【苏】B. A. 斯维特里兹基 著

机械系统的随机振动

孚 邬经湘译 庄表中 陈乃立校

高等教育出版社

机械系统的随机振动

【苏联】B. A. 斯维特里兹基 著
谈开孚 邹经湘 译
庄表中 陈乃立 校

高等教育出版社

本书系根据苏联机器制造出版社(Издательство«Машиностроение»)1976年出版的B.A.斯维特里兹基著《机械系统的随机振动》(Случайные колебания механических систем)一书译出。全书较简明而系统地介绍了线性系统随机振动的基本理论和计算方法,书中例题丰富,适于作高等院校随机振动课程的教材或参考书,也可供从事这方面研究工作的工程技术人员参考。

机械系统的随机振动

【苏联】B.A.斯维特里兹基 著

谈开孚 邹经湘 译

庄表中 陈乃立 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.375 字数 170,000

1986年 6 月第 1 版 1986年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—4,000

书号 15010·0654 定价 1.65 元

译 者 序

近二、三十年来，随机振动理论和方法，在许多科学技术领域内，例如航空、航天、船舶、机械、建筑等，得到了广泛应用和迅速发展。特别是六十年代中期以来，由于快速富里叶变换(FFT)算法及有限元算法的出现和应用，加上电子计算机的发展和普及，使得随机振动的讯号处理速度在很短的时间内提高了好几个数量级。由于这种日益增长的方便性和普遍性，使得随机振动这门科学已逐渐成为理工科院校许多专业的大学生和研究生的课程。

本书比较简明而系统地介绍了线性系统随机振动的基本理论和计算方法，书中例题丰富，可作为高等院校随机振动课程的教材或参考书，也可以作为从事这方面研究工作的工程技术人员的参考书。

本书第一章及第四章由邹经湘译，第二章、第三章由谈开孚译，并由谈开孚定稿。全书由庄表中和陈乃立校对。庄、陈在校对过程中还对原书中的错误进行了认真的订正，并对译文在文字上作了认真的推敲和润色。

原书中笔误和印刷错误较多，为了对读者负责，译者对一些笔误之处都直接作了订正，另外对少数较大的错误，为了慎重起见，原文照译，而将正确的意见作为注释。

译者　1984.10

序

近年来，随机过程理论及其在各方面的应用有了很大的发展。现在，随机过程理论这个工具已成为分析复杂机械结构必不可少的基础。为了寻求一种可靠的设计方法，使结构既合理又经久耐用，必须应用随机过程理论。而且，要用概率方法计算的问题也不断增多。

在诸如参考资料〔8, 9, 19, 23, 32〕之类的文献中，讨论了应用概率方法来计算机器结构的问题。

随机过程理论用于机械系统中，大多数实际问题是同随机振动分析有关的。因此本书主要以概率方法阐述振动理论。

用类似于经典振动理论的方法来讲述随机振动，可以清楚地看到确定性振动和随机振动这两个力学分支的异同点。

应用本书所讲的随机振动分析方法，可以研究机械系统的动态过程（确定系统中各点的位移及其前两阶导数的概率特征），并可获得系统统计特性的信息，这些信息对于评价系统的可靠性来说是必要的。

目　录

绪　　论

在研究动态过程时，经常要分析一些可能发生的作用，虽然其性质我们还不完全清楚，但这些作用可能是外界的非可控的（随机的）干扰引起的，也可能是系统的几何形状和参数的非可控的变化所造成的。例如，路面或飞机跑道的不平度引起在其上运动物体的振动（图 0.1），在气动技术上火箭发动机推力的偏心，以及弹性元件的不完善等等。当这些非可控的作用不会使系统给定的运动发生任何重大偏差而可以忽略不计时，就得到了实际上的精确解。

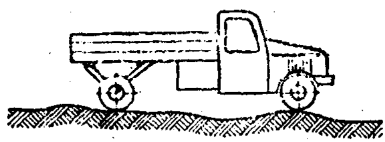

图　0.1

这种观点表明了经典力学，特别是经典振动理论的特点。这里所指的是：在给定初始条件（准确已知的条件）和已知每瞬时的作用力的情况下，相应于每个瞬时，系统的状态是确定的。继它以后随时间的连续变化将表现为一条单值的、确定的“轨迹”。系统的状态与时间的这种单值联系，通常称为确定性的联系，它完全不包括自然界存在的各类非可控的作用。

不久前，在研究结构振动时，所讨论的问题还基本上明确地限制在求系统的固有频率和振型，求稳态受迫振动的振幅，计算线性系统对典型干扰的响应等等。但是，新技术的发展要求更深入地分析引起振动的原因。当认识到经典的周期性干扰不是主要的时候，建立在确定性概念基础上的经典力学的方法，对于理解和解释某些物理现象就不够了。例如推力随机偏心的火箭发射时所引起的现象（图 0.2），由于道路或机场跑道的起伏对其上结构物的影

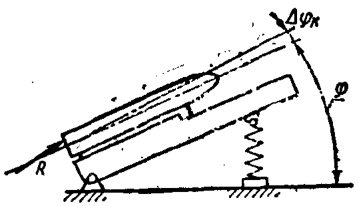

图 0.2

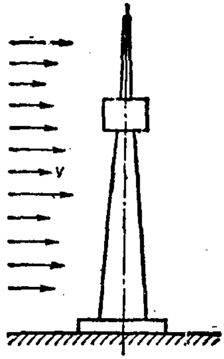

图 0.3

响(图 0.1)，还有随机风载的作用(图 0.3)引起的现象等等都是。因此在研究这类动态过程时，有必要建立新的物理模型，特别是要建立一种数学工具，它可以最精确地描述和考虑非确定的外部作用，这种数学工具就是随机过程理论。

在上述例子中，随机干扰的影响起着极其重要的作用，有时甚至起决定性作用，因此忽略随机干扰是不允许的。随机过程基本的、普遍的性质，是对过程的任何一个单次实现不能期望得到确定的性状，而对过程的大量实现的总集合，却具有明显的统计特性。

概率论和随机过程理论的方法，可以估计和研究大量的事件，而不计单个事件的精确性状，这就是统计方法的基本特点。

应用概率论方法的必要条件是：随机事件有可能在同样的实际条件下多次实现。只有对大量事件而言，采用概率研究方法才有意义。

目前，分析随机过程的基本方法之一是相关理论，由这一理论，可以在已知输入特征的条件下得到输出的概率特征。

通常在研究机械系统的随机过程时，其中也包括非平稳随机过程，认为过程可以实现多次的条件是满足的(这是允许利用随机

过程理论这一数学工具的假设之一)。对于平稳随机过程，多数假设过程是各态历经的，这使我们可以用一次实现代替多次实现，并且可以在相关理论领域内得到预言系统性状的充分信息。这种研究随机过程的方法，对于许多实际问题已足够了，因此相关理论得到了广泛的应用。

但也有一类具有很大实用价值的问题，不能用相关理论求解，例如，求随机过程输出的瞬时值落在给定范围内的概率，求随机函数的分布规律等，为了解决这些问题以及非线性问题，可利用马尔柯夫过程理论这一数学工具。

第一章　概率论和随机过程理论的基本原理

在很多技术领域里，存在着集合现象。例如我们研究同一类零件的加工过程。可以看到，零件的尺寸将在某一规定的数值附近变动，这些尺寸的偏差具有随机性，因此由测量已加工零件的尺寸不能预估下一个零件的尺寸。但是对于大批的零件来说，尺寸的偏差将服从一定的规律性，这种规律性将在专门的数学学科——概率论中研究。概率论反映了具有集合特征的随机事件（随机现象）的规律性。现在，有关概率论的书很多，如参考文献[7, 13, 15, 25, 26]，在这些书中详细地阐述了概率论和随机过程理论的基本概念和方法。因此在本章中，只引用在以后各章中将用到的概率论和随机过程理论的原理与结论。

概率论的基本概念

可能出现、也可能不出现的现象，叫做随机事件。例如作用在樯桅上的阵风是一随机事件。一定要发生的事件叫做必然事件。不可能发生的事件叫做不可能事件。为了判定某个随机事件能不能发生，则必须进行试验。

研究表明，一次试验中的随机事件，在条件不变的多次试验中，将服从某种确定的规律性，这个规律性称为概率。某个事件在试验中出现的次数用事件的频度(частота)* 来表示，事件发生的次数 n 与全部试验的次数 N 的比值，称为事件的频度 ω。例如从

* 这里频度有时也译为频率，但为了区别振动中的频率，故译为频度。

——校、译者注

同一发射装置发射十次火箭，其中三次有阵风的作用，那么有阵风作用这一事件的频度为

$$\omega=\frac{n}{N}=\frac{3}{10}$$

式中 N——总的发射次数；n——有阵风作用的次数。

上述结论只有在所有试验的事件都是相互独立的条件下才是正确的。如果其中一个事件的出现与否，无论如何都不会影响另一个事件出现的概率，则这样的随机事件称为独立事件。

事件的频度，在一定程度上是其现象的内在特征，但是它又是与试验实际次数有关的随机变量。在试验次数很多的情况下，频度 ω 就趋于某个数值，几乎不再变动，该数值称为事件的概率 P。概率是随机事件的数字特征，它具有这样的性质：即对于任何足够多的试验，事件的频度是不会显著地偏离其概率的。

如果事件 A 在重复多次（N 次）的试验中，有 n 项随机事件具有特征 B，并且在一系列试验中，事件的结果都是相互独立的，那么出现特征 B 的概率为

$$P(B)=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}$$

知道事件的概率以后，可以不进行任何试验，就能预言在多次试验中这个事件出现的频度。也可以说：事件的概率是在一次试验中事件出现的可能性的度量。

上述概率的定义是统计学上的，从数学的观点看来不是很严格的。由概率的统计学定义出发可得到：

(1) 必然事件的概率等于 1，

(2) 不可能事件的概率等于零；

(3) 任意的随机事件 A 的概率是不大于 1 的正数，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

如果有两个事件 A 和 B，并且事件 A 的概率与事件 B 发生与否无关，那么这两事件称为独立事件。如果事件 A 的概率随事件 B 的发生与否而变化，则事件 A 称为与事件 B 有关的事件。在事件 B 出现的条件下计算事件 A 的概率称为事件 A 的条件概率，并记为 $P(A/B)$。下面两个定理已证明是正确的[13]。

1. 概率加法定理 两个独立事件之和的概率，等于这两个事件概率之和，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.1}$$

2. 概率乘法定理 两个事件 A 和 B 之积（同时发生）的概率，等于事件 A 的概率与事件 B 的条件概率的乘积，即

$$P(AB)=P(A)P(B/A) \tag{1.2}$$

上述两个事件乘积的概率，也可以用事件 A 的条件概率来表示，即

$$P(AB)=P(B)P(A/B) \tag{1.3}$$

两个独立事件同时出现的概率，等于这两个事件概率的乘积，即

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.4}$$

随机变量的概念是概率论的基本概念之一。在试验结果中，如果某个变量可以取任一预先不知道的值时，称其为随机变量。随机变量可以是离散的，亦可以是连续的。

§1. 随机变量的分布函数

如果随机变量取每一个值的概率是已知的，则从概率的观点看来，该随机变量是完全确定的。这种对应关系称为离散随机变量的分布规律。

对于连续随机变量，事件的概率则要理解为事件 $X<x$ 的概率，其中 x 为某个参变量。

这时，概率 $P(X<x)$ 是 x 的某个函数，称它为分布函数

$$F(x)=P(X<x) \tag{1.5}$$

分布函数应满足条件

$$0\leqslant F(x)\leqslant 1 \tag{1.6}$$

从函数 $F(x)$ 的定义[参看公式(1.6)]可知: 无论 x 多大，函数 $F(x)$ 不可能大于 1，即

$$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

因为概率 $P(X<x)$ 不可能小于零，则从(1.6)式得到

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

典型的分布函数曲线如图 1.1 所示。

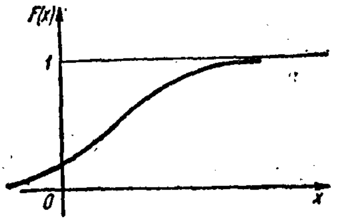

图 1.1

随机变量落在区间 (x_1, x_2) 内的概率为

$$P(x_1\leqslant X<x_2)=F(x_2)-F(x_1) \tag{1.7}$$

关系式(1.7) 可以用下面的方法导出。满足不等式 $X<x_2$ 的必要和充分条件为 $X<x_1$，及 $x_1\leqslant X<x_2$，因为事件 $X<x_1$ 和 $x_1\leqslant X<x_2$ 是不相容的，则根据概率加法法则:

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\leqslant X<x_2)$$

由此得到

$$\begin{aligned}P(x_1\leqslant X<x_2)&=P(X<x_2)-P(X<x_1)\\&=F(x_2)-F(x_1)\end{aligned}$$

§2. 概 率 密 度

对于连续分布函数，由于随机变量取每一个特定值的概率都等于零，这时，随机变量不可能用其本身取值的概率来描述。这就产生了一个问题: 如何确定所给定的数 x 是否是随机变量的可能

值，以及它取哪些值可能性较大，哪些值可能性较小。为了回答这个问题，我们以相应的微小区间 Δx 代替数轴上的点。这样，随机变量 X 在区间 $(x, x+\Delta x)$ 内取值的概率，就是给定值 x 出现可能性的度量。如果将这个概率除以 Δx，并令 Δx 趋于零，就得到了连续随机变量(函数)的新的概率特征——**概率密度**。

根据定义，概率密度

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\leqslant X<x+\Delta x)}{\Delta x} \tag{1.8}$$

从式(1.8)可知：函数 $f(x)$ 是非负的。

如果随机变量 X 在点 x 处的概率密度不为零，那么 x 是随机变量 X 的可能值。因为概率可以通过分布函数来表示[按公式(1.7)表示]，那么从式(1.8)得到

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx} \tag{1.9}$$

从式(1.9)有

$$dF(x)=f(x)dx=dP \tag{1.10}$$

式中 dP 是概率微分。

积分式(1.10)，得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx \tag{1.11}$$

如果式(1.11)的积分上限趋于无穷大，则

$$F(\infty)=1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \tag{1.12}$$

随机变量 X 落在区间 (x_1, x_2) 内的概率为

$$P(x_1\leqslant X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx \tag{1.13}$$

典型的概率密度函数如图 1.2 所示。概率 $P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)$ 在数值上等于图 1.2 上阴影线部分的面积。随机变量的分布函数和它

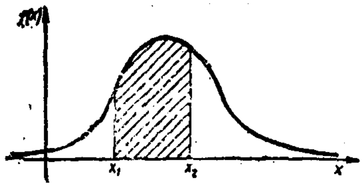

图 1.2

的概率密度是随机变量分布规律的不同表达形式。

§3. 多维随机变量*

现在研究最简单的二维随机变量 X、Y 的情况。

两个随机变量 X、Y 同时满足不等式 $X<x$ 和 $Y<y$ 的概率，叫做它们的联合分布函数，即

$$F(x, y)=P(X<x, Y<y) \qquad (1.1$$

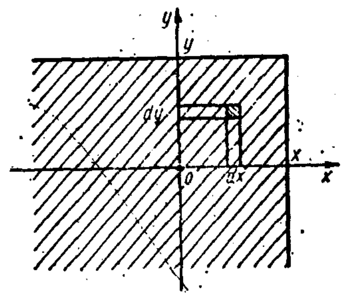

图 1.3

式(1.14)的几何意义可解释为随机点落在图(1.3)的阴影区域内的概率。类似于一维概率密度的方法，可推出二维概率密度

$$f(x, y)=\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \leqslant X \leqslant x+\Delta x, y \leqslant Y \leqslant y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y} \qquad (1.15)$$

从式(1.15)得知: $f(x, y)dxdy$ 是点落在无穷小矩形域内的概率(参看图 1.3)。

点落在 xy 平面上某个有限区域 B 内的概率为

$$P=\iint\limits_{B} f(x, y)dxdy \qquad (1.16)$$

---

* 原文为 Системы случайных величин，也可译为多元随机变量或随机变量组。
——校、译者注

分布函数与概率密度的关系为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy \tag{1.17}$$

从公式(1.17)可以得到下面关系式

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y) \tag{1.18}$$

函数 $F(x,y)$满足下列条件:

(1) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$;

(2) $F(-\infty,y)=0$(对任意的 y 值);

(3) $F(x,-\infty)=0$(对任意的 x 值);

(4) $F(x,\infty)=P(X<x)=F_1(x)$;

(5) $F(\infty,y)=P(Y<y)=F_2(y)$;

(6) $F(\infty,\infty)=1$。

函数 $f(x,y)$应满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1 \tag{1.19}$$

通过联合概率密度可以得到每一个随机变量的概率密度，其公式为

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy \tag{1.20}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx \tag{1.21}$$

如果随机变量 X 和 Y 满足不等式 $X<x$ 和 $Y<y$ 的事件是相关的(即使只对某一对 x、y 值成立)，则称 X 和 Y 为不独立的随机变量。如果对任何一对 x 和 y，满足不等式 $X<x$ 和 $Y<y$ 的事件都是无关的，则称 X 和 Y 为独立的随机变量。对于独立的随机变量 X、Y，根据独立事件概率相乘法则，其联合分布函数为

$$F(x,y)=P(X<x)\cdot P(Y<y) \tag{1.22}$$

或者写为