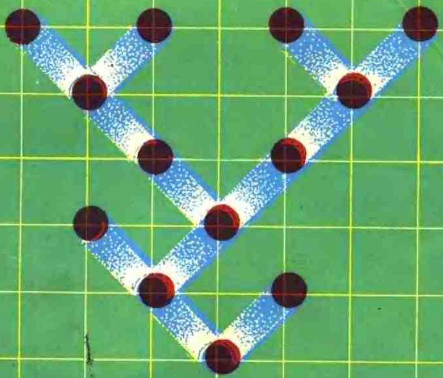
工程技術優化决策

阎 超 编著



重 庆 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书介绍优化决策的基本理论及常用方法，全书由优化方法、网络分析和决策方法内容组成。第一篇介绍确定型问题的优化方法，包括线性规划、整数规划、动态规划和网络分析四章；第二篇为概率型问题的优化技术，着重介绍可靠性设计、预测及分配的优化方法；第三篇介绍决策方法，包括确定型、随机型和不确定型三章。

为了提高读者解决工程技术问题的优化决策能力，在讲述上均从剖析实例入手，过渡到介绍基本原理和基本方法。各章给出了若干应用示例，供读者参考。在介绍数学方法时，对其实现步骤作了标示，以满足读者编制计算程序的需要。

本书可用作高等工科院校高年级学生的选修课教材，也可供各类工程技术人员或技术管理人员参考。

工程技术优化决策

阎 超 编著

责任编辑 李淑芳

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆医科大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：11.5 字数：287 千

1988年12月第 1 版 1988年12月第 1 次印刷

印数：1—3100

标准书号：ISBN 7-5624-0147-0 / T·1（课） 定价：2.33元

前　　言

现阶段生产建设事业已在过去的小生产、自然经济的基础上演变为多学科综合、多层次结构、多功能性质的大系统、大工程、大企业。许多从前可以在一个科学局部领域内、凭借某些局部科学技术原理或方法解决的问题，今天已无能为力。例如，一个地区供电网需要考虑的科学技术问题及其解决办法，在跨区域联合输电系统中就有着重要差异，倘若依旧沿用过去曾经有效的经验、方法，勿容置疑，可能导致严重失误，甚至是危险的。可以说，现代工程技术问题毫无例外地需要从宏观到微观、从全局到局部、从经济价值到社会效果加以综合考虑，才能实现优化决策。优化不当将使预期目标无法实现，决策失误更是事与愿违、后患无穷。可以认为，时至今日，一个工程技术人员的优化决策能力，已是衡量其科学水平和素质的重要标志。遗憾的是，目前从工程实际需要编写的这类书籍为数尚不多，而在工科院校中也尚未对高年级学生进行有关培训，本书正因此需要而编写。

本书是以教材形式编写的，曾在重庆大学用作选修课教材。本书介绍了工程技术人员必须掌握的优化决策基本理论、常用方法以及有关应用的一般知识。全书由优化方法、网络分析和决策方法三篇组成，共分八章。第一篇为确定型问题的优化方法，包括线性规划、整数规划、动态规划和网络分析四章，对基本理论、基本方法作了介绍；第二篇为概率型问题的优化技术，介绍了可靠性设计、预测及分配的优化方法；第三篇为决策方法的讨论，包括确定型、随机型及不确定型决策三章。各章均引用了若干应用示例，并进行了必要的剖析。

为使读者在解决工程技术问题的优化决策能力方面得到培养和提高，各章论述均从实例剖析开始再引渡到基本原理、基本方法，使读者容易理解和掌握。考虑到计算机应用日益广泛，在数学方法的介绍上对该方法实现的步骤作了标示，以满足读者编制计算程序的需要。由于篇幅限制，有关计算机程序未予列出。

本书可用作高等工科院校或中等技术学校各专业高年级学生的选修课程教材，也可作各类工程技术人员或技术管理人员的参考书。

本书内容是按30～40教学时数组织的，如授课60学时则应添入结合专业的深入部分。

本书编写中得到重庆大学李淑芳副教授、李代高副教授的许多指教和帮助，并得到太原工业大学刘宾桐教授的关怀，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，本书存在的不妥之处敬请读者批评指正。

阎　超

1988年1月于重庆

目　　录

第一篇　确定型问题的优化方法

第一章　线性规划

§1-1　引言……（1）

§1-2　模型与标准化……（3）

§1-3　基本原理……（4）

§1-4　单纯形法……（6）

§1-5　单纯形法的矩阵形式……（9）

§1-6　单纯形法的表格运算形式……（12）

§1-7　应用示例之一　生产计划制定问题……（18）

§1-8　应用示例之二　最大效益问题……（24）

§1-9　应用示例之三　最小代价问题……（30）

§1-10　应用示例之四　运输问题……（31）

§1-11　应用示例之五　分配问题（表格法）……（37）

§1-12　应用示例之六　分配问题（匈牙利法）……（42）

第二章　整数规划

§2-1　引言……（45）

§2-2　隐枚举法……（45）

§2-3　割平面法……（50）

§2-4　分枝定界法……（53）

§2-5　应用示例之一　分配问题……（58）

§2-6　应用示例之二　背包-装载问题……（61）

第三章　动态规划

§3-1　引言……（65）

§3-2　几个基本概念……（65）

§3-3　基本原理……（66）

§3-4　示例分析……（67）

§3-5　小结……（69）

§3-6　应用示例之一　最短路线问题……（69）

§3-7　应用示例之二　分配问题……（71）

§3-8　应用示例之三　以费用为目标的生产计划制定问题……（74）

§3-9　应用示例之四　设备更新问题……（78）

第四章　网络分析

§4-1　引言……（85）

§4-2　图的基本概念……（85）

§4-3　逻辑图的等效简化……（89）

§4-4 最短路径问题…………………………………………………………………………（92）
§4-5 最短树问题……………………………………………………………………………（97）
§4-6 最短回路问题…………………………………………………………………………（100）
§4-7 最大流量问题…………………………………………………………………………（102）
§4-8 最小费用最大流量问题………………………………………………………………（107）

第二篇　概率型问题的优化技术

第五章　可靠性分析

§5-1 引言……………………………………………………………………………………（112）
§5-2 可靠性的特征量及其数学表示…………………………………………………………（112）
§5-3 可靠性分析基本概念……………………………………………………………………（115）
§5-4 应用示例之一　可靠性设计……………………………………………………………（120）
§5-5 应用示例之二　可靠性预测……………………………………………………………（123）
§5-6 应用示例之三　可靠度等分配问题……………………………………………………（125）
§5-7 应用示例之四　可靠度加权分配问题…………………………………………………（127）
§5-8 应用示例之五　可靠度动态最优分配…………………………………………………（129）

第三篇　决策方法

第六章　确定型决策问题

§6-1 引言……………………………………………………………………………………（138）
§6-2 PERT-CPM方法简介……………………………………………………………………（138）
§6-3 PERT网络图……………………………………………………………………………（139）
§6-4 PERT网络图计算方法…………………………………………………………………（142）
§6-5 应用示例之一　以技术条件为目标的赶工问题………………………………………（144）
§6-6 应用示例之二　以作业费用最小为目标的经济赶工问题……………………………（148）
§6-7 应用示例之三　以生产效益最大为目标的经济赶工问题……………………………（152）

第七章　随机型决策问题

§7-1 引言……………………………………………………………………………………（156）
§7-2 决策原理………………………………………………………………………………（156）
§7-3 最大可能准则的应用示例………………………………………………………………（156）
§7-4 期望值准则的应用示例…………………………………………………………………（157）
§7-5 灵敏度分析……………………………………………………………………………（160）
§7-6 小结……………………………………………………………………………………（160）

第八章　不确定型决策

§8-1 引言……………………………………………………………………………………（162）
§8-2 最小最大准则…………………………………………………………………………（162）
§8-3 最大最小准则…………………………………………………………………………（163）
§8-4 最大最大准则…………………………………………………………………………（164）
§8-5 赫尔威斯准则…………………………………………………………………………（164）
§8-6 拉普拉斯准则…………………………………………………………………………（165）

习题

第一篇　确定型问题的优化方法

确定型问题是指讨论依据、条件和变量函数关系都能用确定形式给出的问题。对这类问题的处理方法很多、但就其类型来说，大致可分为三种：线性规划（非线性规划）、动态规划、整数规划。

线性规划是最为成熟、应用最为广泛的运筹学方法之一，在几乎各工业行业中均得到应用。其特点是：只要对给出的问题能够列出线性规划模型，总可以用相同的方法（通常用单纯形法）取得最优解。

动态规划是一种多级决策的优化方法，适用于许多涉及多级决策过程的工业技术问题。其特点是：将给定问题分为许多决策阶段，按顺序求解各决策阶段的最优解，直到最后阶段最优解得到解决。因此，虽然可以用动态规划确定许多问题的最优解，但并不是对所有问题都最有效，在什么样的情况下采用动态规划方法有利、需要加以判断。

整数规划是一种求解非负整数最优解的方法。这种方法适用于求解完全整数或混合整数线性规划模型，方法的特点是：线性规划模型具有非负整数限定条件。

本篇只对线性规划、动态规划、整数规划的基本原理及方法进行介绍。

第一章　线 性 规 划

线性规划是应用最广的运筹学方法之一，它解决的是在给定条件下，满足一组线性约束条件和变量为非负限定条件的多变量线性函数求取最优解的问题。这类问题的优化计算就是在给定条件下寻取目标函数的极值（最大值或最小值）。

在工业技术领域中，每种线性规划模型均可用唯一的标准形式写出，用相同方法求解 。

§1-1　引　　言

通过示例1-1对线性规划方法的原理及其讨论性质先进行概念性介绍。

〔例1-1〕　生产计划问题

某厂生产A、B两种产品，每种产品的原材料M_i、消耗量W_{ij}（$j=A$、B）及各类原材料的允许使用量如表1-1，各种产品每件获利情况如表1-2。应如何确定生产计划才能获利最大？

〔解〕：设A、B两种产品生产的数量分别为x_1及x_2单位，则依题意最大获利可用以下线性函数表示：

$$\text{mix: } S=7x_1+14x_2 \qquad x_1,\ x_2\geqslant 0$$

这一函数称为目标函数，其中x_1、x_2的取值需受原材料允许使用量限制，因此，目标函数最大值的寻取应在这一限制条件下进行。生产计划的约束条件数学表达式称为约束方程。对本例有

$$M_1: \quad 9x_1+4x_2\leqslant 360$$

表1-1

原材料		单位产品的原材料消耗量	
种类	允许使用量	W_A	W_B
M_1	360	9	4
M_2	200	4	5
M_3	300	2	10

M_2:　$4x_1+5x_2\leqslant 200$

M_3:　$3x_1+10x_2\leqslant 300$

表1-2

产品种类	A	B
每件产品获利	7	14

这类二维问题用图解法求解是十分方便的，图1-1示出本例的求解过程。

约束方程取等式的情况为约束条件允许的上限，面积$OABCD$被各约束方程所包含，因此该面积上任一坐标点都是满足计算要求的可行解。该面积称为解的可行域。

鉴于目标函数簇是斜率为-2的直线簇，在可行域内的最大目标函数值为图1-1B点，相应的变量取值应为

$$x_1=20,\qquad x_2=24$$

目标函数最大值即为

$$\max:\ S=7x_1+14x_2=476$$

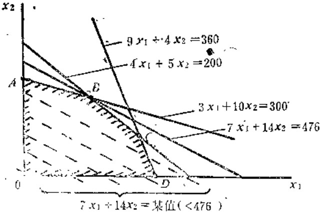


图1-1

通过本例剖析可以明确以下几点：

1. 关于数学模型

线性规划数学模型包含目标函数、约束方程组两个部分，有以下要求：

（1） 描述目标的目标函数是一组未知数的线性函数。各变量的系数称为该变量的性能指标系数。

（2） 每一个约束条件都可以用一个线性方程表示，各约束方程应具有至少一个未知数。

（3） 约束方程组应能形成解的可行域且为凸图。

（4） 全部变量均应是非负的。

满足这些要求，线性规划数学模型可以写为以下形式

目标函数　$\max$（或$\min$）：$S=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$　　(1-1)

约束条件

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n(*)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n(*)b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n(*)b_m \\ x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n \end{array}\right\}\qquad (1\text{-}2)$$

式中　(*)为≥、=或≤符号，视给定约束条件而定。

2. 关于解

目标函数的解具有以下性质：

（1） 可行解应满足全部约束方程。

（2） 全体可行解构成的解域称为解的可行域。

（3） 可行域若有界，则存在最优解。

（4） 解域凸多边形中，若有最优解存在，则必在某一顶点处得到。

（5） 若在两个顶点处同时得到最优解，则该两顶点联线上的任一取值也必然是最优解，该线性规划具有无穷多最优解。

（6） 倘若可行域是空集，由于不存在可行解，此时线性规划无最优解。

3. 最优解的求取方法

根据图解法的作图程序，可以把线性规划最优解的求取方法归纳如下：

（1） 将约束方程不等式变换为等式，对各约束条件进行限界。

（2） 按约束条件限界处理的状况确定解的可行域。

（3） 从变量$x_j=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 出发，按目标函数递增原则从一个可行解到另一个可行解递推，最后寻出最优解。

以上由图解法得出的线性规划概念，在以下各节中逐一进行讨论。

§1-2 模型与标准化

工程技术问题给出的约束条件不可能规范化地均以等式的情况出现，但是线性规划的讨论方法必须规范化才有应用价值，为此必须对数学模型实行标准化处理。

式（1-1）、（1-2）的组合称为线性规划数学模型。所谓模型的标准化，就是使模型等效为标准形式，即标准型。标准型模型就是(*)为等式的数学模型，如式（1-3）所示。

$$\left.\begin{aligned}&\text{目标函数}\quad \max(\min):\ S=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\\&\text{约束条件}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\\&\qquad\qquad x_j\geqslant 0;\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n。\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

（1） 目标函数值最大、最小的互换性质：对于求解目标函数最小值

$$\min:\ S=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$$

可以通过求解 $\sum_{j=1}^{n}(-a_jx)$ 最大值加以实现，因此

$$\min S=-\max(-S)$$

令$S'=-S$，即可写为

$$\max S'=-\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\tag{1-4}$$

（2） 不等式约束方程的等式化

(a)　(*)为≤时

设给定的不等式约束方程为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

可以设想，在不等式左端增添一虚拟的人工变量x_a，使不等式转化为等式，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_a=b_i$$

变量x_a是基于把不等式变换为等式的需要而人为添加的，称为松弛变量。约束方程中增添的松弛变量x_a并非原问题所固有，因此需在原目标函数中添人，目标函数中添入的变量x_a需赋以零系数才能与原方程等效。

等效方程为　$S=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+0x_a$

式中　　$x_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$；$x_a\geqslant 0$

(b)　(*)为≥时

设给定的不等式约束方程为　$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$

与(a)相似，对于≥型不等式可以增添一个负系数的人工变量x_b，使原不等式变为等效的等式，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-x_b=b_i\qquad x_b\geqslant 0$$

称新增变量x_b为剩余变量。出自计算规则（见§1-4小结(3)）“每个方程必须有一个系数为1，而在其余所有方程中系数均为零的变量”的需要，必须在上述方程中加入另一个附加变量x_c，于是

$$\left.\begin{aligned}&a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-x_b+x_c=b_i\\&x_j\geqslant 0;\ x_b\geqslant 0;\ x_c\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

变量x_c称为人工变量。

与改写约束方程相应，变量x_b及x_c亦应记入目标函数。在目标函数中剩余变量x_b的系数仍赋零值，人工变量x_c系因运算规则需要而添置的，在目标函数中其系数应赋一任意小的$-T$值，因此对应于式（1-5）的目标函数为

$$\left.\begin{aligned}&S=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+0x_b+(-T)x_c\\&x_j\geqslant 0;\ x_b\geqslant 0;\ x_c\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

§1-3　基本原理

为了讲述方便，将线性规划式（1-3）改写为式（1-7）的矢量形式。

$$\left.\begin{aligned}&\text{目标函数}\qquad \max:\ S=CX\\&\text{约束方程}\qquad \sum_{j=1}^{n}P_jx_j=B\\&\qquad\qquad\qquad x_j\geqslant 0;\ j=1,2,\cdots,n。\end{aligned}\right\}\tag{1-7}$$

其中　$C=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

n为变量数，m为约束方程数。

其矩阵形式亦可表为

目标函数　　　max： $S = CX$

约束方程　　　$AX = B$　　　(1-8)

$X \geqslant 0$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n) \tag{1-9}$$

$$0 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \tag{1-10}$$

几个定义

（1）　可行解及可行域

满足约束方程　　$AX = B$、$X \geqslant 0$

的解称为线性规划的可行解，全部可行解的集合称为可行域。可行域包含无限个可行解。

（2）　最优解

满足目标函数的可行解称为线性规划的最优解。

（3）　基、基变量

约束方程系数矩阵中倘若存在由m（$<n$）个线性独立列向量组成的子矩阵D

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n) \tag{1-11}$$

满足 $|D| \neq 0$，称矩阵D是线性规划的一个基，称P_j（$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）为基向量，与P_j相对应的变量x_j称为基变量；反之，与P_j无对应关系的变量称为非基变量。

（4）　基础解、基础可行解

对于秩为m的约束方程系数矩阵A，若$j = 1, 2, \cdots, m$的变量，其系数列向量是线性独立的，则

$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j + \sum_{j=m+1}^{n} P_j x_j = B \tag{1-12}$$

因此与$X_D =$ $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^T$相对应的系数矩阵应为

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n) \tag{1-13}$$

倘若满足 $|D| \neq 0$，则与D相对应的X_D即为一组基变量。令非基变量$x_j = 0$（$j = m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n$），则可利用高斯消去法求得基础解

$X = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$

显然，每个基础解的非零分量数目不大于m，即不多于约束方程数。

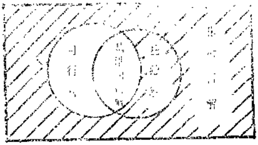


图1-2

基础解中满足$x_j \geq 0$的可行解称为基础可行解，基础可行解的非零分量数不会大于基础解数。

基础解、基础可行解及可行解间的包含关系可由图1-2表示。

§1-4 单 纯 形 法

1. 计算方法

单纯形法是这样一种方法：从无限多可行解中通过基础可行解的解求，按目标函数不递增或不递减（求取最小值或最大值时）原则，从一个基础可行解迭代到另一个可行解，直到寻得最优解（如果最优解存在）。

应当说明，单纯形法由于迭代方法的性质所决定，只能取得最优解中的一个。因为这种方法只能检查所有基础可行解的一个子集。下面，仍用示例1-1说明单纯形方法。示例1-1的数学模型引录于下：

目标函数　max：$S = 7x_1 + 14x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

约束方程

$$
\begin{aligned}
M_1 &\quad 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360\\
M_2 &\quad 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200\\
M_3 &\quad 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300\\
&\quad x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)
\end{aligned}
$$

从§1-1可知，线性规划是从一初始条件出发，按目标函数值递增原则逐步寻取极值的。初始条件应根据工程技术问题确定，倘若未经给定，一般来说可以$S = 0$的情况作为初始条件开展讨论。

由目标函数可知，满足$S = 0$的条件是$x_1 = 0$，$x_2 = 0$。因此，在假定$x_1 = 0$，$x_2 = 0$后，求解x_3、x_4、x_5。由于x_3、x_4、x_5的解是计算模型的基础可行解，因此把需要求解的变量称为基础变量，把已给定为零的变量称为非基础变量。

基础变量和非基础变量的集合分别为

$$X_B = (x_3,\ x_4,\ x_5)\ ;\ X_N = (x_1,\ x_2)$$

X_B称为“基”。每次选择一个基的组成变量（基变量）置换非基变量，在初始条件下确定的非基础变量置换完毕时，所寻得的基础可行解即最优解。

为使目标值能用最少迭代次数求得，必须按以下两项原则选择换入基变量和换出基变量：

（a）在求取最大（或最小）值时，换入基变量必须按目标函数中尚未被置换的、具有最大（或最小）系数的变量选择。

（b）与之相应，应该用约束方程中该换入基变量的系数与常数项比值θ最小者选择换出基变量。

原则(a)是目标值在迭代过程中取得递增效果的条件，原则(b)是取得可行解的保证。

求解的迭代步骤如下：

第1步：$n = 0$，初始条件的确定及计算

令x_1、x_2为非基础变量，有$x_1 = 0$、$x_2 = 0$。

从而可以解得　$S = 0$；$x_3 = 360$；$x_4 = 200$；$x_5 = 300$

即图1-1的0点，为一基础可行解。

第2步：$n=1$，第1次换基计算

由于 $a_1=7>0$；$a_2=14>0$

$\max(a_1, a_2)=\max(7, 14)=a_2$

选择以a_2为系数的x_2为换入基变量。假定

$$\frac{b_i}{a_{ij}}=\theta_i;\ a_{ij}>0 \tag{1-14}$$

$$\theta^*=\min[\theta_i];\ \theta_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-15}$$

其中 i为约束方程行序号；

m为约束方程数；

j为换入基变量序号；

θ^*为换基变量选择指标。当$\theta^*=\theta_k$时，称k约束方程为主元方程。

主元方程一经确定，除主元方程中保留换入基变量外，其余各约束方程的换入基变量均应消除。

对于本例： $\theta_1=360/4=90$；$\theta_2=200/4=50$；$\theta_3=300/10=30$；

$\theta^*=\min(\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3)=30=\theta_3$

因此，应选择与θ_3相对应的x_5为换出基变量；$i=3$为本步换基的主元行。

令非基变量 $x_1=0$，$x_5=0$

改写约束方程为

$$x_2=30-\frac{3}{10}x_1-\frac{1}{10}x_5$$

$$x_3=240-\frac{78}{10}x_1+\frac{4}{10}x_5$$

$$x_4=50-\frac{25}{10}x_1+\frac{5}{10}x_5$$

$$S=420+\frac{28}{10}x_1-\frac{14}{10}x_5$$

解得 $x_2=30$； $x_3=240$； $x_4=50$； $S=420$

此解对应图1-1中的A点，为基础可行解。

第3步：$n=2$，第2步换基计算

至此，目标函数中仅有x_1具有正整数系数（$a_1=7>0$），因此x_1为换入基变量。

由于 $\theta_1=400/13$；$\theta_2=20$；$\theta_3=100$；

$\theta^*=\min(\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3)=\theta_2$

故选择i_2为主元行，选择该行的变量x_4为换出基变量。改写数学模型为

$$x_1=20-\frac{10}{25}x_4+\frac{5}{25}x_5;\qquad x_2=24+\frac{3}{25}x_4-\frac{4}{25}x_5;$$

$$x_3=84+\frac{78}{25}x_4-\frac{29}{25}x_5;\qquad S=476-\frac{28}{25}x_4-\frac{21}{25}x_5$$

令非基变量$x_4=0$、$x_5=0$，可寻得

$x_1=20;\quad x_2=24;\quad x_3=84;\quad S=476$

由于目标函数中已无正系数非基变量存在，不可能通过换基运算使目标值继续增大，计算即应停止。因此最大目标值为476，对应于图1-1中的B点。

需要说明、在以上计算结果中，$x_3=84$的含义是该约束条件存在相应数量的裕度。从图1-1可以看出，目标值最大的B点并不在约束方程$9x_1+4x_2=360$所确定的边界线上，因此对该约束方程存在裕度。容易证明，若该约束条件改写为：

$$9x_1+4x_2\leqslant(360-84)$$

新的约束条件恰好满足$S(\max)=476$的要求，如图1-3虚线所示。上述约束方程的修改，实质上是图1-3中的C点向B点收缩，这一收缩不影响最大目标值的求取。从这里可以得到一个重要的概念，即在允许条件下，可以修改约束条件使计算易于进行。

2. 小结

（1） 单纯形法是求解线性规划模型的一种迭代方法，只要能够建立线性规划模型，就可用单纯形法求取最优解。

（2） 单纯形法是按目标值递增原则，从一个基础可行解到另一个基础可行解的迭代来寻取最优解的。

（3） 等效模型必须保证每个约束方程含有一个在该方程内系数为1、在其余约束方程内系数为零的变量。

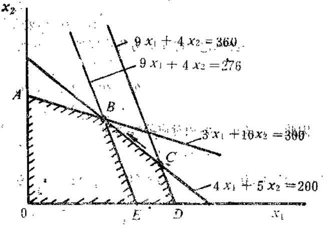


图1-3

（4） 等效模型的目标函数中，松弛变量和剩余变量的系数应为零，人工变量的系数为任意小的负数（对求取极大值而言）。

（5） 松弛变量和人工变量是等效问题初始基础可行解中的基础变量。

（6） 由于人工变量有任意小的负系数，所以人工变量一旦换出基，就不可能再换入基，一经换出基后，在以后的步骤中可以不再考虑。

（7） 如果可行解中所有非基础变量的系数均满足为零、为负（对求最大值）或为正（对求最小值）的条件，所得到的解即为最优解。

（8） 如果最优解得出时，所有松弛、剩余、人工变量均为零，则目标函数的各变量值都严格遵守全部约束。

（9） 如果得出最优解时，目标函数中非基变量为零系数，则该模型有无限多最优解，单纯形法得出的仅是其中之一。

（10） 如果在等效模型的最优解中，人工变量为非零值，则原模型不存在可行解。如果等效模型最优解中不包含非零值人工变量，则该解即为原模型最优解。

（11） 如果在选择换出基变量时

(a) 最小比值θ不止一个，应根据运算情况选择其中之一。

(b) 如果不存在正比值（$\theta<0$），则原目标函数在各约束条件下无界，因而原模型不

存在有限最优解。

§1-5 单纯形法的矩阵形式

矩阵作为现代科学技术的一种数学手段，应用极为广泛。下面介绍单纯形的矩阵形式及其计算方法。

线性规划单纯形法的一般矩阵模型为

$$\left.\begin{aligned} \max:\quad & S=CX \\ & AX=b \\ & X\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

引入松弛变量X后，标准型数学模型为

$$\max:\quad S=CX+0X_S \tag{1-17}$$

$$AX+IX_S=b \tag{1-18}$$

$$X\geqslant 0,\ X_S\geqslant 0 \tag{1-19}$$

其中 $X_S=(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \cdots,\ x_{n+m})$

I为$m\times m$阶单位矩阵

设B是由系数矩阵A中基变量系数（a_{B1}，a_{B2}，…，a_{Bm}）构成的子矩阵，N是由非基变量系数（a_{N1}，a_{N2}，…，a_{Nn}）构成的另一子矩阵，则线性规划模型的系数矩阵A可写成

$$A=(B,\ N)$$

与之相应，变量矩阵为

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}$$

目标函数系数行向量为

$$C=(C_B,\ C_N)$$

于是式（1-18）可进行以下演变

$$(A,\ I)\begin{pmatrix}X\\X_S\end{pmatrix}=(B,\ N,\ I,\ )\begin{pmatrix}X_B\\X_N\\X_S\end{pmatrix}=BX_B+NX_N+IX_S=b$$

同理，目标函数S为

$$(C,\ 0)\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}=(C_B,\ C_N,\ 0)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\\X_S\end{pmatrix}=C_BX_B+C_NX_N+0X_S=S$$

从而线性规划模型有以下形式

$$\max:\ S=C_BX_B+C_NX_N+0X_S \tag{1-20}$$

$$BX_B+NX_N+IX_S=b \tag{1-21}$$

$$X_B,\ X_N,\ X_S\geqslant 0 \tag{1-22}$$

将基变量写为单位列向量，则式1-21为

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N-B^{-1}X_S \tag{1-23}$$

目标函数即为 $S=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N-C_BB^{-1}X_S$ (1-24)

因此，在非基变量$X_N=0$、$X_S=0$情况下，可寻得一个基本可行解

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\\X_S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1-25}$$

相应的目标函数值为 $$S = C_B B^{-1} b \tag{1-26}$$

由式（1-24）可知，换入基变量的选择应根据X_N、X_S的系数$C_N - C_B B^{-1} N$及$C_L B^{-1}$，按决策系数θ^*值（最小值）判定。θ^*值由下式确定：

$$\theta^* = \min\left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_i)_i} \middle| (B^{-1}P_i) > 0 \right\} \tag{1-27}$$

式中 $(B^{-1}b)_i$是向量$B^{-1}b$的第i个元素，$(B^{-1}P)_i$是向量$B^{-1}P_i$的第i个元素。

[例1-2] 例1-1的矩阵方法解算。

[解] 由例1-1所得的标准形模型，可按以下步骤进行求解计算：

$n = 0$步：初始解的求取

令松弛变量x_3、x_4、x_5为基础变量，则有

$$X_B(0) = (x_3,\ x_4,\ x_5);\qquad X_N(0) = (x_1,\ x_2);$$

$$C_B(0) = (0,\ 0,\ 0);\qquad C_N(0) = (7,\ 14)$$

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B(0)^{-1} = B(0);\quad b(0) = \begin{pmatrix} 360 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

从而 $$S(0) = C_B(0)b(0) = (0,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} 360 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = 0$$

$n = 1$步换基：

由于 $$a(0)_1 = 7 > 0;\qquad a(0)_2 = 14 > 0$$

因此 $$a_B(1)_i = \max\left\{ a(0)_1, a(0)_2 \right\} = a(0)_2 = 14$$

所以应确定非基变量x_2为换入基变量。

又因 $$[B(0)^{-1}b(0)]_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 360 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix};$$

$$[B(0)^{-1}P_{i}]_{i=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

故 $$\theta^*(0) = \min\begin{pmatrix} 360/4 \\ 200/5 \\ 300/10 \end{pmatrix} = 300/10 \qquad (i = 3)$$

所以应确定$i = 3$对应的基变量x_5为换出基。

至此，即可进行以下求解计算：

因为 $$X_B(1) = (x_3,\ x_4,\ x_2)\qquad X_N(1) = (x_1,\ x_5);$$

$$C_B(1) = (0,\ 0,\ 14)\qquad C_N(1) = (7,\ 0);$$

$$B(1)=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&5\\0&0&10\end{pmatrix}\quad B(1)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{-4}{10}\\0&1&\frac{-5}{10}\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\quad b(0)=\begin{pmatrix}360\\200\\300\end{pmatrix}$$

所以 $$b(1)=B(1)^{-1}b(0)=\begin{pmatrix}1&0&\frac{-4}{10}\\0&1&\frac{-5}{10}\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}360\\200\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}240\\50\\30\end{pmatrix};$$

$$S(1)=C(1)b(1)=(0,\ 0,\ 14)\begin{pmatrix}240\\50\\30\end{pmatrix}=420;$$

$n=2$步换基：

因为 $$a(1)_1=7-(0,\ 0,\ 14)\begin{pmatrix}1&0&\frac{-4}{10}\\0&1&\frac{-5}{10}\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\3\end{pmatrix}=7-\frac{14}{10}=\frac{28}{10}>0$$

$$a(1)_5=0-(0,\ 0,\ 14)\begin{pmatrix}1&0&\frac{-4}{10}\\0&1&\frac{-5}{10}\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-\frac{42}{10}<0$$

所以 $a(1)_1=\frac{28}{10}$是唯一正数，与之相对应的非基变量x_1应为换入基变量。

$$[B(1)^{-1}b(0)]=\begin{pmatrix}240\\50\\30\end{pmatrix};\quad [B(1)^{-1}P_j]_{j=1}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{-4}{10}\\0&1&\frac{-5}{10}\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{78}{10}\\\frac{25}{10}\\\frac{3}{10}\end{pmatrix};$$

$$\theta^*(1)=\min\begin{pmatrix}\frac{240}{78/10}\\\frac{5}{25/10}\\\frac{30}{3/10}\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}\frac{400}{13}\\20\\100\end{pmatrix}=20\qquad(i=2)$$

故对与$i=2$相对应的基础变量x_4实行换出，$n=2$步换基的计算如下：

$$X_B(2)=(x_3,\ x_1,\ x_2)\qquad X_N(2)=(x_4,\ x_5)\ ;$$

$$\boldsymbol{C}_B(2)=(0,\ 7,\ 14)\qquad C_N(2)=(0,\ 0)\ ;$$

$$B(2)=\begin{pmatrix}1 & 9 & 4\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 10\end{pmatrix}\quad B(2)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{-78}{25} & \frac{29}{25}\\ 0 & \frac{10}{25} & \frac{-5}{25}\\ 0 & \frac{-3}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}\quad b(1)_i=\begin{pmatrix}240\\ 50\\ 30\end{pmatrix}$$

由于
$$b(2)_i=\begin{pmatrix}1 & \frac{-78}{25} & \frac{29}{25}\\ 0 & \frac{10}{25} & \frac{-5}{25}\\ 0 & \frac{-3}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}360\\ 200\\ 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\ 20\\ 24\end{pmatrix}$$

故有
$$S(2)_i=(0,\ 7,\ 14)\begin{pmatrix}84\\ 20\\ 24\end{pmatrix}=476$$

又由于
$$a(2)_4=0-(0,\ 7,\ 14)\begin{pmatrix}1 & \frac{-78}{25} & \frac{29}{25}\\ 0 & \frac{10}{25} & \frac{-5}{25}\\ 0 & \frac{-3}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{-28}{25}<0\ ;$$

$$a(2)_5=0-(0,7,14)\begin{pmatrix}1 & \frac{-78}{25} & \frac{29}{25}\\ 0 & \frac{10}{25} & \frac{-5}{25}\\ 0 & \frac{-3}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{-21}{25}<0$$

至此，目标函数中已无系数为正的非基变量，目标值不可能继续增大，所得计算结果即为目标函数最大值，计算结束。与§1-4所得结论完全相符。

§1-6　单纯形法的表格运算形式

分析单纯形法的代数或矩阵运算形式发现，许多中间计算与问题的求解无关，而且中间参数参与计算将使计算手续冗繁、工作量增加，降低了计算效率。

事实上，各参数在计算过程中的演变是有规律可循的。通过约束条件所确定的参数相关特性，可以减免某些不必要的中间运算，使求解得到简便。表格运算形式就是建立在这一观念上的计算方法。由于表格算法在迭代过程中只需对与换基活动直接有关的参数进行计算，