

数学分析的数值方法

И. Е. 米凱拉德捷著

科學出版社

數學分析的數值方法

III. E. 米凱拉德捷著

童勤謨方侃譯

科 學 出 版 社

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1953

內 容 提 要

全書共分十九章，其中主要是以內插法為基礎講述了數值微分和數值積分（單積分，重積分）的各種公式，書中也相應地提到了契伯舍夫的至善（最佳）逼近理論、正交多項式、富氏級數、最小二乘法、經驗公式等等。總的說來，本書可作為要攻讀微分方程的數值積分的讀者的一個前階。

數學分析的數值方法

原著者	[蘇聯] Ш. Е. 米凱拉德捷
翻譯者	童勤謨 方侃
校訂者	陳詩華 王柔懷
出版者	科學出版社
	北京朝陽門大街117號
	北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者	上海中科藝文聯合印刷廠
總經售	新華書店

1957年5月第一版	書號：0777 字數：537,000
1957年5月第一次印刷	開本：850×1168 1/32
(滬)0001—4,775	印張：20 3/8 插頁：8

定價：(11)4.70 元

作者爲中譯本所寫的序言

當我知道中國的讀者能够以自己祖國的語言來介紹我的書“數學分析的數值方法”的內容時，我並不是沒有一些興奮和喜悅的。

在中國，有着數千年來對科學中各個領域所形成的興趣以及蓬勃發展的技術和工業的需要，使我可以期待着本書會有很多的讀者。

請中國讀者們注意，這書主要是探討函數的逼近問題以及數值微分和數值積分的公式的構成問題。利用在書中所敘述的觀念和公式便可得出解自然科學和技術的現代複雜問題的數學方法，這些問題是物理學者、工程師和設計師每日在解特殊問題的途徑中需要碰到的。

隨着本書之後，我還想出版一本書，該書的目的便是對在“數學分析的數值方法”中所觸及的問題的一個自然的接續，而在某些情況下，也給出這些問題的邏輯的完成。

在我的那本即將付印的書中，將敘述代數的和超越的數值方程的根的求法，差分方程的解法以及積分方程，常微分方程和偏微分方程的數值解法。

在這個中文版中，與俄文版所不同的是在其中改正了在本書出版以後爲我所注意到的一些刊誤和一些缺點。

中國讀者的所有批評性意見和希望，作者都將是以感激的心情來對待的，作者不僅認爲這些意見和希望是使本書在以後的各版中更臻完善的一種材料，並且也認爲它們是深切關心作者的著作的一個明證。

III. 米凱拉德捷

梯比里西 1955年12月13日

原 序

在本書內敘述了數值分析的那些部門，它們是還在古典數學分析的範圍之內就形成起來的。在書中給出內插公式的很多變形；這些變了形的內插公式能使我們作出函數的數值積分和數值微分的新公式，且在以後可用來敘述邊值問題和關於特徵值問題的數值解的方法。

書中關於函數的數值積分和數值微分的這兩章，大部分是依據在格魯吉亞蘇維埃社會主義共和國科學院數學研究所所進行的近似分析的研究。

在本書中也講述富立葉級數、正交多項式、平方逼近、經驗公式以及其他等等知識，並且講到這樣的程度，就是：依我們看來，這是對於從事使用數值方法於數學物理方程的積分的人們所必需的。

在最近將來，作者擬再寫一本講述微分方程的數值積分問題的書。

本書是為科學工作者、研究生以及所有有志將數學應用到工程問題上去的人們而寫的。

最後，作者對 A. M. 拉茲馬德捷數學研究所的初級研究員 И. A. 金克拉德捷表示感謝，他做了為作表所必需的大部計算。

III. 米 凱 拉 德 捷

梯 比 里 西 1952 年 12 月

譯 者 序

本書作者米凱拉德捷同志對數值計算的理論與實際方面都有多年的研究，在本書出版以前，他曾寫了“偏微分方程的數值積分法”（1936）和“內插法的理論與實際”（1946，格魯吉亞文）兩書。正如他在原書序言以及為中譯本所寫的序言中所說，他還準備寫一本關於微分方程的數值解法的書。本書所述及的是近似方法的古典問題，好像是為微分方程的數值解法作準備的。全書共分十九章，按其內容來說，可分成下面五個部分：

1. 有限差分與有限和（第一章——第四章，第十九章），
2. 內插法與數值微分（第六章，第十章——第十二章），
3. 數值積分與求和（第十三章——第十六章），
4. 逼近法與最小二乘法（第五章，第七章——第九章），
5. 關於多變量函數的內插法、數值積分與求和（第十七章，第十八章）。

本書主要是討論函數的逼近問題以及數值微分和數值積分的公式。第六章是討論點內插公式的，在那裏給出了古典的牛頓公式和拉格朗日公式，並給出了這些公式的很多變形。然後在第十二章和第十三章中，作者將所處理的函數以合適的內插多項式來代替而引出數值微分和數值積分的公式。

俄羅斯和蘇聯的數學家們歐拉、契伯舍夫、馬爾柯夫、斯捷克洛夫、克雷洛夫、別茵斯坦、坎托洛維契、劉史捷爾尼克等等都曾從事探討數值積分問題並有深刻的研究：本書中對於這些數學家在這方面的工作都或多或少地給予敘述。

在實用上，常常遇到反常積分（瑕積分）的數值計算，書中提到了克雷洛夫法和坎托洛維契的奇點分出法。

在討論逼近問題時，必須知道逼近的性質（快慢）和準確的程度

(估計誤差),其次還要考慮對實際應用是否方便。作者很着重這一些,在推導出每個近似公式的同時,都談到收斂問題,對剩餘項作出估計以及指出關於合適應用公式的一些注意。

契伯舍夫創立了最優的逼近理論,別茵斯坦進一步發展了它。這個理論對逼近方法的理論是具有深刻的原則性意義的,並對逼近方法的收斂性及準確程度的問題提供了新的線索。書中對最優的逼近、平方逼近以及三角多項式的收斂都有簡短的敘述。

作為調和分析的基礎,書中述及富立葉級數和正交多項式(第八章)。我們知道,在用級數求解數學物理方程時,常常要求級數迅速收斂,如果級數收斂緩慢,則設法改善它。作者在本章中敘述了克雷洛夫改善三角級數收斂性的異點分離法。作為正交多項式的一個例子,書中詳述了勒讓達多項式,並給出它在近似計算積分時的應用。

在求和問題與多重積分(主要是二重積分)的近似計算問題上,作者用了一百多頁的篇幅,因而這一部分的材料是很豐富的。

很顯然,本書並不是將數值計算的各個方面都詳盡無遺的講到。例如,書中就沒有提及代數方程和線性方程組的近似解法,而關於經驗公式也講得很簡略。其次,本書在敘述上雖有些地方稍偏重於理論(如第七章),有些公式的係數數值不大切合實用(如關於第十二章的數值微分公式),當然我們也不應把本書當作數值計算的“萬應靈方大全”,認為在實際工作中所碰到的本書所講過的範圍內的數值計算問題,都可在書中查到相應的解法。

總之,本書在取材上雖稍有所偏,但仍不失為一本關於數值計算的有用參考書。

在蘇聯,由於力學和物理學的發展以及在共產主義建設事業中新穎技術的採用,近似計算這門學科有大量的科學工作者在從事研究,他們對這一領域的理論與實際方面已有很多創造性的成就。在我們祖國,隨着社會主義建設的蓬勃開展,為了實際的需要,也是愈來愈多的數學家注意到近似方法這門學科。毫無疑問,在近似計算這一學科中,與其他學科一樣,在最近將來,必定會開出美麗的花朵,

結出良好的果實。

我們深切感謝作者從遙遠的梯比里西給我們寄來爲中譯本所寫的序言以及勘誤表。我們已按照此表改正了原著的排印錯誤。但譯者翻譯本書是作爲一種學習來做的，各方面的知識都很不夠，因而誤譯之處，想來難免，敬望讀者隨時指正。

譯 者

1955 年 12 月於北京郵電學院

目 錄

作者爲中譯本所寫的序言	xi
原序	xii
譯者序	xiii
第一章 有限差分	1
§ 1. 各階差分, 差分表	1
§ 2. 計算差分的公式	3
§ 3. 在差分表中誤差的分佈規律	5
§ 4. 關於有限差分的一些定理	9
§ 5. 階乘多項式的差分	12
§ 6. 任一多項式按階乘多項式的展開	14
§ 7. 零的差分	14
§ 8. 接續的整數的冪次之和	15
§ 9. 中心差分	16
第二章 有限和	20
§ 10. 差分演算的反演算	20
§ 11. 初等求和法	22
§ 12. 分部求和法	25
第三章 差商	26
§ 13. 定義和記号	26
§ 14. 差商的對稱性以及其他性質	29
§ 15. 差商可作爲兩個行列式的比	29
§ 16. 藉助於積分表示的差商	31
§ 17. 呈複數積分形的差商	33
§ 18. 關於差商的一些定理	34
§ 19. 若干個函數的乘積的差商	35

1465807

§ 20. 任一多項式按冪次漸增的一些多項式的展開	38
§ 21. 帶有自變量的重複值的差商	39
§ 22. 差商的相繼各階導數	44
§ 23. 帶複自變量重複值的差商	45
§ 24. 關於差商和有限差分之間的聯系	47
§ 25. 若干個函數乘積的高階差分	49
第四章 反差商	50
§ 26. 定義和記號	50
§ 27. 將函數展成連分式	52
§ 28. 反差商可當作兩個行列式的比	53
§ 29. 反差商的一些性質	57
§ 30. 帶自變量重複值的反差商	58
第五章 均勻(最優的)逼近	61
§ 31. 引言	61
§ 32. 維爾斯塔拉斯關於逼近的第一定理	65
§ 33. 維爾斯塔拉斯第二定理	69
§ 34. 關於函數以多項式的最優的逼近	71
§ 35. 契伯舍夫多項式	75
§ 36. 別茵斯坦多項式的一些性質	80
§ 37. 關於被逼近的函數的導數與別茵斯坦逼近多項式間的聯系	84
§ 38. 最小偏差遞減的快慢	87
第六章 點內插	90
§ 39. 內插的目的	90
§ 40. 對於自變量的不等區間的牛頓公式	95
§ 41. 對於自變量的等距離值的牛頓公式	98
§ 42. 以首二次的多項式的逼近	102
§ 43. 對於複變函數的牛頓公式	103
§ 44. 拉格朗日內插公式	105
§ 45. 內插過程的收斂	107
§ 46. 取決於節的分佈的逼近性質	112
§ 47. 新的內插公式	113

§ 48. 高斯內插公式	117
§ 49. 斯蒂爾林內插公式	122
§ 50. 白塞爾公式	125
§ 51. 愛維雷特公式	128
§ 52. 另一些內插公式	129
§ 53. 關於謝巴爾德規則的意見	132
§ 54. 一些實用的指示	134
§ 55. 關於內插公式的誤差	136
§ 56. 對剩餘項的估計	138
§ 57. 對於以多項式逼近的某些說明	142
§ 58. 歐特肯的線性內插方法	143
§ 59. 納維利的線性內插方法	146
§ 60. 在自變量的重複值的情形下的線性內插方法	148
§ 61. 函數藉助於連分式的內插	150
§ 62. 帶自變量的重複值以反差商的內插	154
§ 63. 三角內插	155
§ 64. 關於三角內插多項式的收斂性	159
§ 65. 帶重節的內插	166
§ 66. 一般內插公式	167
§ 67. 一般內插公式的剩餘項	169
§ 68. 帶重節的另一些內插公式	172
§ 69. 藉助接續各階導數的內插	174
§ 70. 費頁爾內插方法	175

第七章 平方逼近 178

§ 71. 函數按最小二乘法的逼近	178
§ 72. 週期函數藉助於三角多項式的平方逼近	184
§ 73. 藉助於線性無關函數組的逼近表示	188
§ 74. 平方逼近的契伯舍夫公式	191
§ 75. 非線性的依從於一個或幾個參數的函數的逼近	200
§ 76. 分段連續函數的逼近	202
§ 77. 用以確定平方逼近的係數的方程組	205

§ 78. 平方誤差的計算	208
§ 79. 多個自變量函數的平方逼近	209
第八章 富立葉級數和正交多項式	213
§ 80. 正交函數組	213
§ 81. 以線性無關函數的逼近	217
§ 82. 富立葉級數收斂的性狀	220
§ 83. 非週期函數	223
§ 84. 富立葉級數的逐項積分和微分	223
§ 85. 函數以在任意區間內的富立葉級數來表示	226
§ 86. 函數及其導數的間斷對係數微小的階的影響	228
§ 87. 富立葉級數的剩餘項的估計	231
§ 88. 由某些多項式銜接而成的函數展成富立葉級數	232
§ 89. 改善三角級數收斂性的克雷洛夫方法	236
§ 90. 例	240
§ 91. 勒讓達多項式	245
§ 92. 勒讓達微分方程	247
§ 93. 正交性	247
§ 94. 遞推公式	248
§ 95. 勒讓達多項式的幾何性質	249
§ 96. 正規化因式	250
§ 97. 積分表示, 生成函數	251
§ 98. $X_n(x)$ 的界限	252
§ 99. 按勒讓達多項式的展開式	253
§ 100. 在間斷點的收斂性	256
§ 101. 勒讓達級數的均勻收斂性	258
§ 102. 關於帶有變限的積分的計算	259
§ 103. 計算重積分的公式	261
§ 104. 實用調和分析	263
§ 105. 關於依賴於參數的函數的積分的計算	271
§ 106. 多重富立葉級數	274
§ 107. 餘弦和正弦的乘積的級數	277

第九章 經驗公式	279
§108. 引言.....	279
§109. 觀察結果的修整.....	283
§110. 圖形法.....	287
§111. 平均值法.....	291
§112. 最小二乘法.....	295
第十章 數學表的擴張	296
§113. 關於表的擴張.....	296
§114. 擴表公式.....	297
第十一章 反內插法	304
§115. 反內插問題.....	304
§116. 藉助於逐步逼近的反內插.....	304
§117. 級數的轉換.....	307
§118. 反內插公式.....	309
§119. 拉格朗日和布尤爾曼公式.....	311
§120. 戴勞公式的應用.....	314
第十二章 數值微分法	320
§121. 帶差分的數值微分公式.....	320
§122. 馬爾柯夫公式.....	322
§123. 間隔的縮小.....	330
§124. 差分按階為漸增的差分的展開式.....	333
§125. 帶中心差分的數值微分公式.....	333
§126. 各階差分 and 導數之間的相依關係.....	340
§127. 不帶差分的公式.....	342
§128. 單側導數的公式.....	349
§129. 為作不帶差分的公式所需的表.....	350
§130. 關於不帶差分的公式的附記.....	357
§131. 關於未定係數法.....	359
第十三章 數值積分法	362
§132. 關於積分的近似計算.....	362

§133. 反常積分	368
§134. 矩形公式	369
§135. 新的內插公式	372
§136. 一般的求積公式	375
§137. 帶奇數個橫坐標的閉型求積公式	377
§138. 帶奇數個橫坐標的公式的剩餘項	379
§139. 帶偶數個橫坐標的閉型求積公式	384
§140. 帶偶數個橫坐標的公式的剩餘項	385
§141. 非閉型的求積公式	391
§142. 帶固定橫坐標的求積公式	395
§143. 帶有在積分區間外的橫坐標的求積公式	397
§144. 閉型公式的相對準確度	403
§145. 以兩個算出的結果表出誤差	407
§146. 例	409
§147. 高斯求積公式	412
§148. 契伯舍夫求積公式	418
§149. 馬爾柯夫求積公式	425
§150. 別茵斯坦關於求積公式的研究	428
§151. 新的求積公式	432
§152. 計算求積公式的係數和橫坐標的新方法	435
§153. 關於合適的利用求積公式的方法	436
§154. 斯捷克洛夫關於求積公式的研究	452
§155. 斯提爾捷斯積分的計算	456
§156. 帶差分的求積公式	459
§157. 帶有在曲折線上的差分的求積公式	464
§158. 斯捷克洛夫關於求積公式的收斂性的研究	466
§159. 關於反常積分的近似計算	469
§160. 帶被積函數的導數的求積公式	474
§161. 關於特定係數法	480
§162. 重積分的近似計算公式	493
§163. 關於估計定積分的不等式	496

第十四章 歐拉求和公式	500
§164. 引言.....	500
§165. 貝努里多項式.....	500
§166. 貝努里數.....	503
§167. 遞推公式.....	503
§168. 貝努里多項式的解析性質.....	504
§169. 貝努里數的性質.....	505
§170. 貝努里多項式的幾何性質.....	507
§171. 歐拉公式.....	509
§172. 對定積分的近似計算的應用.....	512
§173. 關於歐拉公式的收斂性.....	513
§174. 歐拉求和公式.....	517
§175. 無窮積分限的情形.....	519
§176. 正的幕次的和的一般公式.....	520
§177. 斯蒂爾林公式.....	520
§178. 奧斯特洛格拉特斯基公式.....	523
第十五章 帶差分的求和公式	525
§179. 引言.....	525
§180. 格列高利求和公式.....	525
§181. 拉普拉斯求和公式.....	526
§182. 高斯第一求和公式.....	528
§183. 高斯第二求和公式.....	530
§184. 拉包克求和公式.....	533
§185. 例.....	535
第十六章 多重求和	540
§186. 不同重的和, 和的表.....	540
§187. 多重和以函數的值的明顯表達式.....	543
§188. 以求和來計算矩.....	544
§189. 多重積分法.....	547
§190. 高斯求和公式的簡化.....	548
§191. 不定積分的列表.....	551

§192. 多重積分的求和公式	555
第十七章 多變量函數的內插法	561
§193. 二變量函數的內插法	561
§194. 二重差分	563
§195. 帶自變量的等距離值的二重差分	565
§196. 帶差商的內插公式	567
§197. 帶二個變量的拉格朗日內插公式	572
§198. 三個或多個變量的函數的內插公式	573
§199. 帶差分的內插公式	575
第十八章 求體積公式	585
§200. 引言	586
§201. 求積公式的重複應用	587
§202. 橫截面法	590
§203. 反常二重積分	590
§204. 可由積分內插公式得到的求體積公式	591
§205. 帶差分的求體積公式	600
§206. 包含被積函數的偏導數的求體積公式	601
§207. 在任意域內的二重積分	604
§208. 在矩形內的二重積分的近似計算	607
§209. 展佈在對稱域上的二重積分	613
§210. 對於圓的求體積公式	614
§211. 多重積分的近似公式的作法	618
第十九章 記號演算	621
§212. 記號多項式	621
§213. 移位算子	622
§214. 算子的無窮級數	622
§215. 算子演算的應用	624
§216. 差分算子與微分算子間的聯系	624
§217. 通論	625
參考文獻	627

第 一 章

有 限 差 分

§ 1. 各階差分. 差分表

設函數 $f(x)$ 對於一串點 $a + vh$ ($v = 0, 1, \dots, n'$) 的值:

$$f(a), f(a + h), \dots, f(a + nh)$$

是已知的. 表達式

$$\Delta f(a + vh) = f(a + (v + 1)h) - f(a + vh)$$

叫做函數 $f(x)$ 在點 $a + vh$ 處的第一階有限差分, 或簡稱一階差分.

例如:

$$\Delta f(a) = f(a + h) - f(a),$$

$$\Delta f(a + h) = f(a + 2h) - f(a + h),$$

.....

$$\Delta f(a + (n - 1)h) = f(a + nh) - f(a + (n - 1)h).$$

一階差分的一階差分叫做第二階差分或二階差分:

$$\Delta^2 f(a + vh) = \Delta[\Delta f(a + vh)] =$$

$$= \Delta f(a + (v + 1)h) - \Delta f(a + vh).$$

例如:

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a + h) - \Delta f(a),$$

$$\Delta^2 f(a + h) = \Delta f(a + 2h) - \Delta f(a + h)$$

等等.

二階差分的一階差分叫做三階差分並記作

$$\Delta^3 f(a), \Delta^3 f(a + h), \dots, \Delta^3 f(a + (n - 1)h),$$

一般說來, 第 n 階差分定義為