975

O4-44
M18

东南大学等七所工科院校　编
马文蔚等　改编

物理学　第四版
习题分析与解答

马文蔚　主编
周遥生　殷　实　沈才康　包　刚　编

A0938241

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是与马文蔚等改编的面向21世纪课程教材《物理学(第四版)》相配套的习题分析与解答.四版与三版相比,更换了25%左右的习题,新增习题除了注意物理知识的覆盖面外,还尽可能联系工程实际,增加新的科技信息并扩大学生的知识面.本书对教材中所有的习题进行了详细的分析,力图通过分析,使学生对相关的物理规律有更深的认识,拓宽解题思路,并通过讨论使学生进一步明确计算结果的物理意义.

本书可供使用《物理学(第四版)》作为教材的师生作为教学参考书使用,也可供其他高等院校工科专业的师生和社会读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

《物理学》(第四版)习题分析与解答/马文蔚主编.
—北京:高等教育出版社,2000
ISBN 7-04-008585-2

Ⅰ.物… Ⅱ.马… Ⅲ.物理学-高等学校-解题
Ⅳ.04-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第22448号

物理学 第四版 习题分析与解答
马文蔚 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2000年8月第1版
印　张	22.5	印　次	2000年8月第1次印刷
字　数	410 000	定　价	19.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

前　言

本书是根据马文蔚教授等改编的面向21世纪课程教材《物理学》(第四版)一书中的习题而作的分析与解答.四版与三版相比,更换了25%左右的习题.新增习题除了注意物理知识的覆盖面以外,尽可能联系工程实际,增加新的科技信息并扩大学生的知识面.

物理学的基本概念和规律是在分析具体物理问题的过程中逐步被建立和掌握的,解题之前必须对所研究的物理问题建立一个清晰的图象,从而建立起解题思路.只有这样,才有可能使学生在解完习题之后留下一些值得回味的东西,体会到物理问题所蕴含的奥妙和涵义,通过举一反三,提高自己分析问题和解决问题的能力.鉴于此,重分析、简解答的模式成为编写本书的指导思想.全书力求突出对题目的分析,使学生在解题之前,能通过分析对相关的物理规律有进一步的认识;结合物理学解题方法和技巧的介绍和运用,拓宽学生的解题思路,并通过讨论计算结果来进一步明确物理意义.对于解题过程,本书则尽可能做到简明扼要,让学生自己去完成具体计算.编者企盼这本书能对学生学习能力的提高和学习素质的培养有所帮助.

本书采用了1996年全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》和中华人民共和国国家标准GB3100～3102－93中规定的法定计量单位.

本书由马文蔚教授主编,由周遥生、殷实、沈才康、包刚编写,全书由周遥生统稿.西北工业大学宋士贤教授审阅了全书并提出了许多详细中肯的修改意见,在此,编者致以诚挚的感谢.

本书是编者的初次尝试,加之水平有限,错误、疏漏在所难免,敬请读者批评指正.

编者

1999年7月于南京

第一章　质点运动学

1－1　已知质点沿 x 轴作直线运动,其运动方程为 $x=2\text{ m}+(6\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t^2-(2\text{ m}\cdot\text{s}^{-3})t^3$.求:(1)质点在运动开始后 4.0 s 内位移的大小;(2)质点在该时间内所通过的路程.

分析　位移和路程是两个完全不同的概念.只有当质点作直线运动且运动方向不改变时,位移的大小才会与路程相等.质点在 t 时间内的位移 Δx 的大小可直接由运动方程得到:$\Delta x=x_t-x_0$,而在求路程时,就必须注意到质点在运动过程中可能改变运动方向,此时,位移的大小和路程就不同了.为此,需根据 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ 来确定其运动方向改变的时刻 t_p,求出 $0\sim t_p$ 和 $t_p\sim t$ 内的位移大小 Δx_1、Δx_2,则 t 时间内的路程 $s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|$,见图 1－1.

解　(1) 质点在 4.0 s 内位移的大小

$$\Delta x = x_4 - x_0 = -32\text{ m}$$

(2) 由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(12\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t-(6\text{ m}\cdot\text{s}^{-3})t^2=0$$

得知质点的换向时刻为

$$t_p = 2\text{ s}(t = 0 \text{ 不合题意})$$

则

$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = 8.0\text{ m},$$

$$\Delta x_2 = x_4 - x_2 = -40\text{ m}$$

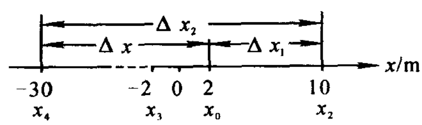


图 1－1

所以,质点在 4.0 s 时间间隔内的路程为

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 48\text{ m}$$

1－2　一质点沿 x 轴方向作直线运动,其速度与时间的关系如图 1－2(a)所示.设 $t=0$ 时,$x=0$.试根据已知的 $v-t$ 图,画出 $a-t$ 图以及 $x-t$ 图.

分析　根据加速度的定义可知,在直线运动中 $v-t$ 曲线的斜率为加速度的大小(图中 AB、CD 段斜率为定值,即匀变速直线运动;而线段 BC 的斜率为 0,加速度为零,即匀速直线运动).加速度为恒量,在 $a-t$ 图上是平行于 t 轴的直线,由 $v-t$ 图中求出各段的斜率,即可作出 $a-t$ 图线.又由速度的定义可知,$x-t$ 曲线的斜率为速度的大小.因此,匀速直线运动所对应的 $x-t$ 图应是

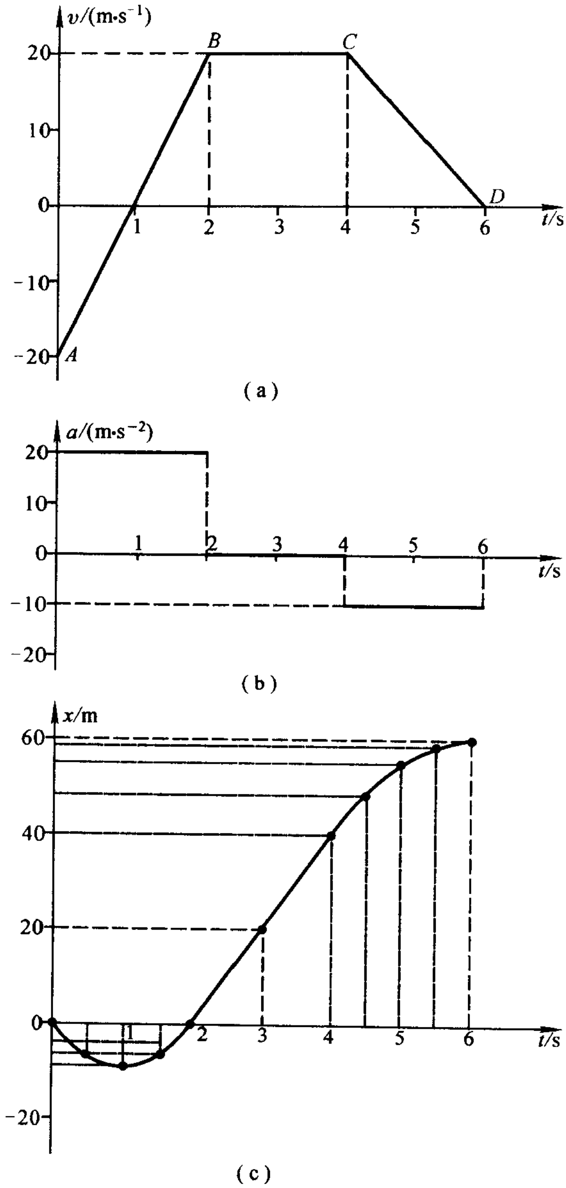


图 1－2

一直线，而匀变速直线运动所对应的 $x-t$ 图为 t 的二次曲线. 根据各段时间内的运动方程 $x=x(t)$，求出不同时刻 t 的位置 x，采用描数据点的方法，可作出 $x-t$ 图.

解　将曲线分为 AB、BC、CD 三个过程，它们对应的加速度值分别为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$a_{AB}=\frac{v_B-v_A}{t_B-t_A}=20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\qquad（匀加速直线运动）$$

$$a_{BC}=0\qquad（匀速直线运动）$$

$$a_{CD}=\frac{v_D-v_C}{t_D-t_C}=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\qquad（匀减速直线运动）$$

根据上述结果即可作出质点的 $a-t$ 图[图 1－2(b)].

在匀变速直线运动中,有

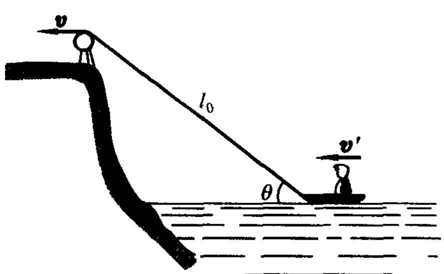
$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

由此,可计算在 0～2 s 和 4～6 s 时间间隔内各时刻的位置分别为

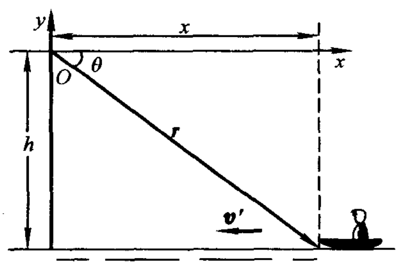
t/s	0	0.5	1	1.5	2	4	4.5	5	5.5	6
x/m	0	−7.5	−10	−7.5	0	40	48.7	55	58.7	60

用描数据点的作图方法,由表中数据可作 0～2 s 和 4～6 s 时间内的 $x-t$ 图.在 2～4 s 时间内,质点是作 $v=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的匀速直线运动,其 $x-t$ 图是斜率 $k=20$ 的一段直线[图 1－2(c)].

1－3　如图1－3(a)所示,湖中有一小船.岸上有人用绳跨过定滑轮拉船靠岸.设滑轮距水面高度为 h,滑轮到原船位置的绳长为 l_0.试求:当人以匀速 v 拉绳时,船运动的速度 v' 为多少?



(a)



(b)

图 1－3

分析　首先选定船为研究的对象,它的速度 v' 也就是绳端点的移动速度,绳上各点的移动速度是不相同的;而绳速 v 是指收绳的速率,是绳上各点沿绳运动的快慢,也就是绳上各点速度在绳方向的分量.绳速和船速是两个不同的概念.认为绳上各点的速度相同或将船的速度大小 v' 视为绳速 v 的分量均是错误

的.

定量描述船的运动状态和规律,必须建立确定的坐标系(所选坐标系可以不相同),写出船在此坐标系中的运动方程,并根据速度和加速度的定义式,即可解出问题.

解 1 取如图1-3(b)所示的直角坐标系.船的运动方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+(-h)\boldsymbol{j}$$

船的运动速度为

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{r^2-h^2}\,\boldsymbol{i}=\left(1-\frac{h^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

而收绳的速率 $v=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,且因 $r=l_0-vt$,故

$$\boldsymbol{v}'=-v\left[1-\frac{h^2}{(l_0-vt)^2}\right]^{-1/2}\boldsymbol{i}$$

解 2 取图1-3(b)所示的极坐标(r,θ),则

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$$

$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r$ 是船的径向速度,$r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$ 是船的横向速度,而$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是收绳的速率.由于船速 $\boldsymbol{v}'$ 与径向速度之间夹角为θ,所以

$$\boldsymbol{v}'=-\frac{v}{\cos\theta}\boldsymbol{i}=-v\left[1-\frac{h^2}{(l_0-vt)^2}\right]^{-1/2}\boldsymbol{i}$$

由此可知,收绳的速率只是船速沿绳方向的分量.

1-4 一升降机以加速度1.22 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$上升,当上升速度为 2.44 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$时,有一螺丝自升降机的天花板上松脱,天花板与升降机的底面相距 2.74 m.计算:(1)螺丝从天花板落到底面所需要的时间;(2)螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离.

分析 在升降机与螺丝之间有相对运动的情况下,一种处理方法是取地面为参考系,分别讨论升降机竖直向上的匀加速度运动和初速不为零的螺丝的自由落体运动,列出这两种运动在同一坐标系中的运动方程 $y_1=y_1(t)$和 $y_2=y_2(t)$,并考虑它们相遇,即位矢相同这一条件,问题即可解;另一种方法是取升降机(或螺丝)为参考系,这时,螺丝(或升降机)相对它作匀加速运动,但是,此加速度应该是相对加速度.升降机厢的高度就是螺丝(或升降机)运动的路程.

解 1 (1) 以地面为参考系,取如图 1-4 所示的坐标系,升降机与螺丝的运动方程分别为

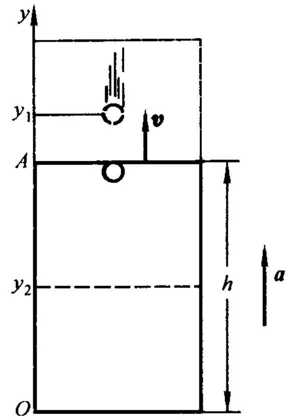


图 1－4

$$y_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

当螺丝落至底面时，有 $y_1 = y_2$，即

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g + a}} = 0.705\ \mathrm{s}$$

(2) 螺丝相对升降机外固定柱子下降的距离为

$$d = h - y_2 = - v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 0.716\ \mathrm{m}$$

解 2　(1) 以升降机为参考系，此时，螺丝相对它的加速度大小 $a' = g + a$，螺丝落至底面时，有

$$0 = h - \frac{1}{2}(g + a)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g + a}} = 0.705\ \mathrm{s}$$

(2) 由于升降机在 t 时间内上升的高度为

$$h' = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

则

$$d = h - h' = 0.716\ \mathrm{m}$$

1－5　一质点 P 沿半径 $R = 3.00\ \mathrm{m}$ 的圆周作匀速率运动，运动一周所需时间为 20.0 s，设 $t = 0$ 时，质点位于 O 点．按图 1－5(a) 中所示 Oxy 坐标系，求 (1) 质点 P 在任意时刻的位矢；(2) 5 s 时的速度和加速度．

分析　该题属于运动学的第一类问题，即已知运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 求质点运动的一切信息（如位置矢量、位移、速度、加速度）．在确定运动方程时，若取以 (0,3) 为原点的 $O'x'y'$ 坐标系，并采用参数方程 $x' = x'(t)$ 和 $y' = y'(t)$ 来表示圆周运动是比较方便的．然后，运用坐标变换 $x = x_0 + x'$ 和 $y = y_0 + y'$，将所得参数方程转换至 Oxy 坐标系中，即得 Oxy 坐标系中质点 P 在任意时刻的位矢．采用对运动方程求导的方法可得速度和加速度．

解　如图所示，在 $O'x'y'$ 坐标系中，因 $\theta = \frac{2\pi}{T}t$，则质点 P 的参数方程为

$$x' = R\sin\frac{2\pi}{T}t,\ y' = -R\cos\frac{2\pi}{T}t$$

坐标变换后，在 Oxy 坐标系中有

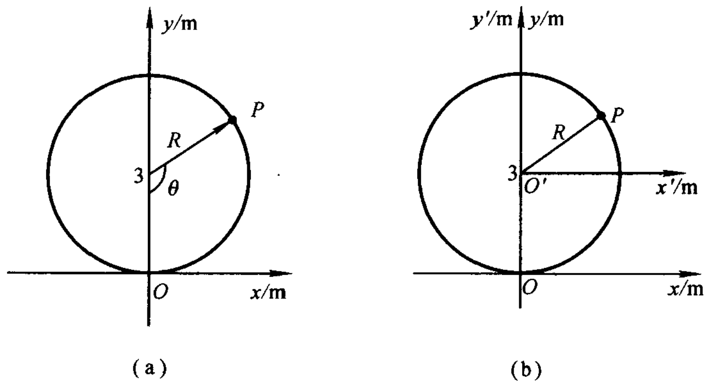


图 1-5

$$x = x' = R\sin\frac{2\pi}{T}t, y = y' + y_0 = -R\cos\frac{2\pi}{T}t + R$$

则质点 P 的位矢方程为

$$\boldsymbol{r} = R\sin\frac{2\pi}{T}t\boldsymbol{i} + \left(-R\cos\frac{2\pi}{T}t + R\right)\boldsymbol{j}$$

$$= (3\ \mathrm{m})\sin[(0.1\pi\ \mathrm{s^{-1}})t]\boldsymbol{i} + (3\ \mathrm{m})[1 - \cos(0.1\pi\ \mathrm{s^{-1}})t]\boldsymbol{j}$$

5 s 时的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = R\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t\boldsymbol{i} + R\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t\boldsymbol{j} = (0.3\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\frac{2\pi}{T}t\boldsymbol{i} + R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\frac{2\pi}{T}t\boldsymbol{j} = (-0.03\pi^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i}$$

1-6 一质点自原点开始沿抛物线 $y = bx^2$ 运动，它在 Ox 轴上的分速度为一恒量，其值为 $v_x = 4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$b = 0.5\ \mathrm{m^{-1}}$. 求质点位于 $x = 2.0$ m 处的速度和加速度.

分析 抛物线 $y = bx^2$ 是质点的轨迹方程，它是参数方程

$$x = x(t), y = y(t)$$

合成的结果. 由于 v_x 是已知的，可得 x 方向上的运动方程 $x = x(t)$ 及加速度分量 a_x，由 $x = x(t)$ 和轨迹方程 $y = f(x)$，求得运动方程在 y 方向上的分量式 $y = y(t)$ 及其加速度分量 a_y，再由速度和加速度的分量可得其矢量表达式.

解 因 $v_x = 4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 为一常量，故 $a_x = 0$. 当 $t = 0$ 时，$x = 0$，由 $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 积分可得

$$x = v_x t \tag{1}$$

又由质点的抛物线方程，有

$$y = bx^2 = b(v_x t)^2 \tag{2}$$

由 y 方向的运动方程可得该方向的速度和加速度分量分别为

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2bv_x^2 t \tag{3}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 2bv_x^2 \tag{4}$$

当质点位于 $x=2.0\ \mathrm{m}$ 时,由上述各式可得

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} = (4.0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{i} + (8.0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} = (16\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\boldsymbol{j}$$

1-7 质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r} = (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})t\boldsymbol{i} + [19.0\ \mathrm{m} - (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2]\boldsymbol{j}$.求:(1)质点的轨迹方程;(2)在 $t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 到 $t_2=2.00\ \mathrm{s}$ 时间内的平均速度;(3)$t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 时的速度及切向和法向加速度.

分析 根据运动方程可直接写出其分量式 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$,从中消去参数 t,即得质点的轨迹方程.平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率,即 $\overline{\boldsymbol{v}} = \Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$,它与时间间隔 Δt 的大小有关,当 $\Delta t \to 0$ 时,平均速度的极限即瞬时速度 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.切向和法向加速度是指在自然坐标下的分矢量 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ 和 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$,前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率,即 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$,后者只反映质点速度方向的变化,它可由总加速度 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ 得到.

解 (1) 由参数方程

$$x = (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})t,\ y = 19.0\ \mathrm{m} - (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2$$

消去 t 得质点的轨迹方程:

$$y = 19.0\ \mathrm{m} - (0.50\ \mathrm{m}^{-1})x^2$$

(2) 在 $t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 到 $t_2=2.00\ \mathrm{s}$ 时间内的平均速度

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{i} - (6.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}(t) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{i} - (4.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = (4.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\boldsymbol{j}$$

则 $t_1=1.00\ \mathrm{s}$ 时的速度

$$\boldsymbol{v}(t)\,|_{t=1\,\mathrm{s}} = (2.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{i} - (4.00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

切向和法向加速度分别为

$$a_t|_{t=1\,s} = \frac{dv}{dt}e_t = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)e_t = (3.58\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})e_t$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}e_n = (1.79\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})e_n$$

1－8 质点的运动方程为

$$x = (-10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})t + (30\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2$$
$$y = (15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})t - (20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2$$

试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) 加速度的大小和方向.

分析 由运动方程的分量式可分别求出速度、加速度的分量,再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向.

解 (1) 速度的分量式为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} + (60\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} - (40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t$$

当 $t=0$ 时,$v_{0x}=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,$v_{0y}=15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,则初速度大小为

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 18.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

设 $\boldsymbol{v}_0$ 与 x 轴的夹角为α,则

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = -\frac{3}{2}$$

$$\alpha = 123°41'$$

(2) 加速度的分量式为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

则加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 72.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

设 $\boldsymbol{a}$ 与x 轴的夹角为β,则

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{2}{3}$$

$$\beta = -33°41'(\text{或 } 326°19')$$

1－9 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=(6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i}+(4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{j}$,在 $t=0$ 时,其速度为零,位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$.求:(1)在任意时刻的速度和位置矢量;(2)质点在 Oxy 平面上的轨迹方程,并画出轨迹的示意图.

分析 该题属于质点运动学的第二类问题,即已知速度或加速度的表达式

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$,求运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,它是第一类问题的逆过程,是一段时间内运动量的积累.处理这类问题,必须在给定的初始条件下,采用积分的方法来解决.

解　由加速度定义式,根据初始条件$t_0=0$ 时$v_0=0$,积分可得

$$\int_0^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^{t}\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{t}[(6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\boldsymbol{i}+(4\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v}=(6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\boldsymbol{i}+(4\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\boldsymbol{j}$$

又由 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$及初始条件$t=0$ 时,$\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$,积分可得

$$\int_{r_0}^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^{t}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\int_0^{t}[(6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\boldsymbol{i}+(4\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r}=[10\ \mathrm{m}+(3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2]\boldsymbol{i}+[(2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2]\boldsymbol{j}$$

由上述结果可得质点运动方程的分量式,即

$$x=10\ \mathrm{m}+(3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2$$

$$y=(2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2$$

消去参数 t,可得运动的轨迹方程

$$3y=2x-20\ \mathrm{m}$$

这是一个直线方程.直线斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{tg}\ \alpha=\dfrac{2}{3}$,$\alpha=33°41'$.轨迹如图 1－9 所示.

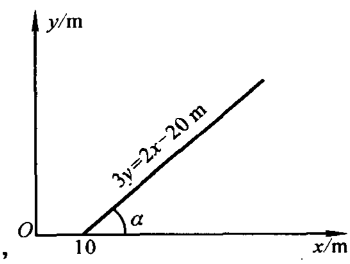


图 1－9

1－10　飞机以100 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$的速度沿水平直线飞行,在离地面高为 100 m 时,驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处.问:(1)此时目标在飞机下方前多远?(2)投放物品时,驾驶员看目标的视线和水平线成何角度?(3)物品投出 2.00 s 后,它的法向加速度和切向加速度各为多少?

分析　物品空投后作平抛运动.忽略空气阻力的条件下,由运动独立性原理知,物品在空中沿水平方向作匀速直线运动,在竖直方向作自由落体运动.到达地面目标时,两方向上运动时间是相同的.因此,分别列出其运动方程,运用时间相等的条件,即可求解.

此外,平抛物体在运动过程中只存在竖直向下的重力加速度.为求特定时刻 t 时物体的切向加速度和法向加速度,只需求出该时刻它们与重力加速度之间的夹角 α 或β.由图 1－10 可知,在特定时刻 t,物体的切向加速度和水平线之间的夹角 α,可由此时刻的两速度分量 v_x、v_y 求出,这样,也就可将重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的切向和法向分量求得.

解 (1) 取如图所示的坐标,物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x = vt, y = \frac{1}{2}gt^2$$

飞机水平飞行速度 $v = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,飞机离地面的高度 $y = 100\ \mathrm{m}$,由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离

$$x = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = 452\ \mathrm{m}$$

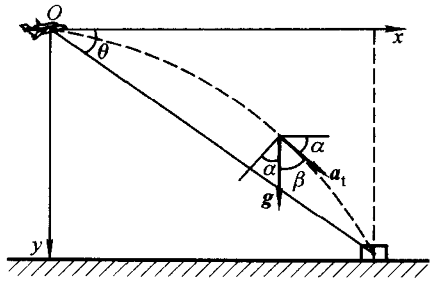


图 1-10

(2) 视线和水平线的夹角为

$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 12.5°$$

(3) 在任意时刻物品的速度与水平轴的夹角为

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{v_y}{v_x} = \mathrm{arctg}\,\frac{gt}{v}$$

取自然坐标,物品在抛出 2 s 时,重力加速度的切向分量与法向分量分别为

$$a_t = g\sin\alpha = g\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{gt}{v}\right) = 1.88\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_n = g\cos\alpha = g\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{gt}{v}\right) = 9.62\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

1-11 一足球运动员在正对球门前25.0 m 处以 20.0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$的初速率罚任意球,已知球门高为 3.44 m.若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门,问他应在与地面成什么角度的范围内踢出足球?(足球可视为质点)

分析 被踢出后的足球,在空中作斜抛运动,其轨迹方程可由质点在竖直平面内的运动方程得到.由于水平距离 x 已知,球门高度又限定了在 y 方向的范围,故只需将 x、y 值代入即可求出.

解 取图示坐标系 Oxy,由运动方程

$$x = vt\cos\theta, \quad y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

消去 t 得轨迹方程

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{g}{2v^2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta)x^2$$

以 $x = 25.0\ \mathrm{m}$, $v = 20.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$及 $3.44\ \mathrm{m} \geqslant y \geqslant 0$ 代入后,可解得

$$71.11° \geqslant \theta_1 \geqslant 69.92°$$

$$27.92^\circ \geqslant \theta_2 \geqslant 18.89^\circ$$

如何理解上述角度的范围？在初速一定的条件下，球击中球门底线或球门上缘都将对应有两个不同的投射倾角(如图 1－11 所示). 如果以 $\theta>71.11^\circ$ 或 $\theta<18.89^\circ$踢出足球，都将因射程不足而不能直接射入球门；由于球门高度的限制，θ 角也并非能取 71.11° 与 18.89° 之间的任何值. 当倾角取值为 $27.92^\circ<\theta<69.92^\circ$时，踢出的足球将越过门缘而离去，这时球也不能射入球门. 因此可取的角度范围只能是解中的结果.

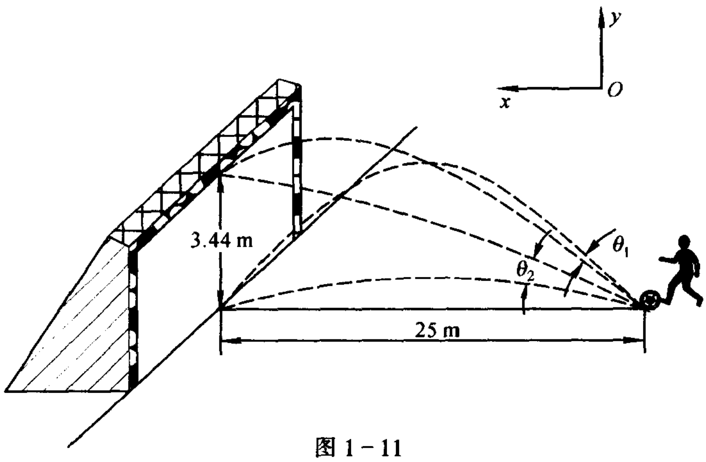


图 1－11

1－12　设从某一点 O 以同样的速率，沿着同一竖直面内各个不同方向同时抛出几个物体. 试证：在任意时刻，这几个物体总是散落在某一圆周上.

分析　由于各物体抛出时的角度不同，在坐标系中，它们在同一时刻的位置也不同. 为求出任意时刻各物体所处的位置，可将物体抛出后的平面运动方程写成参数方程 $x=x(\theta,t)$和 $y=y(\theta,t)$，从两式中消去 θ，即可得到本题所要证明的结果.

证　取物体抛出点为坐标原点，建立如图 1－12 所示的坐标系. 物体运动的参数方程为

$$x = v_0 t\cos\theta,\quad y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

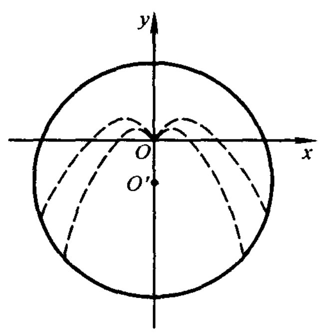


图 1－12

消去式中参数 θ，得任意时刻的轨迹方程为

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = (v_0 t)^2$$

这是一个以$\left(0,-\frac{1}{2}gt^2\right)$为圆心、$v_0 t$ 为半径的圆方程(如图 1－12 所示)，它代

表着所有物体在任意时刻 t 的位置.

1-13　一质点在半径为 R 的圆周上以恒定的速率运动,质点由位置 A 运动到位置 B,OA 和 OB 所对的圆心角为 $\Delta\theta$.(1)试证位置 A 和 B 之间的平均加速度为 $\overline{a}=\sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}v^2/(R\Delta\theta)$;(2)当 $\Delta\theta$ 分别等于 90°、30°、10°和 1°时,平均加速度各为多少? 并对结果加以讨论.

分析　瞬时加速度和平均加速度的物理含义不同,它们分别表示为 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$.在匀速率圆周运动中,它们的大小分别为 $a_n=\frac{v^2}{R}$,$\overline{a}=\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t}$,式中 $|\Delta\boldsymbol{v}|$ 可由图 1-13(b)中的几何关系得到,而 Δt 可由转过的角度 $\Delta\theta$ 求出.

由计算结果能清楚地看到两者之间的关系,即瞬时加速度是平均加速度在 $\Delta t\to0$ 时的极限值.

解　(1) 由图 1-13 可看到 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$,故

$$|\Delta\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\Delta\theta}=v\sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}$$

而

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v}=\frac{R\Delta\theta}{v}$$

所以

$$\overline{a}=\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t}=\sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}\frac{v^2}{R\Delta\theta}$$

(2) 将 $\Delta\theta$=90°、30°、10°、1°分别代入上式,得

$$\overline{a}_1\approx0.900\,3\frac{v^2}{R},\overline{a}_2\approx0.988\,6\frac{v^2}{R},$$

$$\overline{a}_3\approx0.998\,7\frac{v^2}{R},\overline{a}_4\approx1.000\frac{v^2}{R}$$

上结果表明,当 $\Delta\theta\to0$ 时,匀速率圆周运动的平均加速度趋近于一极限值,该值即为法向加速度 $\frac{v^2}{R}$.

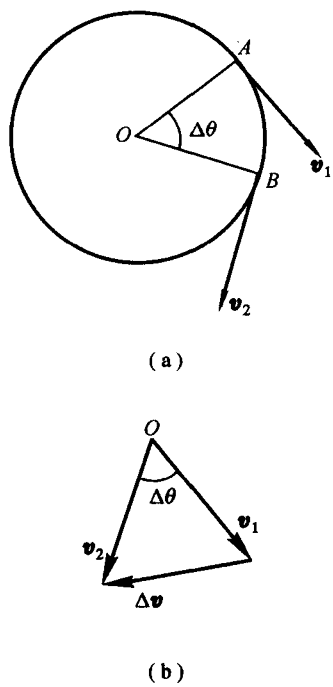


图 1-13

1-14　一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动,v_0、b 都是常量.(1)求 t 时刻质点的总加速度;(2)t 为何值时总加速度在数值上等于 b?(3)当加速度达到 b 时,质点已沿圆周运行了多少圈?

分析　在自然坐标中，s 表示圆周上从某一点开始的曲线坐标．由给定的运动方程 $s=s(t)$，对时间 t 求一阶、二阶导数，即是沿曲线运动的速度 v 和加速度的切向分量 a_t，而加速度的法向分量为 $a_n=v^2/R$．这样，总加速度为 $\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n$．至于质点在 t 时间内通过的路程，即为曲线坐标的改变量 $\Delta s=s_t-s_0$．因圆周长为 $2\pi R$，质点所转过的圈数自然可求得．

解　(1) 质点作圆周运动的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-b,a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}}{R}$$

其方向与切线之间的夹角为

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_t}=\operatorname{arctg}\left[-\frac{(v_0-bt)^2}{Rb}\right]$$

(2) 要使 $|\boldsymbol{a}|=b$，由 $\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v-bt)^4}=b$ 可得

$$t=\frac{v_0}{b}$$

(3) 从 $t=0$ 开始到 $t=v_0/b$ 时，质点经过的路程为

$$s=s_t-s_0=\frac{v_0^2}{2b}$$

因此质点运行的圈数为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi bR}$$

1－15　碟盘是一张表面覆盖一层信息记录物质的塑性圆片．若碟盘可读部分的内外半径分别为 2.50 cm 和 5.80 cm．在回放时，碟盘被以恒定的线速度由内向外沿螺旋扫描线(阿基米德螺线)进行扫描．(1)若开始时读写碟盘的角速度为 50.0 $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，则读完时的角速度为多少？(2)若螺旋线的间距为 1.60 μm，求扫描线的总长度和回放时间．

分析　阿基米德螺线是一等速的螺旋线，在极坐标下，它的参数方程可表示为 $r=r_0+a\theta$，式中 r 为极径，r_0 为初始极径，θ 为极角，a 为常量．它的图线是

等间距的，当间距为 d 时，常量 $a=d/2\pi$. 因此，扫描线的总长度可通过积分 $s=\int r\mathrm{d}\theta$ 得到.

解　(1) 由于线速度恒定，则由 $v=\omega r$，可得 $\omega_1 r_1=\omega_2 r_2$，故碟盘读完时的角速度为

$$\omega_2=\omega_1 r_1/r_2=21.6\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

(2) 在可读范围内，螺旋线转过的极角 $\theta=2\pi(r_2-r_1)/d$，故扫描线的总长度为

$$s=\int r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi(r_2-r_1)/d}\left(r_1+\frac{d}{2\pi}\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(r_2^2-r_1^2)}{d}=5.38\times10^3\ \mathrm{m}$$

碟盘的回放时间为

$$t=s/v=4.10\times10^3\ \mathrm{s}\approx1.15\ \mathrm{h}$$

本题在求扫描线的总长度时，也可采用平均周长的计算方法，即

$$s=2\pi n\frac{r_2+r_1}{2}=2\pi\frac{r_2+r_1}{2}\frac{r_2-r_1}{d}=5.38\times10^3\ \mathrm{m}$$

1-16　地面上垂直竖立一高20.0 m的旗杆，已知正午时分太阳在旗杆的正上方，求在下午2时正，杆顶在地面上的影子的速度的大小. 在何时刻杆影将伸展至20.0 m长？

分析　为求杆顶在地面上影子速度的大小，必须建立影长与时间的函数关系，即影子端点的位矢方程. 根据几何关系，影长可通过太阳光线对地转动的角速度求得. 由于运动的相对性，太阳光线对地转动的角速度也就是地球自转的角速度. 这样，影子端点的位矢方程和速度均可求得.

解　设太阳光线对地转动的角速度为 ω，从正午时分开始计时，则杆的影长为 $s=h\,\mathrm{tg}\,\omega t$，下午2时正，杆顶在地面上影子的速度大小为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}=1.94\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

当杆长等于影长时，即 $s=h$，则

$$t=\frac{1}{\omega}\mathrm{arctg}\frac{s}{h}=\frac{\pi}{4\omega}=3\times60\times60\ \mathrm{s}$$

即为下午3时正.

1-17　一半径为0.50 m的飞轮在启动时的短时间内，其角速度与时间的平方成正比. 在 $t=2.0$ s时测得轮缘一点的速度值为4.0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 求：(1)该轮在 $t'=0.5$ s的角速度，轮缘一点的切向加速度和总加速度；(2)该点在2.0 s内所转过的角度.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com