奥数教程

总主编
单墫 熊斌

·高二年级·

本册主编 刘诗雄

华东师范大学出版社

总主编　单　墫　熊　斌

奥数教程

·高二年级·

本册主编　刘诗雄
参 编 者　边红平　郭希连
　　　　　岑爱国　姚华鹏

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程．高二年级/刘诗雄主编．—上海：华东师范大学出版社，2000.10

ISBN 7-5617-2350-4

Ⅰ．奥…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 66419 号

奥数教程

·高二年级·

总 主 编　单 墫　熊 斌

策划组稿　倪 明　宋维锋

本册主编　刘诗雄

特约编辑　刘巧华

封面设计　高 山

版式设计　蒋 克

出版发行　华东师范大学出版社

市场部　电话 021-62865537

传真 021-62860410

社　　址　上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

http://www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏如东县印刷厂

开　　本　890×1240　32 开

印　　张　14.5

字　　数　408 千字

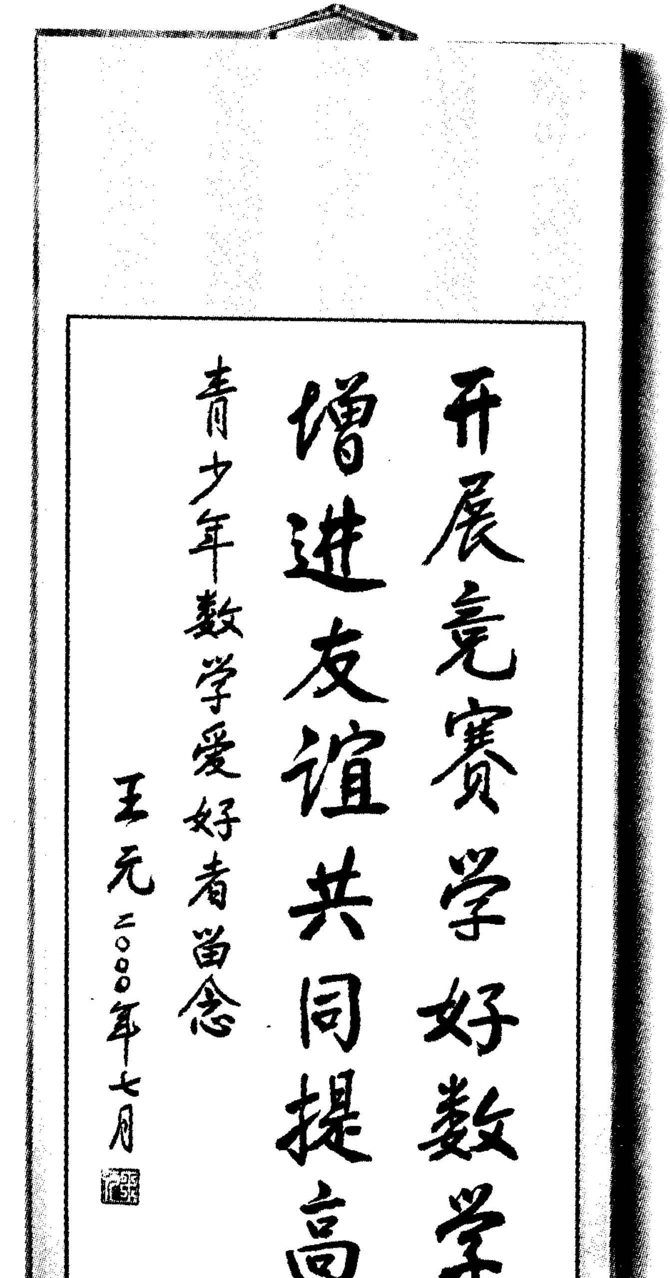
版　　次　2000 年 10 月第一版

印　　次　2001 年 12 月第五次

书　　号　ISBN 7-5617-2350-4/G·1101

定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人



中国数学奥林匹克委员会主席、中国科学院王元院士致青少年数学爱好者

前　　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”.

但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好.

的确，数学是中国人擅长的学科.如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制（不少国家至今还有12进制，60进制的残余）.

中国文字都是单音节，易于背诵.例如乘法表，学生很快就能掌握.再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”.但外国人，一学乘法，头就大了.不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率$\pi=3.14159\cdots$.背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了.可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背π先背诗，我们看来简直自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色.从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生学习兴趣，启迪学生智慧.例如：

“一百个和尚分一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解. 中国人却有多种算术解法，如将每个大和尚"变"成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个. 多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个人. 从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人. 或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100 \div (3 + 1) = 25$ 人.

中国人善于计算，尤其善于心算. 古代还有人会用手指帮助计算(所谓"掐指一算"). 同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘. 后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理，在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算，我国有不少论著)，比希腊人稍逊一筹. 但是，中国人善于向别人学习. 目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先. 曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受. 但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著. 在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明. 当代著名数学家陈省身先生对此特别赞赏. 他说:"今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一. ……去年也是第一名."(陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演《怎样把中国建为数学大国》)

陈省身先生还预言:"中国将在 21 世纪成为数学大国."

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力. 我们编写这套丛书，目的就是:

1. 进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩.

2. 使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法.

"天下大事，必作于细."我们希望，而且相信，这套丛书的出版，

在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用.

著名数学家、中国科学院院士、中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词. 我们表示衷心的感谢.

还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不可能很快问世.

本丛书从小学三年级至高中三年级共 10 册. 本册为高二年级，由刘诗雄主编.

单 墫 熊 斌

2000 年 8 月

目　录

第一讲　不等式的解法及其应用

一、知识要点和基本方法

1. 不等式的基本性质

$a \geqslant b \Longleftrightarrow a - b \geqslant 0.$

$a < b \Longleftrightarrow a - b < 0.$

$a > b \Longleftrightarrow a + c > b + c.$

$a > b,\ c > 0 \Longrightarrow ac > bc$

$a > b,\ c < 0 \Longrightarrow ac < bc$

$a > b$,且 a, b 同号 $\Longrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

$a > b > 0 \Longrightarrow a^n > b^n,\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}\ (n \in \mathbf{N})$

$a > b,\ b > c \Longrightarrow a > c$

$a > b,\ c > d \Longrightarrow a + c > b + d$

$a > b,\ c < d \Longrightarrow a - c > b - d$

$a > b > 0,\ 0 < c < d \Longrightarrow a/c > b/d,\ ad > bc$

$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow x^2 \leqslant a^2 \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

$|x| \geqslant a\ (a > 0) \Longleftrightarrow x^2 \geqslant a^2 \Longleftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$

$||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

2. 基本方法

(1) $ax > ab$,且 $a > 0$,则 $x > b$.

(2)“数轴标根法”:一般地,设多项式

$$F(x) = a(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

它的 n 个实根的大小顺序为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,把数轴分成 $n+1$ 个

区间：

$$(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \cdots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, +\infty),$$

自右至左给这些区间编上顺序号，则当 $a>0$ 时有：

(i) 在奇数区间内，$F(x)>0$；

(ii) 在偶数区间内，$F(x)<0$.

(3) 分式不等式的几种等价变形

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Longleftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\leqslant 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

(4) 无理不等式的等价变形

$$\sqrt{f(x)}\geqslant g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\geqslant 0 \\ f(x)\geqslant g^2(x) \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}<g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)>0 \\ g^2(x)>f(x) \end{cases}$$

(5) 在解指数、对数不等式时，应注意在不等式所含诸函数的公共定义域中求解不等式，否则可能扩大或缩小解集.

(6) 利用图象求解不等式.

二、例题精讲

例1 解不等式

$$\frac{x^3+2x^2-3x-16}{x^2+x-12}>1.$$

解 原不等式化为

$$\frac{x^3+2x^2-3x-16}{x^2+x-12}-1>0,$$

即 $$\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-12}>0,$$

即 $$(x^3+x^2-4x-4)(x^2+x-12)>0,$$

于是 $$(x+1)(x+2)(x-2)(x+4)(x-3)>0,$$

由“数轴标根法”可得原不等式的解集为 $(-4,-2)\cup(-1,2)\cup(3,+\infty)$.

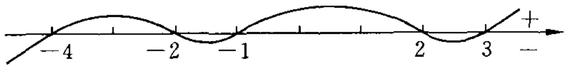


图 1-1

说明 解分式不等式，一般可通过作差，将分式不等式转化为整式不等式，再利用“数轴标根法”求解.

例 2 解不等式

$$a<\left|\frac{x}{3}-2\right|<\frac{1}{4}.$$

解 (1) 当 $a<0$ 时，

因为 $$-\frac{1}{4}<\frac{x}{3}-2<\frac{1}{4},\text{所以}$$

$$\frac{21}{4}<x<\frac{27}{4};$$

(2) 当 $0\leqslant a<\frac{1}{4}$ 时，原不等式可化为

$$a<\frac{x}{3}-2<\frac{1}{4}\quad \text{或}\quad -\frac{1}{4}<\frac{x}{3}-2<-a.$$

即 $$6+3a<x<\frac{27}{4}\quad \text{或}\quad \frac{21}{4}<x<6-3a;$$

(3) 当 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$x\in\varnothing$.

故 $a<0$ 时，原不等式解集为 $\left(\frac{21}{4},\frac{27}{4}\right)$；$0\leqslant a<\frac{1}{4}$ 时，原不等式解集为 $\left(\frac{21}{4},6-3a\right)\cup\left(6+3a,\frac{27}{4}\right)$；$a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，原不等式解集

为$\varnothing$.

说明 解含参数的不等式时,应注意正确分类.

例 3 解不等式

$$\sqrt{3x+5} \geqslant x-2.$$

解法一 原不等式可转化为

$$(1)\begin{cases}3x+5 \geqslant 0,\\ x-2 \geqslant 0,\\ 3x+5 \geqslant (x-2)^2;\end{cases} \quad 或 \quad (2)\begin{cases}3x+5 \geqslant 0,\\ x-2 < 0.\end{cases}$$

由不等式组(1)得 $\quad 2 \leqslant x \leqslant \dfrac{7+\sqrt{53}}{2}$,

由不等式组(2)得 $\quad -\dfrac{5}{3} \leqslant x < 2$.

综上可得原不等式的解集为 $\left[-\dfrac{5}{3}, \dfrac{7+\sqrt{53}}{2}\right]$.

解法二 由图象求解,如图 1-2 作函数 $y=\sqrt{3x+5}$, $y=x-2$ 的图象,两图象交点的横坐标为 $x=\dfrac{7+\sqrt{53}}{2}$,所以原不等式解集为 $\left\{x \mid -\dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{7+\sqrt{53}}{2}\right\}$.

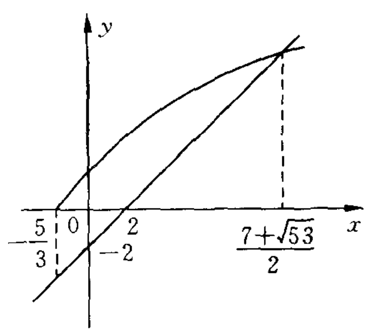


图 1-2

说明 图象求解法就是通过数形结合的思想解题,它在数学竞赛中应用很广.

例 4 设 $x \in \mathbf{R}$,不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

恒成立,求 a 的取值范围.

解法一 因原不等式恒成立,故

$$\frac{a+1}{a}>0 \tag{1}$$

且 $$\log_2\left[\frac{4(a+1)}{a}\right]^{x^2}+\log_2\left(\frac{2a}{a+1}\right)^{2x}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0 \tag{2}$$

由(2)得 $$\log_2\left[8^{x^2}\left(\frac{a+1}{2a}\right)^{x^2-2x+2}\right]>0.$$

所以 $$8^{x^2}\left(\frac{a+1}{2a}\right)^{x^2-2x+2}>1,$$

$$\left(\frac{a+1}{2a}\right)^{x^2-2x+2}>8^{-x^2},$$

而 $$8^{-x^2}\leqslant 1,$$

所以 $$\left(\frac{a+1}{2a}\right)^{x^2-2x+2}>1. \tag{3}$$

又 $$x^2-2x+2\geqslant 1>0,$$

要使(3)式恒成立,则

$$\frac{a+1}{2a}>1. \tag{4}$$

由(1),(4)式得 $$0<a<1.$$

解法二 设 $\log_2\left(\frac{a+1}{2a}\right)=t$,则原不等式可化为 $(3+t)x^2-2tx+2t>0$ 恒成立.

故 $$\begin{cases}3+t>0,\\(2t)^2-4(3+t)\cdot 2t<0,\end{cases}$$

解之得 $$t>0.$$

即 $$\log_2\frac{a+1}{2a}>0,$$

解得 $$0<a<1.$$

例5 当 a 为何值时,不等式组

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x \leqslant 1 & (1) \\ x-y+a=0 & (2) \end{cases}$$

有唯一解,并求之.

解 由(2)得 $y=x+a$,代入(1)得

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1 \leqslant 0 \tag{3}$$

因 $f(x)=2x^2+2(a+1)x+a^2-1$ 是开口向上的抛物线,故要使 $f(x) \leqslant 0$ 有唯一解,当且仅当抛物线与 x 轴有且仅有一个公共点,即 $\Delta=0$.

即 $$\Delta=4(a+1)^2-8(a^2-1)=0.$$

所以 $$a^2-2a-3=0.$$

解得 $$a=3 \quad 或 \quad a=-1.$$

当 $a=3$ 时,(3)的唯一解为 $x=-2$,代入(2)得 $y=1$.

当 $a=-1$ 时,(3)的唯一解为 $x=0$,代入(3)得 $y=-1$.

综上,当 $a=3$ 时,唯一解为 $(x, y)=(-2, 1)$;当 $a=-1$ 时,唯一解为 $(x, y)=(0, -1)$.

说明 许多不等式问题,可转化为二次函数问题,再利用二次函数的性质进行研究.

例6 函数

$$f(x)=\frac{(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)}{(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)}$$

的定义域用 D 表示,则使 $f(x)>0$,对于任何 $x \in D$ 均成立的实数 k 的集合是什么?

解 若 $k+1=0$,即 $k=-1$,则

$$f(x)=\frac{2x-10}{-3x^2-5}.$$

易知 $f(x)$ 的定义域 $D=\mathbf{R}$,但当 $x>5$ 时,$f(x)<0$,所以 $k=-1$ 不合条件.

若 $(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 有两个实根,设分别为 x_1, x_2. 若 $f(x)>0$ 对于任何 $x\in D$ 均成立,则 x_1, x_2 一定为 $(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)=0$ 的根,于是题设的等价条件为

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2k-1}>0, & (1)\\[2ex] x_1+x_2=-\dfrac{k+3}{k+1}=-\dfrac{k+1}{2k-1}, & (2)\\[2ex] x_1x_2=\dfrac{2k-8}{k+1}=\dfrac{k-4}{2k-1}, & (3)\\[2ex] \Delta=(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)\geqslant 0. & (4)\end{cases}$$

(2)和(3)的公共解为 $k=1$, 且 $k=1$ 满足(1), (4). 其实,当 $k=1$ 时,

$$f(x)=\frac{2x^2+4x-6}{x^2+2x-3},$$

它的定义域为 $D=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$.
当 $x\neq 1$, -3 时 $f(x)=2>0$.

若 $(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 无实根,则题设的等价条件为

$$\begin{cases}(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)<0,\\ (k+1)^2-4(2k-1)(k-4)\leqslant 0,\\ \dfrac{k+1}{2k-1}>0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7} \text{ 或 } k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7},\\[2ex] k\geqslant 5 \text{ 或 } k\leqslant\dfrac{3}{7},\\[2ex] k>\dfrac{1}{2} \text{ 或 } k<-1,\end{cases}$$

于是
$$k>\frac{15+16\sqrt{2}}{7} \text{ 或 } k<\frac{15-16\sqrt{2}}{7}.$$

所以,实数 k 的集合是

$$\left\{k \,\middle|\, k=1 \text{ 或 } k>\frac{15+16\sqrt{2}}{7} \text{ 或 } k<\frac{15-16\sqrt{2}}{7}\right\}.$$

例 7 设 $f(x)=\lg\left[\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}\right]$ 其中 a 是实数,n 是任意给定的自然数且 $n\geqslant 2$.

(1) 如果 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义,求 a 的取值范围;

(2) 当 $a\in(0,1]$ 且 $x\neq 0$ 时,求证

$$2f(x)<f(2x).$$

解 因 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$, $x\in(-\infty,1]$, 当 $f(x)$ 有意义时,需要

$$\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}>0,$$

即需 $$a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],$$

因 $-\left(\frac{k}{n}\right)^x$ 在 $(-\infty,1]$ 上是单调增函数(其中 $k=1,2,\cdots,n-1$),所以 $-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^x$ 在 $(-\infty,1]$ 也是单调增函数,故当 $x=1$ 时,它有最大值 $-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}=-\frac{1}{2}(n-1)$.

故只需 $a>-\frac{1}{2}(n-1)$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 就有意义,即

$$a\in\left(\frac{1-n}{2},+\infty\right).$$

(2) 当 $a\in(0,1]$, $x\neq 0$ 时,欲证 $2f(x)<f(2x)$,只需证明 $n\geqslant 2$ 时,

$$2\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}$$

$$<\lg\frac{1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a}{n}$$