

高等学校教学参考书

高等数学基础

下 册

陈萼民 牛实为 陈以一 编

人民教育出版社

本书分上、下两册出版。下册是以陈荃民的《高等数学教程》(机械工业出版社出版)为基础写成的。在体系上作了重新安排,有些内容进行了改写。主要内容有矢量代数与空间解析几何,多元函数微积分,场论基础,级数以及广义积分等。本书可作为工科院校师生教学参考书,也可供科技人员参考之用。

高等学校教学参考书

高等数学基础

下 册

陈荃民 牛实为 陈以一 编

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷一厂印装

开本787×1092 1/32 印张 15 字数 360,000

1981年3月第1版 1981年11月第1次印刷

印数 00,001—15,500

书号 13012·0597 定价 1.10元

目 录

第五篇 向量代数基础与空间解析几何

第十章 向量代数基础	1
第一节 向量及其线性运算	2
§ 10.1 向量的表示法及相等条件	2
§ 10.2 向量的加法与减法	4
§ 10.3 向量与实数相乘的定义及运算律	6
第二节 空间直角坐标与向量的坐标表达式	7
§ 10.4 投影的基本定理	7
§ 10.5 空间一点的直角坐标	10
§ 10.6 两点之间的距离 定比分点的坐标	12
§ 10.7 向量的坐标及其模与方向余弦的坐标表示式	14
§ 10.8 向量的坐标表示式	16
第三节 向量的乘积	17
§ 10.9 两个向量的标积及其性质	18
§ 10.10 标积的坐标表示式 两个向量垂直的条件	23
§ 10.11 两个向量的矢积及其性质	24
§ 10.12 矢积的坐标表示式 两个向量平行的条件	27
§ 10.13 三个向量的乘积	28
§ 10.14 交错积的几何意义及性质	29
§ 10.15 二重矢积的性质及计算法则	31
第十一章 空间解析几何	34
第一节 空间的平面与直线	34
§ 11.1 平面方程的点法式	34
§ 11.2 平面方程的一般式	35
§ 11.3 平面方程的截距式及法线式	37
§ 11.4 平面到一点的离差及距离	38
§ 11.5 两个平面的夹角及垂直或平行的条件	41

§ 11.6	直线方程的各种形式	42
§ 11.7	两直线的夹角及平行或垂直的条件	44
§ 11.8	直线与平面的交角及交点	45
第二节	曲面与空间曲线	47
§ 11.9	曲面方程	47
§ 11.10	柱面与二次柱面	50
§ 11.11	旋转曲面	52
§ 11.12	空间曲线方程	54
第三节	二次曲面	57
§ 11.13	二次曲面的分类	57
§ 11.14	研究二次曲面方程的轨迹的初等方法	59
§ 11.15	椭球面	61
§ 11.16	单叶双曲面	63
§ 11.17	双叶双曲面	65
§ 11.18	椭圆抛物面	66
§ 11.19	双曲抛物面	67
§ 11.20	锥面与二次锥面	69
§ 11.21	二次曲面小结	71

第六篇 多元函数微分学

第十二章	基础知识	73
第一节	多元函数的概念	73
§ 12.1	二元函数概念	73
§ 12.2	二元函数的几何表示法 等值网	77
§ 12.3	n 元函数与点函数	79
第二节	多元函数的极限与连续	81
§ 12.4	极限概念	81
§ 12.5	函数的连续与间断	84
§ 12.6	连续函数的特性	85
第十三章	多元函数微分法及其应用	87
第一节	偏导数与全微分	87
§ 13.1	偏导数及其几何意义	87
§ 13.2	高阶偏导数与求导次序问题	91

§ 13.3	全增量与全微分 微小作用相加原理	96
§ 13.4	全微分的几何解释	103
§ 13.5	全微分在近似计算及误差估计上的应用	105
第二节	复合函数及隐函数的求导法	108
§ 13.6	全导数公式	108
§ 13.7	复合函数求导法与全微分形式不变性	112
§ 13.8	由一个方程确定的隐函数及其求导法	117
§ 13.9	由方程组确定的隐函数求导法	121
§ 13.10	由积分确定的函数及其求导公式	125
§ 13.11	高阶全微分	133
§ 13.12	二元函数的台劳公式	135
第三节	偏导数的应用	137
§ 13.13	空间曲线的切线方程及法面方程 弧长	137
§ 13.14	曲面的切面方程及法线方程	140
§ 13.15	多元函数的极值	144
§ 13.16	条件极值与拉格朗日乘法	150
§ 13.17	多元函数的最小值与最大值	157
§ 13.18	隐示方程的曲线 寻常点与奇异点	159
§ 13.19	曲线族的包络	163
§ 13.20	一阶微分方程的图解法 方向场	168

第七篇 多元函数积分学

第十四章	重积分	172
第一节	重积分的概念及性质	172
§ 14.1	引出二重积分概念的几何及物理问题	172
§ 14.2	二重积分的定义及存在定理	176
§ 14.3	三重积分的定义	177
§ 14.4	重积分的简单性质	179
第二节	二重积分的计算法及应用	181
§ 14.5	在直角坐标系中的计算法	181
§ 14.6	在极坐标系中的计算法	197
§ 14.7	光滑曲面的面积	206
§ 14.8	薄片的重心及转动惯量	211

第三节	三重积分的计算法及应用	216
§ 14.9	引言	216
§ 14.10	在直角坐标系中的计算法	219
§ 14.11	在柱坐标系中的计算法	228
§ 14.12	在球坐标系中的计算法	235
第十五章	曲线积分与曲面积分	240
第一节	曲线积分	240
§ 15.1	对弧长的曲线积分	241
§ 15.2	对坐标的曲线积分	250
§ 15.3	两种曲线积分的关系	258
§ 15.4	平面上曲线积分与二重积分的关系	259
§ 15.5	曲线积分的特性	264
§ 15.6	利用曲线积分求全微分的原函数	268
§ 15.7	在微分方程中的应用 积分因子	270
§ 15.8	在物理上的应用	275
第二节	曲面积分	280
§ 15.9	对面积的曲面积分与对坐标的曲面积分	280
§ 15.10	曲面积分的基本性质及计算方法	286
§ 15.11	曲面积分与三重积分的关系(奥氏公式)	289
§ 15.12	曲面积分与曲面无关的条件	292
§ 15.13	曲面积分与空间闭曲线积分的关系(斯氏公式)	293
第十六章	场论基础	297
第一节	方向导数与标量场的梯度	298
§ 16.1	方向导数	298
§ 16.2	标量场的梯度	304
第二节	矢量场的散度与旋度	311
§ 16.3	散度的概念	311
§ 16.4	散度的表达式及其基本性质	314
§ 16.5	旋度的概念	320
§ 16.6	旋度的表达式及其基本性质	324
第三节	两个重要定理及曲线坐标系中的表达式	329
§ 16.7	矢量场的基本定理及其分类	329
§ 16.8	梯度、散度、旋度在曲线坐标系中的表达式	331

第八篇 无穷级数与广义积分

第十七章	数项级数与函数项级数	336
第一节	数项级数	336
§ 17.1	级数的收敛与发散	336
§ 17.2	级数的基本性质	339
§ 17.3	级数收敛的必要条件	341
§ 17.4	同号级数判别法	343
§ 17.5	交错级数判别法	349
§ 17.6	异号级数的绝对收敛与条件收敛	352
第二节	函数项级数	355
§ 17.7	函数项级数的收敛点与收敛域	355
§ 17.8	均匀收敛的概念	358
§ 17.9	均匀收敛的 M 判定法	362
§ 17.10	匀敛级数的性质	365
第十八章	幂级数与福里哀级数	370
第一节	幂级数	370
§ 18.1	幂级数的收敛域及其求法 收敛半径	370
§ 18.2	幂级数的四则运算及分析性质	373
§ 18.3	函数展为幂级数的台劳方法	378
§ 18.4	函数展开的应用	379
§ 18.5	函数展开的其它方法 二项式级数	387
§ 18.6	微分方程的级数解及其存在问题	393
§ 18.7	贝塞尔函数(圆柱函数)	399
第二节	福里哀级数	405
§ 18.8	三角级数	405
§ 18.9	三角函数组的正交性	406
§ 18.10	福里哀公式与福里哀级数	408
§ 18.11	狄里赫莱定理	412
§ 18.12	偶函数与奇函数的福里哀级数	415
§ 18.13	以 $2l$ 为周期的函数展为福里哀级数	418
§ 18.14	函数在半区间 $(0, l)$ 上展为福里哀级数	419
§ 18.15	福里哀级数的指数形式	424
§ 18.16	经验函数的谐波分析法 选数板	428

第十九章 广义积分	436
第一节 无穷积分的收敛与发散	437
§ 19.1 无穷积分的收敛与发散定义	437
§ 19.2 无穷积分判别法	439
第二节 无穷积分的均匀收敛	444
§ 19.3 均匀收敛及其判定法	444
§ 19.4 均匀收敛的应用	446
第三节 瑕积分的收敛与发散	452
§ 19.5 瑕积分的收敛及发散定义	452
§ 19.6 瑕积分判别法	453
第四节 广义二重积分	456
§ 19.7 无界域的二重积分	457
§ 19.8 无界函数的二重积分	460
第五节 Γ 函数与 B 函数	463
§ 19.9 Γ 函数	463
§ 19.10 B 函数	466
附录	469

第五篇 矢量代数基础与空间解析几何

我们在高中学过平面解析几何学，它是用代数方法来研究平面几何图形的一门数学。随着生产实践与科学技术的不断发展，提出了许多需要用代数方法来研究空间几何图形的问题，这就构成了空间解析几何的内容。因此，解析几何的对象是把几何问题化为代数运算来研究，而把有关的代数问题用几何图形来解释，使“数”与“形”密切地结合起来。这种结合是建立在下列两个基本概念之上的：（一）坐标法（以数代表点）；（二）图形的方程（以代数方程代表图形）。这些内容是后面多元函数微积分的重要基础。

本篇分为两章：（一）矢量代数基础；（二）空间解析几何。

第十章 矢量代数基础

在自然科学与工程技术中所遇到的量可分为标量与矢量两种类型：仅有大小的量叫做标量，例如体积、能量、质量、密度、温度、时间、电荷、磁荷等都是标量；不仅具有大小而且还具有方向的量叫做矢量或向量，例如位移、速度、加速度、力、电场强度、磁场强度等都是矢量。

矢量代数的计算对象为矢量，这正好象算术的计算对象为数值一样。它能使物理学及数学领域内的许多问题的解法简捷而直观，故已成为数学中的一个独立分支。它与解析几何的关系最为密切，一方面它需要用解析几何的坐标法来计算矢量的大小与方向，另一方面，它使解析几何中的有关问题的解法更加简化。因

此, 我们把矢量代数基础与空间解析几何学并在一篇讨论.

矢量的基本运算分为加、减、乘三种. 加减运算, 以及实数与矢量相乘的运算, 叫做**线性运算**. 本章分为三节: (一) 矢量及其线性运算; (二) 空间直角坐标与矢量的坐标表达式; (三) 矢量的乘积.

第一节 矢量及其线性运算

§10.1 矢量的表示法及相等条件

矢量是有大小及方向的量, 在数学上往往用一条有方向的线段来表示它. 有向线段的长度表示矢量的大小, 有向线段的方向表示矢量的方向. 例如图 10.1-1 是以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的矢量,

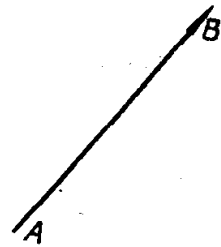


图 10.1-1

记为 \overrightarrow{AB} . 矢量的大小叫做它的模, 矢量 \overrightarrow{AB} 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的矢量叫做单位矢量, 与 \overrightarrow{AB} 同方向的单位矢量记为 $(\overrightarrow{AB})^\circ$; 模等于零的矢量叫做零矢量, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$, 它的方向不定; 与矢量 \overrightarrow{AB} 的模相同而方向相反的矢量称为 \overrightarrow{AB} 的逆矢量, 记作 $-\overrightarrow{AB}$.

矢量与模的关系, 跟物理中量与数的关系是一样的. 在物理中, 每一个量都可以使用跟它同类的规定的单位量来测量, 两者的比值就是数, 即

$$\frac{\text{量}}{\text{单位量}} = \text{数}$$

这个量的单位就是单位量. 例如某一长度用米尺 (单位量) 去测量, 正好量 5 次, 即数为 5, 则此长度为 5 米. 矢量和单位矢量的关系也是这样, 即:

$$\frac{\text{矢量}}{\text{单位矢量}} = \text{模(数)} \text{ 或 } \text{矢量} = (\text{单位矢量})(\text{模}),$$

但式中的矢量与单位矢量必须方向相同。

在书写及印刷矢量时,通常用下面两种方法之一来表示矢量。

1° 用黑体字母,如 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、等表示矢量, \mathbf{a} 的模记为 $|\mathbf{a}|$;

2° 在普通字母上加一划或一箭头,如 \bar{a} 、 \bar{b} 、 \bar{c} , 或 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 等表示矢量。 \bar{a} 的模记为 $|\bar{a}|$ 。

前一种便于印刷而且醒目,后一种便于书写,所以这两种方法都是常用的方法。

两个矢量 \vec{AB} 与 \vec{CD} , 如果模相等并且方向也相同(图 10.1-2), 我们就说它们相等, 写为

$$\vec{AB} = \vec{CD}.$$

相等的矢量必须并且只须满足三个条件: 1) 模相等; 2) 方位相同(即同在一直线上, 或分别在两条平行线上); 3) 指向相同。如果只满足两个条件, 比如, 模相等, 方位也相同, 而指向不相同, 如图 10.1-2 的 \vec{CD} 与 \vec{EF} , 那么它们就不相等。

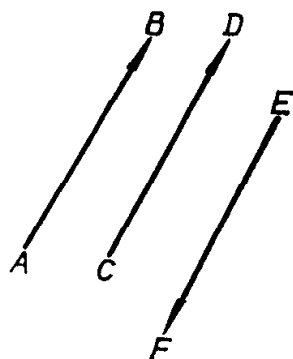


图 10.1-2

矢量分为三种, 即自由矢量、滑动矢量与固定矢量。其起点可以沿任意方向移动的矢量叫做自由矢量, 如我们上面所讨论的矢量。其起点只可以沿所在直线移动的矢量叫做滑动矢量, 例如作用在刚体上的力, 这是因为从力的可传性原理可知: 力的起点可以沿着它的作用线任意移动, 而不改变它对该刚体的效应。其起点固定的矢量叫做固定矢量, 例如作用在弹性体或液体某一质点上的力; 这种矢量不仅由大小与方向决定, 也由起点的位置决定。

因此,两个固定矢量,虽然大小相等、方向相同,如果起点的位置不同,它们就不能算相等。

滑动矢量与固定矢量都可以归入自由矢量来研究,所以矢量代数只研究自由矢量。

§ 10.2 矢量的加法与减法

矢量的概念既然是从物理量中的力、速度、加速度等加以数学的抽象化而产生的,那么它的运算也显然要根据这种物理量的特征来规定,而不能与寻常的代数运算完全相同。因此,矢量的加法要根据力的合成法则(平行四边形法则)来规定,它的定义如下:

加法定义 设有矢量 a 及 b ,如果把 a 的终点与 b 的起点重合(图10.2-1),那么由 a 的起点到 b 的终点的矢量,就叫做 a 与 b 的和,记为 $a+b$,用矢量 c 表示。求这种和的方法,叫做矢量的加法。矢量加法的定义可以也用代数学中的符号写为:

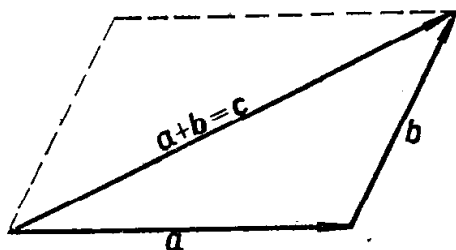


图 10.2-1

$$a+b=c,$$

定义中所指出的加法规律,也叫做三角形法则。这个法则与力的合成法则是一致的。

n 个矢量 a_1, a_2, \dots, a_n 的和,可以使用由三角形法则推出的下面的多角形法则来把它求出,即使 a_1 的终点与 a_2 的起点重合, a_2

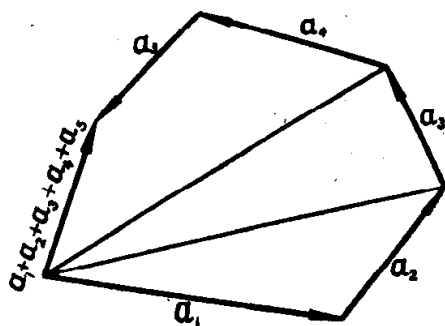


图 10.2-2

的终点与 a_3 的起点重合(图 10.2-2),这样依次把 n 个矢量连成一个有向折线,以第一个矢量的起点为起点,以最末个矢量的终点

为终点的封闭线就是 n 个矢量的和.

加法的运算规律 根据上面的加法定义可以推出两条运算规律如下:

1) **交换律** $a + b = b + a.$

2) **结合律** $a + (b + c) = (a + b) + c.$

例 1 求证对角线互相平分的四边形是平行四边形 (图 10.2-3).

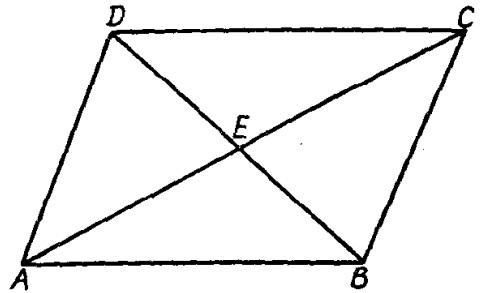


图 10.2-3

证明: 由图示关系及已给条件, 即得矢量等式

$$\vec{AE} = \vec{EC}, \quad \vec{ED} = \vec{BE}$$

此二式两端各相加, 得

$$\vec{AE} + \vec{ED} = \vec{BE} + \vec{EC}, \text{ 即 } \vec{AD} = \vec{BC},$$

这就是 AD 与 BC 相等并且平行, 所以 $ABCD$ 是平行四边形.

[证毕]

减法定义 矢量 a 与 $-b$ 的和, 叫做 a 与 b 的差, 记作 $a - b = a + (-b)$, 矢量求差的方法, 叫做矢量的减法.

根据上面的定义, 得矢量减法的几何作图法如下:

把矢量 a, b 的起点都移到一点 O . 差 $(a - b)$ 就是从 b 的终点到 a 的终点的矢量 c , 如图 10.2-4 所示. 由图看出

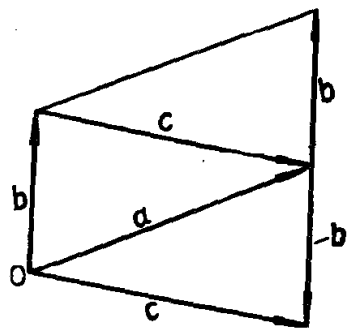


图 10.2-4

$$a - b = a + (-b) = c.$$

§ 10.3 向量与实数相乘的定义及运算律

定义 以实数 m 乘向量 a 仍旧表示一个向量, 记为 ma . 这个向量的模为 $|m||a|$, 当 $m > 0$ 时, 它的方向与 a 相同; 当 $m < 0$ 时, 它的方向与 a 相反; 当 $m = 0$ 时, 它是零向量, 它的方向不定.

运算律 这种乘法运算服从下列规律:

1) 分配律 $(m+n)a = ma + na$,

$$m(a+b) = ma + mb.$$

2) 结合律 $m(na) = (mn)b$.

3) 交换律 $ma = am$.

上面的运算律都可以用作图法证明. 例如分配律的第二等式: 当 $m > 0$ 时, 如图 10.3-1 所示; 当 $m < 0$ 时, 如图 10.3-2 所

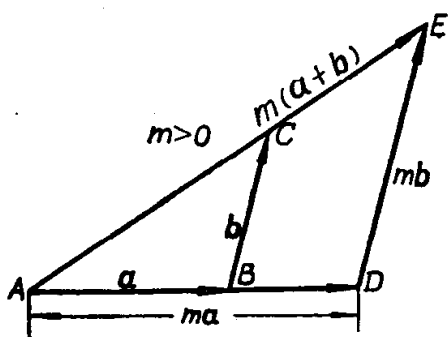


图 10.3-1

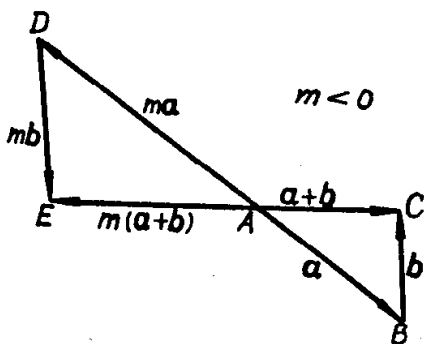


图 10.3-2

示. 前一个图就是把 $\triangle ABC$ 的各边改为 m 倍, 得出与原三角形相似的 $\triangle ADE$, 其中 $\overrightarrow{AD} = ma$, $\overrightarrow{DE} = mb$, $\overrightarrow{AE} = m(a+b)$, 因 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, 所以

$$m(a+b) = ma + mb,$$

其它等式都比较简单, 读者可以自己证明.

由以上各目所讲的结果, 我们可以得一结论: 向量的线性运算, 在形式上完全和寻常代数一样, 但是在本质上又完全是两

回事.

根据前面所讲, 矢量 = (单位矢量) · (模), 故任意一个矢量 a 都可写为

$$a = |a|a^\circ,$$

其中 $|a|$ 代表矢量 a 的大小, 而 a° 代表与 a 同方向的单位矢量, 这种方法虽然很简单, 但在矢量运算中有着广泛的应用.

第二节 空间直角坐标与矢量的坐标表达式

§ 10.4 投影的基本定理

投影的方法是研究图形的有力工具, 它能使问题的处理过程缩短, 我们常用它来建立一些概念、定理及公式. 因此, 下面先讲它的定义及两个基本定理, 作为以后研究的预备知识.

1. 投影定义 在空间一直线上, 任意选定一个原点 O , 一个正向和一个单位长度, 该直线就叫做一个轴, 用 l 表示. 设在 l 的上空有一点 A (图 10.4-1), 通过此点作一平面垂直于 l 并且相交于一点 a , 于是, 交点 a 叫做 A 在轴 l 上的投影 (此时, $Aa \perp l$). l 叫做投影轴.

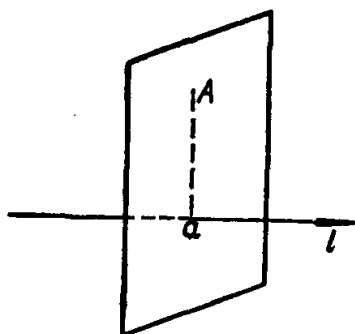


图 10.4-1

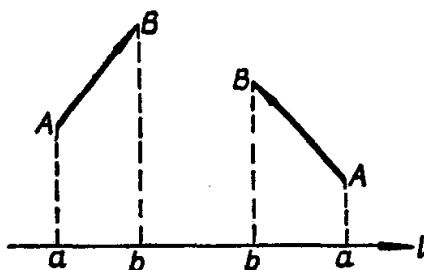


图 10.4-2

设 \overrightarrow{AB} 是空间矢量, 起点 A 及终点 B 在轴 l 上的投影各为 a , b (图 10.4-2), 称有向线段 ab 在轴上的值为矢量 \overrightarrow{AB} 在轴 l 上的投

影, 记为 $(\overrightarrow{AB})_l$, 即 $(\overrightarrow{AB})_l = ab$.

由空间一点 A 到一平面作垂线, 这个垂足叫做 A 点在平面上的投影. 矢量 \overrightarrow{AB} 两端在平面上的投影 a 及 b 所联成的有向线段 ab 的值, 叫做 \overrightarrow{AB} 在平面上的投影.

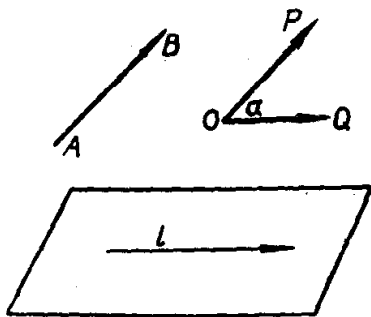


图 10.4-3

2. 矢量与轴的夹角 设在空间有一轴 l 和矢量 \overrightarrow{AB} , 如图 10.4-3 所示(就一般论, 不同在一个平面内). 如果从空间任意一点 O 引两条射线 OP 、 OQ 各与 \overrightarrow{AB} 及 l 平行并且方向相同 ①, 那么

$\angle QOP$ 就叫做矢量 \overrightarrow{AB} 与 l 的夹角, 记为 (l, \overrightarrow{AB}) 或 α , 并规定 $0 \leq \alpha \leq \pi$ ②.

3. 投影定理

投影第一定理 矢量 \overrightarrow{AB} 在轴 l 上的投影等于它的长度乘以夹角 α 的余弦, 即

$$(\overrightarrow{AB})_l = |\overrightarrow{AB}| \cos(l, \overrightarrow{AB}),$$

或
$$(\overrightarrow{AB})_l = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.$$

证明: 如果 \overrightarrow{AB} 与 l 在同一平面内, 如图 10.4-4 所示的四种情况, 都有 $(\overrightarrow{AB})_l = ab = AC = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha$, 当 \overrightarrow{AB} 与 l 垂直或平行时, 这个等式也成立.

① 显然, 也可以从 l 或 \overrightarrow{AB} 上取一点作为 O 点.

② 因为在空间的角, 它的一边旋转到另一边的正负转向是和观察者在角所决定的平面的这一面或另一面有关系的, 所以这里的角, 除有特别声明外, 就不分正负, 并且限定它在 0 与 π 之间, 因此 (l, \overrightarrow{AB}) 也可以写为 (\overrightarrow{AB}, l) .

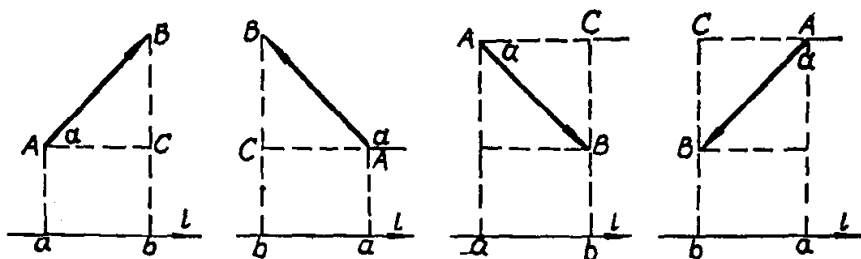


图 10.4-4

如果 \overrightarrow{AB} 与 l 不在同一平面内(图 10.4-5), 可从 A 点作一轴 l' 平行于 l , 并且与 l 同方向(图 10.4-5), 得 l' 与 \overrightarrow{AB} 的夹角为 α . 因 \overrightarrow{AB} 与 l' 在同一平面内, 所以

$$(\overrightarrow{AB})_{l'} = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha = Ab',$$

但在两个平行平面之间的平行线段 $Ab' = ab$, 因此,

$$(\overrightarrow{AB})_l = ab = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.$$

所以无论矢量与投影轴是否同在一个平面内, 本定理总能成立.

[证毕]

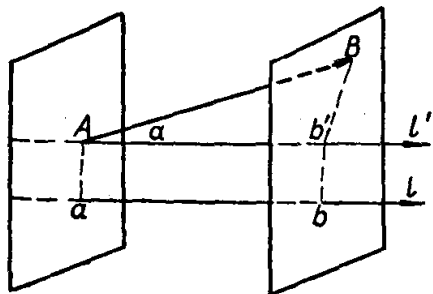


图 10.4-5

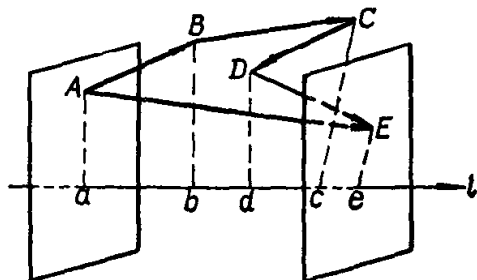


图 10.4-6

投影第二定理 矢量 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} 、 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{DE} 的和在轴 l 上的投影, 等于各个矢量在该轴上投影的和(图 10.4-6), 即

$$(\overrightarrow{AE})_l = (\overrightarrow{AB})_l + (\overrightarrow{BC})_l + (\overrightarrow{CD})_l + (\overrightarrow{DE})_l.$$