高等学校教学参考书

高等数学基础

下　　册

陈荩民　牛实为　陈以一　编

人民教育出版社

本书分上、下两册出版．下册是以陈荩民的《高等数学教程》（机械工业出版社出版）为基础写成的．在体系上作了重新安排，有些内容进行了改写．主要内容有矢量代数与空间解析几何，多元函数微积分，场论基础，级数以及广义积分等．本书可作为工科院校师生教学参考书．也可供科技人员参考之用．

高等学校教学参考书

高等数学基础

下　册

陈荩民　牛实为　陈以一　编

•

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖南省新华印刷一厂印装

•

开本787×1092 1/32　印张 15　字数 360,000

1981年3月第1版　1981年11月第1次印刷

印数 00,001—15,500

书号 13012·0597　定价 1.10元

目 录

第五篇 矢量代数基础与空间解析几何

第六篇　多元函数微分学

第七篇　多元函数积分学

第八篇　无穷级数与广义积分

第五篇　矢量代数基础与空间解析几何

我们在高中学过平面解析几何学，它是用代数方法来研究平面几何图形的一门数学．随着生产实践与科学技术的不断发展，提出了许多需要用代数方法来研究空间几何图形的问题，这就构成了空间解析几何的内容．因此，解析几何的对象是把几何问题化为代数运算来研究，而把有关的代数问题用几何图形来解释，使“数”与“形”密切地结合起来．这种结合是建立在下列两个基本概念之上的：(一)坐标法(以数代表点)；(二)图形的方程(以代数方程代表图形)．这些内容是后面多元函数微积分的重要基础．

本篇分为两章：(一)矢量代数基础；(二)空间解析几何．

第十章　矢量代数基础

在自然科学与工程技术中所遇到的量可分为标量与矢量两种类型：仅有大小的量叫做标量，例如体积、能量、质量、密度、温度、时间、电荷、磁荷等都是标量；不仅具有大小而且还具有方向的量叫做矢量或向量，例如位移、速度、加速度、力、电场强度、磁场强度等都是矢量．

矢量代数的计算对象为矢量，这正好象算术的计算对象为数值一样．它能使物理学及数学领域内的许多问题的解法简捷而直观，故已成为数学中的一个独立分支．它与解析几何的关系最为密切，一方面它需要用解析几何的坐标法来计算矢量的大小与方向，另一方面，它使解析几何中的有关问题的解法更加简化．因

此，我们把矢量代数基础与空间解析几何学并在一篇讨论.

矢量的基本运算分为加、减、乘三种. 加减运算，以及实数与矢量相乘的运算，叫做**线性运算**. 本章分为三节：(一)矢量及其线性运算；(二)空间直角坐标与矢量的坐标表达式；(三)矢量的乘积.

第一节 矢量及其线性运算

§10.1 矢量的表示法及相等条件

矢量是有大小及方向的量，在数学上往往用一条有方向的线段来表示它. 有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向. 例如图 10.1-1 是以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的矢量，记为$\overrightarrow{AB}$. 矢量的大小叫做它的模，矢量$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的矢量叫做单位矢量，与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位矢量记为$\overrightarrow{(AB)}^{\circ}$；模等于零的矢量叫做**零矢量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，它的方向不定；与矢量$\overrightarrow{AB}$的模相同而方向相反的矢量称为$\overrightarrow{AB}$的逆矢量，记作$-\overrightarrow{AB}$.

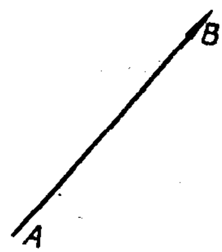

图 10.1-1

矢量与模的关系，跟物理中量与数的关系是一样的. 在物理中，每一个量都可以使用跟它同类的规定的单位量来测量，两者的比值就是数，即

$$\frac{量}{单位量}=数$$

这个量的单位就是单位量. 例如某一长度用米尺（单位量）去测量，正好量 5 次，即数为 5，则此长度为 5 米. 矢量和单位矢量的关系也是这样，即：

$$\frac{\text{矢量}}{\text{单位矢量}}=\text{模(数)或矢量}=(\text{单位矢量})(\text{模}),$$

但式中的矢量与单位矢量必须方向相同.

在书写及印刷矢量时，通常用下面两种方法之一来表示矢量.

1° 用黑体字母，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、等表示矢量，$\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$;

2° 在普通字母上加一划或一箭头，如 $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, 或 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 等表示矢量. $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$.

前一种便于印刷而且醒目，后一种便于书写，所以这两种方法都是常用的方法.

两个矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$, 如果模相等并且方向也相同(图 10.1-2)，我们就说它们相等，写为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$$

相等的矢量必须并且只须满足三个条件: 1) 模相等; 2) 方位相同(即同在一直线上，或分别在两条平行线上); 3) 指向相同. 如果只满足两个条件，比如，模相等，方位也相同，而指向不相同，如图 10.1-2 的 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{EF}$, 那么它们就不相等.

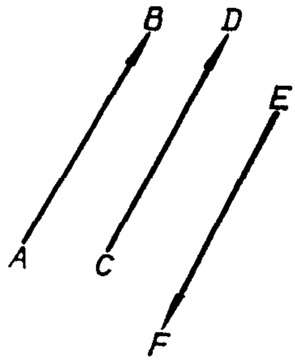

图 10.1-2

矢量分为三种，即自由矢量、滑动矢量与固定矢量. 其起点可以沿任意方向移动的矢量叫做自由矢量，如我们上面所讨论的矢量. 其起点只可以沿所在直线移动的矢量叫做滑动矢量，例如作用在刚体上的力. 这是因为从力的可传性原理可知: 力的起点可以沿着它的作用线任意移动，而不改变它对该刚体的效应. 其起点固定的矢量叫做固定矢量，例如作用在弹性体或液体某一质点上的力; 这种矢量不仅由大小与方向决定，也由起点的位置决定.

因此，两个固定矢量，虽然大小相等、方向相同，如果起点的位置不同，它们就不能算相等.

滑动矢量与固定矢量都可以归入自由矢量来研究，所以矢量代数只研究自由矢量.

§10.2 矢量的加法与减法

矢量的概念既然是从物理量中的力、速度、加速度等加以数学的抽象化而产生的，那么它的运算也显然要根据这种物理量的特征来规定，而不能与寻常的代数运算完全相同. 因此，矢量的加法要根据力的合成法则(平行四边形法则)来规定，它的定义如下：

加法定义 设有矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$，如果把 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合(图10.2-1)，那么由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的矢量，就叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，用矢量 $\boldsymbol{c}$ 表示. 求这种和的方法，叫做**矢量的加法**. 矢量加法的定义可以也用代数学中的符号写为：

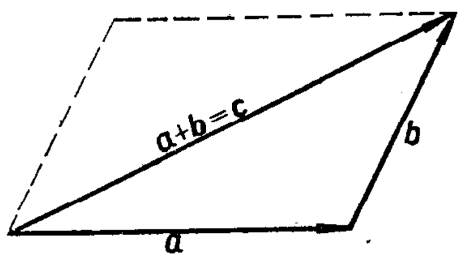

图 10.2-1

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},$$

定义中所指出的加法规律，也叫做三角形法则. 这个法则与力的合成法则是一致的.

n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和，可以使用由三角形法则推出的下面的多角形法则来把它求出，即使 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点与 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点重合，$\boldsymbol{a}_2$ 的终点与 $\boldsymbol{a}_3$ 的起点重合(图 10.2-2)，这样依次把 n 个矢量连成一个有向折线，以第一个矢量的起点为起点，以最末个矢量的终点

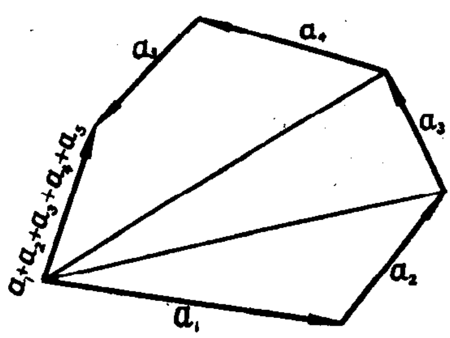

图 10.2-2

为终点的封闭线就是 n 个矢量的和.

加法的运算规律 根据上面的加法定义可以推出两条运算规律如下:

1) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

2) **结合律** $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

例1 求证对角线互相平分的四边形是平行四边形(图 10.2-3).

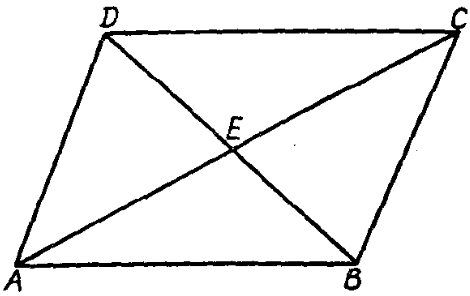

图 10.2-3

证明: 由图示关系及已给条件,即得矢量等式

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}$$

此二式两端各相加,得

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC},\text{即}\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},$$

这就是 AD 与 BC 相等并且平行, 所以 $ABCD$ 是平行四边形.

[证毕]

减法定义 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和, 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差, 记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, 矢量求差的方法, 叫做**矢量的减法**.

根据上面的定义, 得矢量减法的几何作图法如下:

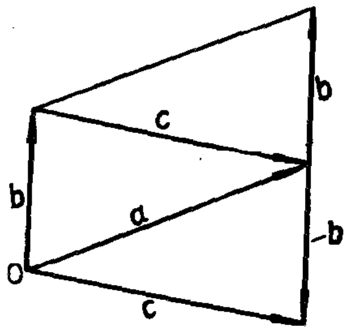

图 10.2-4

把矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的起点都移到一点 O. 差 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 就是从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的矢量 $\boldsymbol{c}$, 如图 10.2-4 所示. 由图看出

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}.$$

§10.3 矢量与实数相乘的定义及运算律

定义 以实数 m 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 仍旧表示一个矢量，记为 $m\boldsymbol{a}$. 这个矢量的模为 $|m||\boldsymbol{a}|$，当 $m>0$ 时，它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $m<0$ 时，它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $m=0$ 时，它是零矢量，它的方向不定.

运算律 这种乘法运算服从下列规律：

1) **分配律** $(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$,

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}.$$

2) **结合律** $m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{b}$.

3) **交换律** $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m$.

上面的运算律都可以用作图法证明. 例如分配律的第二等式：当 $m>0$ 时，如图 10.3-1 所示；当 $m<0$ 时，如图 10.3-2 所

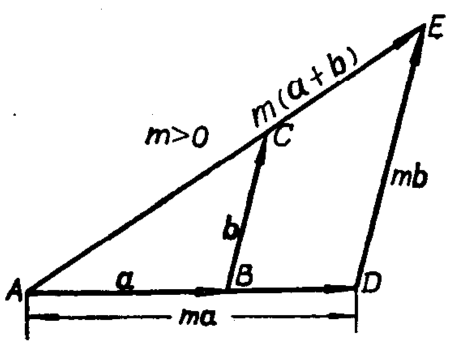

图 10.3-1

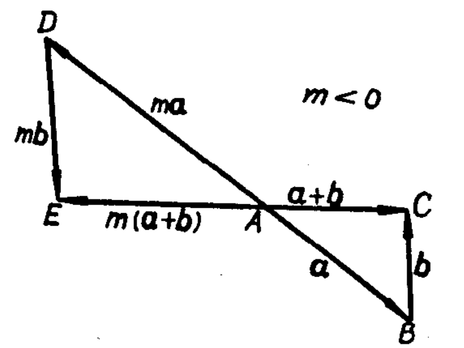

图 10.3-2

示. 前一个图就是把$\triangle ABC$ 的各边改为 m 倍，得出与原三角形相似的$\triangle ADE$，其中 $\overrightarrow{AD}=m\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=m\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，因 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$，所以

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},$$

其它等式都比较简单，读者可以自己证明.

由以上各目所讲的结果，我们可以得一结论：矢量的线性运算，在形式上完全和寻常代数一样，但是在本质上又完全是两

回事.

根据前面所讲，矢量=(单位矢量)·(模)，故任意一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 都可写为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ},$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 代表矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，而 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 代表与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量. 这种方法虽然很简单，但在矢量运算中有着广泛的应用.

第二节　空间直角坐标与矢量的坐标表达式

§10.4　投影的基本定理

投影的方法是研究图形的有力工具，它能使问题的处理过程缩短，我们常用它来建立一些概念、定理及公式. 因此，下面先讲它的定义及两个基本定理，作为以后研究的预备知识.

1. 投影定义　在空间一直线上，任意选定一个原点 O，一个正向和一个单位长度，该直线就叫做一个轴，用 l 表示. 设在 l 的上空有一点 A(图 10.4-1)，通过此点作一平面垂直于 l 并且相交于一点 a，于是，交点 a 叫做 A 在轴 l 上的投影(此时，$Aa\perp l$). l 叫做**投影轴**.

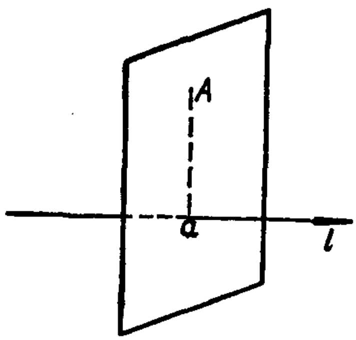

图　10.4-1

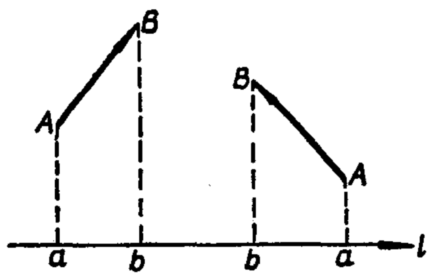

图　10.4-2

设 $\overrightarrow{AB}$ 是空间矢量，起点 A 及终点 B 在轴 l 上的投影各为 a, b(图 10.4-2)，称有向线段 ab 在轴上的值为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投

影，记为 $(\overrightarrow{AB})_l$，即 $(\overrightarrow{AB})_l = ab$.

由空间一点 A 到一平面作垂线，这个垂足叫做 A 点在平面上的投影．矢量 $\overrightarrow{AB}$ 两端在平面上的投影 a 及 b 所联成的有向线段 $\overrightarrow{ab}$ 的值，叫做 $\overrightarrow{AB}$ 在平面上的投影.

2. 矢量与轴的夹角 设在空间有一轴 l 和矢量 $\overrightarrow{AB}$，如图10.4-3所示（就一般论，不同在一个平面内）．如果从空间任意一点 O 引两条射线 OP、OQ 各与 $\overrightarrow{AB}$ 及 l 平行并且方向相同①，那么

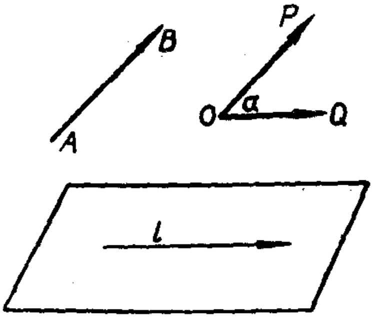

图 10.4-3

$\angle QOP$ 就叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 l 的夹角，记为 $(l, \overrightarrow{AB})$ 或 α，并规定 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$②.

3. 投影定理

投影第一定理 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影等于它的长度乘以夹角 α 的余弦，即

$$(\overrightarrow{AB})_l = |\overrightarrow{AB}|\cos(l, \overrightarrow{AB}),$$

或

$$(\overrightarrow{AB})_l = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$$

证明： 如果 $\overrightarrow{AB}$ 与 l 在同一平面内，如图 10.4-4 所示的四种情况，都有 $(\overrightarrow{AB})_l = ab = AC = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$，当 $\overrightarrow{AB}$ 与 l 垂直或平行时，这个等式也成立.

---

① 显然，也可以从 l 或 $\overrightarrow{AB}$ 上取一点作为 O 点.

② 因为在空间的角，它的一边旋转到另一边的正负转向是和观察者在角所决定的平面的这一面或另一面有关系的，所以这里的角，除有特别声明外，就不分正负，并且限定它在 0 与 π 之间．因此 $(l, \overrightarrow{AB})$ 也可以写为 $(\overrightarrow{AB}, l)$.

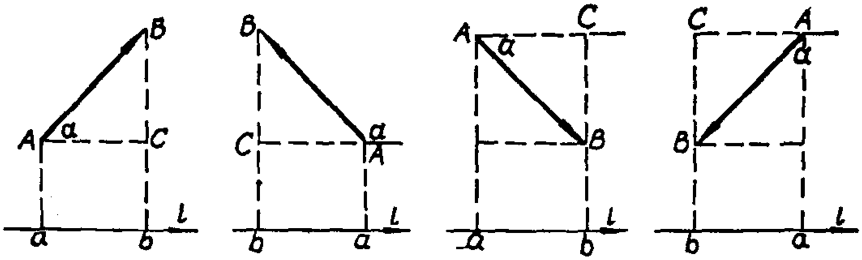

图 10.4-4

如果$\overrightarrow{AB}$与 l 不在同一平面内(图 10.4-5)，可从 A 点作一轴 l' 平行于 l，并且与 l 同方向(图 10.4-5)，得 l' 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 α. 因$\overrightarrow{AB}$与 l' 在同一平面内，所以

$$(\overrightarrow{AB})_{l'}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha=Ab',$$

但在两个平行平面之间的平行线段 $Ab'=ab$，因此，

$$(\overrightarrow{AB})_l=ab=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$$

所以无论矢量与投影轴是否同在一个平面内，本定理总能成立.

[证毕]

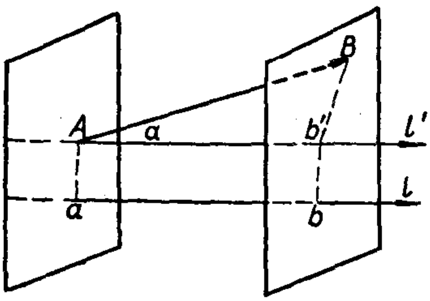

图 10.4-5

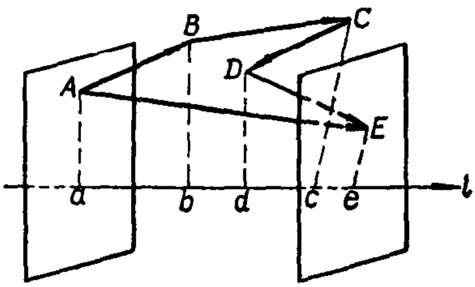

图 10.4-6

投影第二定理 矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$的和在轴 l 上的投影，等于各个矢量在该轴上投影的和(图 10.4-6)，即

$$(\overrightarrow{AE})_l=(\overrightarrow{AB})_l+(\overrightarrow{BC})_l+(\overrightarrow{CD})_l+(\overrightarrow{DE})_l.$$