极限

$$(1.10)\qquad \dot{w}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-\lambda_0F(z)-\mu_0G(z)}{z-z_0}$$

存在而且有限，则称 $w(z)$ 在 z_0 具有(F, G)-微商 $\dot{w}(z_0)$. 为了能用微分方程来表示(1.10)的存在性，我們对 $F(z)$ 与 $G(z)$ 加上另外的条件

(条件 2) $F_z(z)$, $F_{\bar{z}}(z)$, $G_z(z)$, $G_{\bar{z}}(z)$ 存在而且赫尔台連續. 满足条件 1 与 2 的函数对称为在 D_0 內的**生成对**.

設（对一固定的 z_0）

$$W(z) = w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z), \tag{1.11}$$

其中实常数 λ_0 与 μ_0 由条件

$$W(z_0) = 0 \tag{1.12}$$

唯一决定. $W(z)$有偏微商(連續偏微商)必須且只須 $w(z)$有偏微商(連續偏微商)，$\dot{w}(z_0)$存在必須且只須 $W'(z_0)$存在；如果 $W'(z_0)$存在，那么 $\dot{w}(z_0) = W'(z_0)$. 因此(由引理 1.1)对于(1.10)的存在性来說，$W_z(z_0)$, $W_{\bar{z}}(z_0)$ 存在与方程

$$W_{\bar{z}}(z_0) = 0 \tag{1.13}$$

是必要条件，而 $W_z(z)$, $W_{\bar{z}}(z)$ 在 $|z - z_0| < r$ 内存在与連續及(1.13)却是充分条件. 因为

$$W(z) = \frac{\begin{vmatrix} w(z) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F(z) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}, \tag{1.14}$$

故(1.13)可写成形式

$$\begin{vmatrix} w_{\bar{z}}(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_{\bar{z}}(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_{\bar{z}}(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.15}$$

而且若(1.10)存在，則

$$(1.16)\qquad \dot{w}(z_0)=\frac{\begin{vmatrix} w_z(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_z(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_z(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}.$$

规定

$$(1.17)\qquad \begin{aligned} a&=-\frac{\overline{F}G_{\bar z}-F_{\bar z}\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G}, \qquad & b&=\frac{FG_{\bar z}-F_{\bar z}G}{F\overline{G}-\overline{F}G}, \\ A&=-\frac{\overline{F}G_{z}-F_{z}\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G}, \qquad & B&=\frac{FG_{z}-F_{z}G}{F\overline{G}-\overline{F}G}. \end{aligned}$$

我們称 $a(z)$, $b(z)$, $A(z)$, $B(z)$ 为生成对 (F,G) 的**特征系数**. 方程(1.15),(1.16)又可写成形式

$$(1.18)\qquad w_{\bar z}=aw+b\overline{w},$$

$$(1.19)\qquad \dot{w}=w_z-Aw-B\overline{w}.$$

于是我們証明了

定理 1.1. 如果 $\dot{w}(z_0)$ 存在,则在 z_0, w_z 与 $w_{\bar z}$ 存在而且方程(1.18), (1.19) 成立. 如果 w_z, $w_{\bar z}$ 在 z_0 的某一邻域內存在与連續,并且(1.18)在 z_0 成立,则 $\dot{w}(z_0)$ 存在,而且(1.19)成立.

注意, $F(z)$ 与 $G(z)$ 具有 (F,G)-微商, $\dot{F}\equiv\dot{G}\equiv 0$, 并且

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} F_{\bar z}&=aF+b\overline{F}, \quad & G_{\bar z}&=aG+b\overline{G}, \\ F_z&=AF+B\overline{F}, & G_z&=AG+B\overline{G}, \end{aligned}$$

这些方程唯一地确定 a, b, A, B.

注. 方程(1.18)等价于实方程組

$$(1.21)\qquad \begin{aligned} u_x-v_y&=\alpha_{11}u+\alpha_{12}v, \\ u_y+v_x&=\alpha_{21}u+\alpha_{22}v, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_{ij}(x,y)$ 是实的赫尔台連續函数. 这种形式的方程組已由希尔伯特与卡尔曼所研究. 我們将看到,在某种意义下,每一个椭圆型方程(1.1)等价于一形为(1.21)的方程組. 这对于带有 $B\equiv 0$ 的形为 (1.2) 的方程是特别明显的. 設 φ 是 (1.2) 的一个解, 又設

$u=\varphi_x$, $v=-\varphi_y$. 則 u, v 滿足带有 $a_{11}=-B_1$, $a_{12}=B_2$, $a_{21}==a_{22}=0$ 的方程組(1.21).

§2. 准解析函数

对于一个函数 $w(z)$,如果 $\dot{w}(z)$在区域D内处处存在,则称它是在 D 内的**第一类正规 (F, G)-准解析函数**(或在无混淆之虞时簡称为**准解析函数**).

定理 2.1. 生成元 $F(z)$, $G(z)$都是准解析的; $\dot{F}\equiv\dot{G}\equiv 0$. 如果 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 都是准解析的, 那么 $w_3(z)=a_1w_1(z)+a_2w_2(z)$ (a_1, a_2 都是实常数)也是准解析的,而且 $\dot{w}=a_1\dot{w}+a_2\dot{w}_2$.

証明显然.

定理 2.2. (i) 如果 $w_z(z)$, $w_{\bar{z}}(z)$ 存在与連續, 而且方程(1.18)成立,则 $w(z)$ 是准解析的. (ii) 如果 $w(z)$ 是准解析的,則 $w_z(z)$ 与 $w_{\bar{z}}(z)$ 存在而且赫尔台連續.

(i) 从定理1.1 卽得. (ii)的証明根据

定理 2.3. 設 $w(z)$ 是定义于有界区域D内的有界可測函数. 令

$$(2.1)\quad h(z)=w(z)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{a(\zeta)w(\zeta)+b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta.$$

(i) 如果 $h(z)$ 解析, 則 $w(z)$ 是准解析函数. (ii) 如果 $w(z)$ 是准解析的,則 $h(z)$ 是解析函数.

我們首先写出著名的

引理 2.1. 設 $\rho(z)$ 是定义在有界区域D内的有界可测函数. 令

$$(2.2)\qquad q(z)=\iint\limits_D\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta.$$

(i) 如果在D内, $|\rho(z)|\leqslant M$, 則对于一切 z, $|q(z)|\leqslant K_1M$, K_1 仅依赖于D的面积 A, 而且(ii)对于任意两点 z_1, z_2, 有

$$(2.3)\qquad |q(z_1)-q(z_2)|\leqslant K_2M\,|z_1-z_2|\left\{1+\log^+\frac{1}{|z_1-z_2|}\right\},$$

其中K_2仅依赖于D的直径 L (当 $a>0$, $\log^+a=\log a$; 当 $a\leqslant 1$,

$\log^+ a = 0$). (iii) 在 $\overline{D}$ 的余集的每一連通分支內，$q(z)$是正規解析的，而且

$$(2.4) \qquad q_{\bar{z}}(z) = 0, \quad q_z(z) = \iint\limits_D \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

(iv)如果 $\rho(z)$ 在D內一点 z_0 滿足赫尔台条件，則 $q_z(z_0)$ 与 $q_{\bar{z}}(z_0)$ 存在，而且

$$(2.5) \qquad q_z(z_0) = -\pi\rho(z_0),$$

$$(2.6) \qquad q_{\bar{z}}(z_0) = \iint\limits_\triangle \frac{\rho(\zeta) - \rho(z_0)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\xi\, d\eta + \\ + \iint\limits_{D-\triangle} \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\xi\, d\eta,$$

其中$\triangle$是包含 z_0 的任一圓域，而且包含在D內. (v) 如果 $\rho(z)$ 在D內是赫尔台連續的，則 $q_z(z)$, $q_{\bar{z}}(z)$ 也在D內赫尔台連續.

証明将在下一节中給出.

定理 2.3 (i)的証明. 假定$h(z)$解析，設$\rho(z) = a(z)\, w(z) + b(z)\, \overline{w(z)}$，我們有 $w(z) = h(z) - \dfrac{1}{\pi} q(z)$，这里$q(z)$由(2.2)定义. 由引理的第(ii)部分，得$q(z)$是赫尔台連續的(因为当 $\delta \to 0$, $\delta(\log 1/\delta)$ 趋于 0 要比 δ 的小于 1 的任意正冪趋于 0 更快)，而 $h(z)$ 也赫尔台連續，因此，$w(z)$ 赫尔台連續. 故 $\rho(z)$ 赫尔台連續，而由(iv)，$q_z(z)$, $q_{\bar{z}}(z)$ 存在，又由(v)，$q_z(z)$, $q_{\bar{z}}(z)$ 都是赫尔台連續的. 因为 $h_{\bar{z}}(z) = 0$，从(2.5)，可知 $w(z)$滿足(1.18). 于是由定理 2.2 (i)，$w(z)$ 是准解析函数.

定理 2.3 (ii) 的証明. 假定 $w(z)$ 是准解析的，取D內一点 z_0，又由(1.11)，(1.12)定义 $W(z)$. 設

$$(2.7) \qquad k(z) = \{W(z) - w(z)\} + \\ + \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{a(\zeta)\{W(\zeta) - w(\zeta)\} + b(\zeta)\overline{\{W(\zeta) - w(z)\}}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta,$$

由于 §1 条件 2，函数 $l(z) = \{W(z) - w(z)\}$ 有赫尔台連續偏微商，又因 (1.20)，$l_{\bar{z}}(z) = al + b\bar{l}$. 于是 (2.7) 中的积分有赫尔台連續偏微商(由引理的第(v)部分). $k(z)$ 同样有赫尔台連續偏微

商，而且因（由于(2.5)）$k_{\bar z}(z)=0$，所以 $k(z)$ 是解析函数。从(2.1)与(2.7)，得到

$$(2.8)\qquad h(z) = -k(z) + W(z) + \\ + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{a(\zeta)\,W(\zeta) + b(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta.$$

所以

$$(2.9)\quad h(z_0) = -\,k(z_0) + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{a(\zeta)W(\zeta)+b(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta - z_0}\,d\xi\,d\eta.$$

从(2.8)減去(2.9)，又用 $z-z_0$ 除，我們得到

$$(2.10)\quad \frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = -\frac{k(z)-k(z_0)}{z-z_0} + \\ + \frac{W(z)}{z-z_0} + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta,$$

其中

$$\rho(\zeta) = a(\zeta)\frac{W(\zeta)}{\zeta - z_0} + b(\zeta)\overline{\frac{W(\zeta)}{\zeta - z_0}}.$$

設 $z\to z_0$，(2.10)右边的第一項趋于有限极限 $-k'(z_0)$，第二項趋于有限极限 $\dot w(z_0)$。函数 $\rho(z)$ 在 D 內除了 $z=z_0$ 外是連續的，而且在 z_0 的邻域內仍然有界。因此由引理的第 (ii) 部分，(2.10) 中的重积分趋于一有限极限。于是 $h'(z_0)$ 存在，而由于 z_0 是 D 內的任意一点，故 $h(z)$ 在 D 內解析。

定理 2.2 (ii) 的証明。　假定 $w(z)$ 是准解析的，由于 (F,G)-微商的定义，知 $w(z)$ 連續（因除了当 $z\to z_0$，$w(z)\to w(z_0)$ 外，有限极限 (1.10) 不能存在）。不失一般性，可以認为 $w(z)$ 在区域 D 內有界。由定理 2.3(ii)，按(2.1)規定的函数 $h(z)$ 是解析的。如定理 2.3(i) 証明中的推理，可知 $w(z)$ 有赫尔台連續偏微商。

§3. 带有哥西核的重积分

在本节中，我們証明引理 2.1. 容易看出：$q(z)=2p_z(z)$，其中 $p(z)$ 是对数位势

$$p'(z) = \iint\limits_D \rho(\zeta) \log \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi\, d\eta.$$

因此我們的引理是重新叙述 E. 斯密特、狄尼、赫尔台与考尔恩的著名位势理論的結果[3]. 特别地,方程(2.5)相当于波哇松方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) p = -2\pi\rho.$$

首先考虑 E. 斯密特不等式

$$(3.1) \qquad \iint\limits_D \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \leqslant 2\pi \left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_D d\xi\, d\eta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

显而易見,对于具有固定面积 A 的 D,当 D 是以 z 为心的圓域时,(3.1) 的左边达到最大值. 这个不等式包含 (i),其中 $K_1 = 2\pi \times \times (A/\pi)^{\frac{1}{2}}$. 如果 L 是 D 的直径,D 可以包含在半径为 L 的一个圓内,所以 $A \leqslant \pi L^2$,而且 $|q(z)| \leqslant 2M\pi L$. 令 $\delta = |z_1 - z_2|$,z_1 与 z_2 是任意两点. 对于 $\delta \geqslant 1$,不等式(2.3)成立,其中 $K_2 = 2\pi L$. 因此剩下的是要对 $0 < \delta < 1$ 驗証(2.3).

我們有

$$(3.2) \qquad |q(z_1) - q(z_2)| \leqslant M \iint\limits_D \left|\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2}\right| d\xi\, d\eta.$$

以 Δ_1 表示圓域 $|\zeta - z_1| < 2\delta$,而 Δ_2 表示 D 內合于 $|\zeta - z_1| > 2\delta$ 的点 ζ 的集合. 由(3.1),有

$$\iint_{\Delta_1} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|} + \iint_{\Delta_1} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_2|} \leqslant 8\pi\delta.$$

在 Δ_2 中,把被积函数写成形式 $\delta/[\,|\zeta - z_1|\,|\zeta - z_2|\,]$. 因为在 Δ_2 中,$|\zeta - z_1| < 2|\zeta - z_2|$,那么这个被积函数小于 $2\delta|\zeta - z_1|^{-2}$. 在圓环 $2\delta < |\zeta - z_1| < L$ (包含 Δ_2) 上,积分 $2\delta|\zeta - z_1|^{-2}$,得(令 $\zeta = z_1 + re^{i\theta}$)

$$2\delta \iint_{2\delta < |\zeta - z_1| < L} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^2} = 2\delta \int_0^{2\pi} \int_{2\delta}^{L} \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2} = 4\pi\delta \log \frac{L}{2\delta}$$

(我們可假定 $L > 2$). 因此,(3.2)中的积分不超过

$8\pi\delta\left(1 + \log\dfrac{L}{2} - \log\delta\right)$,故得(2.3).

(iii) 的証明显然,而可以略去.

为了証明 (iv),将 $q(z)$ 写成形式

$$q(z) = q^*(z) + q^{**}(z) + q^{***}(z) =$$

$$= \rho(z_0)\iint_\Delta \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} + \iint_\Delta \frac{\rho(\zeta) - \rho(z_0)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint_{D-\Delta} \frac{\rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z},$$

其中 Δ 是包含 z_0 的一圓域,而且被包含在 D 内. 容易看出:如果 Δ 是一圓域,那么对于 Δ 内的 z,有

$$\iint_\Delta \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = -\pi\bar{z} + \text{常数}, \tag{3.3}$$

(驗証 (3.3) 最簡单的方法是应用区域 Δ 与函数 $w(z) = \bar{z}$ 于下一节的等式(4.3)). 于是在 Δ 内 $q^*_z(z)$ 与 $q^*_{\bar{z}}(z)$ 存在,特别地,有

$$q^*_{\bar{z}}(z_0) = -\pi q(z_0), \quad q^*_z(z_0) = 0. \tag{3.4}$$

由假設,存在常数 $K > 0$ 与 α, $0 < \alpha < 1$,使得

$$|\rho(z) - \rho(z_0)| \leqslant K|z - z_0|^\alpha. \tag{3.5}$$

我們要証明 $q^{**\prime}(z_0)$ 存在且等于

$$\iint_\Delta \frac{\rho(\zeta) - \rho(z_0)}{(\zeta - z_0)^2} d\xi\, d\eta \tag{3.6}$$

(由于 (3.5), 以上积分絕对收斂,因为: 令 $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$, 被积函数的模不超过 $Kr^{\alpha-2}$, 而且 $d\xi d\eta = r dr d\theta$). 現在作

$$\frac{q^{**}(z_0+h) - q^{**}(z_0)}{h} - \iint_\Delta \frac{\rho(\zeta) - \rho(z_0)}{(\zeta - z_0)^2} d\xi\, d\eta = \tag{3.7}$$

$$= \iint_\Delta [\rho(\zeta) - \rho(z_0)] \left\{ \frac{1}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_0 - h)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right\} d\xi\, d\eta = h \iint_\Delta \frac{[\rho(\zeta) - \rho(z_0)]}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z_0 - h)} d\xi d\eta =$$

$$= h \iint_\Delta \lambda(\zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

令 $|h| = \delta$, 又假定 $\delta < r/2$, r 是 Δ 的半径. 設 Δ_1, Δ_2 分别是区域 $|\zeta - z_0| < \delta/2$, $|\zeta - z_0 - h| < \delta/2$. 在 Δ_1 内, $|\zeta - z_0 -$

$h| > \delta/2$，故由(3.5)，有$|\lambda(\zeta)| < (2K/\delta)|\zeta-z_0|^{\alpha-2}$. 在$\Delta_2$内，$|\zeta - z_0| > \delta/2$，$|\rho(\zeta) - \rho(z_0)| \leqslant K(3\delta/2)^\alpha$，故有$|\lambda(\zeta)| < 4(3/2)^\alpha K\delta^{\alpha-2}|\zeta - z_0 - h|^{-1}$，而且

$$\iint_{\Delta_1} |\lambda| d\xi\, d\eta + \iint_{\Delta_2} |\lambda| d\xi d\eta < \frac{2K}{\delta} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha +$$

$$+ 4(3/2)^\alpha K\delta^{\alpha-2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\delta}{2} = O(\delta^{\alpha-1}),\ \delta \to 0.$$

在$\Delta - (\Delta_1 + \Delta_2)$内，$|\zeta - z_0| < 3|\zeta - z_0 - h|$，故$|\lambda(\zeta)| < 3K|\zeta - z_0|^{\alpha-3}$. 将它关于区域$\delta/2 < |\zeta - z_0| < 2r$积分，而这个区域包含$\Delta - (\Delta_1 + \Delta_2)$，我們得到

$$\iint_{\Delta-(\Delta_1+\Delta_2)} |\lambda(\zeta)| d\xi\, d\eta < 3K \cdot 2\pi \frac{(\delta/2)^{\alpha-1} - (2r)^{\alpha-1}}{1-\alpha} =$$

$$= O(\delta^{\alpha-1}),\ \delta \to 0.$$

因此差(3.7)等于$O(\delta^\alpha)$，$\delta \to 0$，所以$q^{**\prime}(z)$确实等于(3.6). 应用$q^{**}(z)$于引理 1.1，我們看出

(3.8) $$q_{\bar z}^{**}(z_0) = 0,\ q_z^{**}(z_0) = \iint_\Delta \frac{\rho(\zeta) - \rho(z_0)}{(\zeta - z_0)^2} d\xi d\eta.$$

最后，由本引理的第(iii)部分，$q^{***}(z)$在Δ内是解析的，而且

(3.9) $$q_{\bar z}^{***}(z_0) = 0,\ q_z^{***}(z_0) = \iint_{D-\Delta} \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\xi d\eta.$$

从方程(3.4)，(3.8)，(3.9)即得(iv)

余下的是要去証明(v). 由(2.5)，关于$q_{\bar z}(z)$的結論是显然的. 只要証明$q_z(z)$在每一个圓域$\Delta_0(\bar\Delta_0 \subset D)$內满足一致赫尔台条件. 設$\Delta_0$是这样的一个圓域，$r$为它的半径. 如果$\varepsilon$是充分小的正数，那么与$\Delta_0$同中心、半径为$r+\varepsilon$的圓域$\Delta$的閉包$\bar\Delta$包含在$D$內. 对于$\Delta$内每一点$z$，由(2.6)，有

$$q_z(z) = s^*(z) + s^{**}(z) =$$

$$= \iint_\Delta \frac{\rho(\zeta) - \rho(z)}{(\zeta - z)^2} d\xi\, d\eta + \iint_{D-\Delta} \frac{\rho(\zeta) d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}.$$

由假設，存在常数$K > 0$与α，$0 < \alpha < 1$，使得对Δ内的z'，z''，有