目　錄

第二章 基本的機率觀念

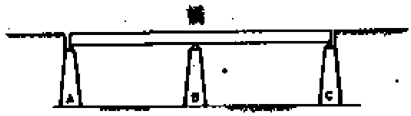
2.1，2.2節

2.1 如圖P2.1所示橋樑之三個橋墩可能沉陷量爲：

A—0吋，1吋，2吋。

B—0吋，2吋。

C—0吋，1吋，2吋。



圖P2.1

(a) 將三個橋墩可能發生沉陷的情形全部列出。

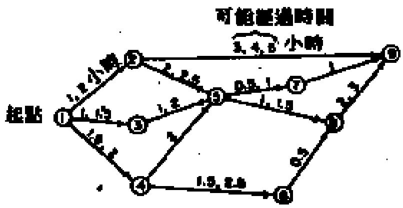
(b) 若E代表任相鄰兩橋墩產生2吋差異沉陷的事件，決定其樣本點。

【解】

(a) {(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2),(2,0,0),(2,0,1),(2,0,2),(2,2,0),(2,2,1),(2,2,2)}

(b) {(0,0,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),(1,0,2),(1,2,0),(2,0,0),(2,0,1),(2,0,2),(2,2,0)}

2.2　圖P2.2表連接城市1，2，…，9之公路網



圖P2.2

(a)　試列出連接城市1與9的所有可能路線之樣本空間。

(b)　問經①→②→⑨的路線，由城市1到城市9可能的行車時間有那幾種？而經由路線①→④→⑥→⑧→⑨時又如何？

【解】

(a)　{①→②→⑨，①→②→⑤→⑦→⑨，①→②→⑤→⑧→⑨，
①→③→⑤→⑦→⑨，①→③→⑤→⑧→⑨，
①→④→⑤→⑦→⑨，①→④→⑤→⑧→⑨，
①→④→⑥→⑧→⑨}

(b)　①→②→⑨：

$$① \xrightarrow{1，2小時} ② \xrightarrow{3，4，5小時} ⑨$$

$1+3=4$　　$2+3=5$

$1+4=5$　　$2+4=6$

$1+5=6$　　$2+5=7$

∴　{4，5，6，7}　4種行車時間

①→④→⑥→⑧→⑨：

$1.5+1.5+0.5+2=5.5$　，　$1.5+1.5+0.5+3=6.5$

$1.5+2.5+0.5+2=6.5$　，　$1.5+2.5+0.5+3=7.5$

$2+1.5+0.5+2=6$　，　$2+1.5+0.5+3=7$

$2+2.5+0.5+2=7$　，　$2+2.5+0.5+3=8$

∴　{5.5，6.5，7.5，6，7，8}　6種行車時間

2.3 每層 6 公尺 × 48 公尺之公寓大樓，可隔成有一間、兩間或三間臥房的單位,或混合上述三者(圖P2.3)。如單臥房的大小均為6公尺×6公尺，雙臥房的大小均為 6 公尺× 12 公尺，三臥房的大小為 6 公尺 × 16 公尺，問該層公寓可分割成幾種不同形式。

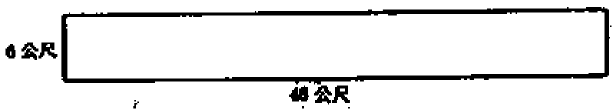


圖 P 2.3

【解】

如每一樣本點表示為：(a, b, c)

其中　a 表單臥房單位之數目

　　　b 表雙臥房單位之數目

　　　c 表三臥房單位之數目

則其樣本空間為：

$\{(8,0,0),(6,1,0),(4,2,0),$
$(2,3,0),(0,4,0),(0,0,3)\}$

2.4 在十字路口上規畫有 60 呎長的左轉車道，若只可能有 A，B 兩型車使用。A 型佔 15 呎長，B 型佔 30 呎長。

(a) 列出停在左轉車道上等待左轉的 A，B 兩型車所有可能情形。

(b) 試分別找出 1 部，2 部，3 部，4 部車等待左轉的情形。

【解】

所有樣本點以 (a, b) 表示

其中　a 表所停 A 型車之數目

　　　b 表所停 B 型車之數目

(a) $\{(4,0),(3,0),(2,0),(1,0),(0,0),$
$(2,1),(1,1),(0,1),(0,2)\}$

(b) 1 部車：$\{(1,0),(0,1)\}$

2 部車：$\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$

3部車：{(3,0),(2,1)}

4部車：{(4,0)}

2.5 某地之強風風向介於正東($\theta=0°$)與正北($\theta=90°$)之間，風速V可能爲任何值。

(a) 試繪風速與風向的樣本空間。

(b) 設 $A=\{V>20$ 哩/小時$\}$

$B=\{12$ 哩/小時$<V\leq 30$ 哩/小時$\}$

$C=\{\theta\leq 30°\}$

試在(a)部分所繪的樣本空間中，指出A，B，C與$\overline{A}$所對應之區域。

(c) 指出如下事件：

$$D=A\cap C$$

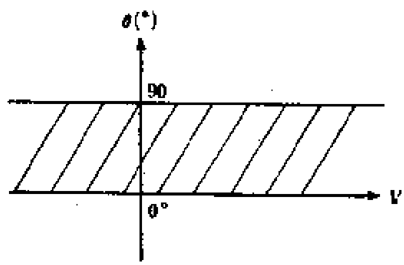
$$E=A\cup B$$

$$F=A\cap B\cap C$$

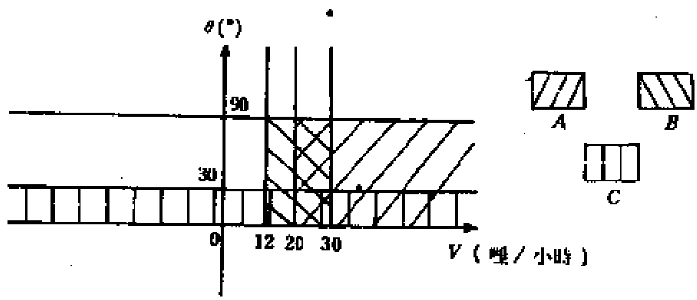
(d) D與E是否互斥？A與C又如何？

【解】

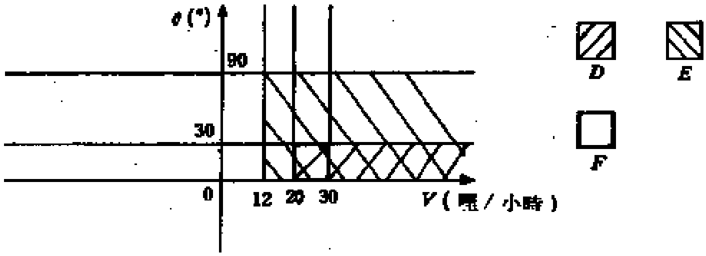
(a)



(b)



(c)



(d)　D與E　非互斥事件

A與C　非互斥事件

2.6　以A，B兩河之平均水位爲零點，A，B兩河所有可能水位如下：

$$H=-3,-2,-1,0,1,2,3,6$$

(a)　考慮A河與如下事件：

$A_1=\{H_A>0\}$，$A_2=\{H_A=0\}$，$A_3=\{H_A\leq 0\}$

列出A_1，A_2，A_3中成互斥事件之所有組合。

(b)　$N=\{-1\leq H\leq 1\}$

$D=\{H<-1\}$

$F=\{H>1\}$

用有序數對$\{h_A, h_B\}$代表一樣本點，以表示A，B兩河之水位，試找出下列事件之所有樣本點：

(i)　$N_A\cap N_B$　　　(ii)　$(F_A\cup D_A)\cap N_B$

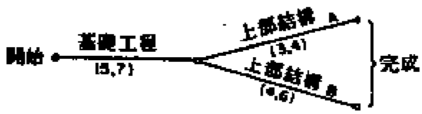
【解】

(a)　A_1與A_2，A_1與A_3皆成互斥事件。

(b)　(i)　$\{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),$
$(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),$
$(1,0),(1,1)\}$

(ii)　$\{(-3,-1),(-3,0),(-3,1),$
$(-2,-1),(-2,0),(-2,1),$
$(2,-1),(2,0),(2,1),(3,-1),$
$(3,0),(3,1),(6,-1),(6,0),$
$(6,1)\}$

2.7 兩棟建築物之主要施工程序如圖P 2.7所示，A與B之上部結構須俟共同基礎工程完成後方可進行。各程序可能完成時間在圖P 2.7標明，如基礎工程需施工5或7個月。



圖P 2.7

(a) 列出各個程序所需之施工期的所有可能情形。例，(5，3，6)表示基礎工程施工5個月，A上部結構施工3個月，B上部結構施工6個月。

(b) 問A全部完工的工期有那些可能情形？B又如何？

(c) 全部工程完工的工期有那些種可能情形？

(d) 若(a)部份所有可能的發生機率相等，則整個工程在十個月內完工的或然率爲若干？

【解】

(a) (5，3，4)，(5，3，6)，(5，4，4)，(5，4，6)，(7，3，4)，(7，3，6)，(7，4，4)，(7，4，6)。

(b) A：
$5+3=8$ ，$5+4=9$
$7+3=10$ ，$7+4=11$
$\therefore \{8, 9, 10, 11\}$

B：
$5+4=9$ ，$5+6=11$
$7+4=11$ ，$7+6=13$
$\therefore \{9, 11, 13\}$

(c) $5+4=9$ ，$7+4=11$
$5+6=11$ ，$7+6=13$
$\therefore \{9, 11, 13\}$

(d) $\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

2.8　圖 P 2.8 爲一圓柱形水槽，每天入流水深可能爲6，7或8呎，且三者機率相等。而鎭上可能需水爲5，6或7呎，且三者機率亦相等。

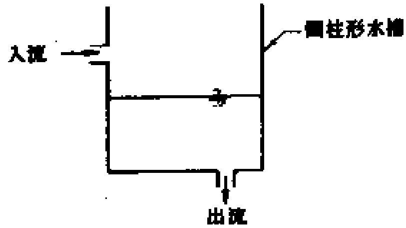


圖 P2.8

(a)　一天之入流量與出流量可能有那些組合？

(b)　設某日一開始時水槽深7呎，則在此日結束時，水槽深度可能有那些情形？此時至少有9呎的水留在水槽中之機率爲何？

【解】

樣本點：(a , b)

其中　a 表入流量

　　　b 表出流量

(a)　{ (6 , 5) , (6 , 6) , (6 , 7) , (7 , 5) , (7 , 6) , (7 , 7) , (8 , 5) , (8 , 6) , (8 , 7) }。

(b)　$6-5=1$, $6-6=0$, $6-7=-1$, $7-5=2$, $8-5=3$。

$\therefore$　{ 1 , 0 , −1 , 2 , 3 }

入流量比出流量大2呎的情形有2種，故水深9呎之機率爲$\frac{2}{9}$。

2.9　某發電廠有1號與2號兩座發電機組。一週中不能發電之機率分別爲0.01與0.02，此二事件用E_1與E_2表示。

在夏季中，有0.1的機率使氣溫高於85°F，而使用電量大增，此事件以H表示。該廠在夏季某週之供電情形有如下三種：

(i)　充分　　S，若兩機組皆可用且氣溫低於85°F

(ii) 不足 P，若有一部機不能用，且氣溫高於 85°F

(iii) 勉強 M，其他各種情形

若 H，E_1 與 E_2 互爲獨立事件。

(a) 以 H，E_1 與 E_2 來定義 S，P 與 M。

(b) 某一週中剛好一部不能發電的機率爲何？

(c) 求 $P(S)$，$P(P)$，$P(M)$。

【解】

(a) $S=\overline{E_1}\,\overline{E_2}\,\overline{H}$

$P=(E_1\cup E_2)H$

$M=\overline{E_1}\,\overline{E_2}H\cup E_1\overline{E_2}\,\overline{H}\cup\overline{E_1}E_2\overline{H}\cup E_1E_2\overline{H}$

(b) $0.01\times(1-0.02)+0.02\times(1-0.01)=0.0296$

(c) $P(S)=(1-0.02)(1-0.01)(1-0.1)$

$=0.87318$

$P(P)=(0.01+0.02-0.01\times0.02)\times0.1$

$=0.00298$

$P(M)=1-0.87318-0.00298$

$=0.12384$

2.3節

2.10 一懸臂樑有二掛鉤，而重物①，②可同時掛於某掛鉤或都不掛（圖P2.10）。A 端的固端力矩爲 M_A。

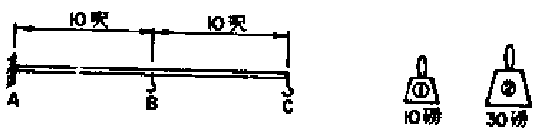


圖 P2.10

(a) M_A 可能有那些值？

(b) 設 E_1 表 $M_A>600$ 呎-磅之事件

E_2 表　$200 \leq M_A < 800$ 呎-磅之事件

則E_1與E_2是否互斥？何故？

(c)　E_1，E_3是否互斥？若$E_3 = \{0, 100, 400\}$。

(d)　重物①掛於B之機率 $= 0.2$

重物①掛於C之機率 $= 0.7$

重物②掛於B之機率 $= 0.3$

重物②掛於C之機率 $= 0.5$

則(a)中各個樣本點的發生機率爲何？

(e)　決定如下事件之機率：

$$E_1 \text{ , } E_2 \text{ , } E_1 \cap E_2 \text{ , } E_1 \cup E_2 \text{ , } E_3$$

【解】

(a)　$10 \times 10 = 100$　，　$10 \times 20 = 200$

$30 \times 10 = 300$　，　$30 \times 20 = 600$

$10 \times 10 + 30 \times 20 = 700$　，　$30 \times 10 + 10 \times 20 = 500$

$(10 + 30) \times 10 = 400$　，　$(10 + 30) \times 20 = 800$

$\{0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800\}$

(b)　E_1與E_2非互斥，因有共同之樣本點。

(c)　E_1與E_3互斥。

(d)　$M_A = 0$

$\Rightarrow \quad P = (1 - 0.2 - 0.7)(1 - 0.3 - 0.5) = 0.02$

$M_A = 100$

$\Rightarrow \quad P = 0.2 \times (1 - 0.3 - 0.5) = 0.04$

$M_A = 200$

$\Rightarrow \quad P = 0.7 \times (1 - 0.3 - 0.5) = 0.14$

$M_A = 300$

$\Rightarrow \quad P = 0.3 \times (1 - 0.2 - 0.7) = 0.03$

$M_A = 400$

$\Rightarrow \quad P = 0.2 \times 0.3 = 0.06$

$M_A=500$

$\Rightarrow \quad P=0.3\times0.7=0.21$

$M_A=600$

$\Rightarrow \quad P=0.5\times(1-0.2-0.7)=0.05$

$M_A=700$

$\Rightarrow \quad P=0.5\times0.2=0.1$

$M_A=800$

$\Rightarrow \quad P=0.7\times0.5=0.35$

(e) $P(E_1)=0.1+0.35=0.45$

$P(E_2)=1-0.02-0.04-0.35=0.59$

$P(E_1\cap E_2)=P(M_A=700)=0.1$

$P(E_1\cup E_2)=0.45+0.59-0.1=0.94$

$P(E_3)=0.02+0.04+0.06=0.12$

2.11 在一棟房屋工程中，下列三項工程相繼完成後，房屋才算完成。

E＝開挖工程準時完工；$P(E)=0.8$

F＝基礎工程準時完工；$P(F)=0.7$

S＝上部結構準時完工；$P(S)=0.9$

設此三事件彼此獨立

(a) 以事件 E，F 與 S 定義事件｛房屋工程如期完工｝，並計算其或然率。

(b) 用事件 E，F，S 與其互補事件定義：

G＝開挖工程準時完成，但另外兩工程至少有一項沒有準時完成

計算 $P(G)$。

(c) 定義下列事件：

H＝三項工程中僅一項如期完工

【解】

(a) 設 X＝房屋工程如期完工

$\Rightarrow \quad X = EFS$

$\therefore \quad P(X) = 0.8 \times 0.7 \times 0.9 = 0.504$

(b) $G = E \cap (\overline{FS}) = E \cap (\overline{F} \cup \overline{S})$

$\therefore \quad P(G) = 0.8 \times [1 - P(FS)]$

$= 0.8 \times (1 - 0.9 \times 0.7)$

$= 0.296$

(c) $H = E\overline{F}\overline{S} \cup \overline{E}F\overline{S} \cup \overline{E}\overline{F}S$

2.12 工廠廢水在排入河川前，須經一級、二級及三級處理。一級處理的結果可評定爲佳 (G_1)，尙可 (I_1)，與劣 (F_1)。二級處理的結果可評定爲佳 (G_2) 或劣 (F_2)，三級處理的結果亦可評定爲佳 (G_3) 或劣 (F_3)。三層處理之結果係互相獨立。

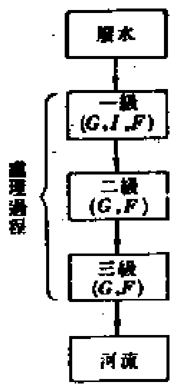


圖 P2.12

(a) 三種處理被評定的等級，有那些可能的組合？並求各個樣本點發生之機率。

(b) 若列爲合格的處理至少要有兩種處理列爲佳，則合格之機率爲若干？

(c) 若： E_1 = 一級處理佳

E_2 = 二級處理佳

E_3 = 三級處理佳

求：$P(\overline{E_1})$，$P(E_1 \cup E_2)$，$P(E_2E_3)$

(d) 以E_1，E_2，E_3表示列爲合格處理之事件。

【解】

(a) $G_1G_2G_3$，$G_1G_2F_3$，$G_1F_2G_3$，$G_1F_2F_3$，$I_1G_2G_3$，
$I_1G_2F_3$，$I_1F_2G_3$，$I_1F_2F_3$，$F_1G_2G_3$，$F_1G_2F_3$，
$F_1F_2G_3$，$F_1F_2F_3$

以上12個樣本點發生之機率皆爲：

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

(b) 由(a)可知有5個樣本點，其至少兩項處理爲佳

$$\therefore \quad P=\frac{5}{12}$$

(c) $P(\overline{E_1})=1-P(E_1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$P(E_2E_3)=P(E_3)P(E_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(d) $E_1E_2 \cup E_2E_3 \cup E_1E_3$

2.13 河川在A，B，C三處的截面大小如圖P2.13所示，A，B兩處高於平均水位的洪水資料如下：

A處之洪水位（呎）	機　率
0	0.25
2	0.25
4	0.25
6	0.25

B處之洪水位（呎）	機率
0	0.20
2	0.20
4	0.20
6	0.20
8	0.20

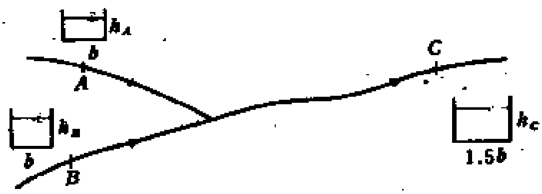


圖 P2.13

設在A，B，C三處流速相同。則C處的洪水位高於平均水位6呎以上的機率爲何？設A，B兩處的洪水位彼此獨立。

【解】

$$1.5b \times h_C = h_A \times b + h_B \times b$$

$$\therefore \quad h_A + h_B = \frac{3}{2} h_C$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad & P(h_C \geq 6) \\ & = P(h_A + h_B \geq 9) \\ & = P(h_A = 2 \cap h_B = 8) + P(h_A = 4 \cap h_B \geq 6) \\ & \quad + P(h_A = 6 \cap h_B \geq 4) \\ & = 0.25 \times 0.2 + 0.25 \times 0.4 + 0.25 \times 0.6 \\ & = 0.3\end{aligned}$$

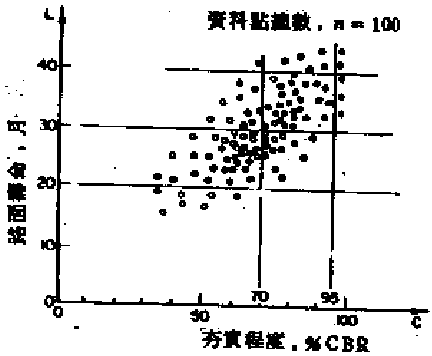
2.14 圖P2.14表路基夯實程度C與路面壽命L間關係的試驗結果。求：

(a) $P(20 < L \leq 40 \mid C \geq 70)$

(b) $P(L > 40 \mid C \leq 95)$

(c) $P(L > 40 \mid 70 < C \leq 95)$

(d) $P(L>30 \text{且} C<70)$



圖P 2.14

【解】

(a) $\dfrac{40}{100} \div \dfrac{50}{100} = \dfrac{4}{5}$

(b) $\dfrac{2}{100} \div \dfrac{5}{100} = \dfrac{2}{5}$

(c) $\dfrac{5}{100} \div \dfrac{45}{100} = \dfrac{1}{9}$

(d) $\dfrac{11}{100}$

2-15 城市 A 與 B 間的公路系統如圖P 2.15 所示。設 E_1，E_2，E_3 分別代表公路 AB，AC 與 CB 開放的事件。在任一天中，若

$$P(E_1) = \frac{2}{5} \quad , \quad P(E_3 \mid E_2) = \frac{4}{5}$$

$$P(E_2) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(E_1 \mid E_2 E_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(E_3) = \frac{2}{3}$$

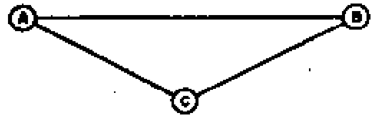


圖 P2.15

(a) 某旅客能由 A 城經 C 城到 B 城的機率爲何？

(b) 該旅客能到 B 城之機率爲何？

(c) 該旅客應先嘗試何路線，使他到 B 城之機率最大？

【解】

(a) $P(E_2E_3)=P(E_3\mid E_2)P(E_2)$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}$$

$$=0.6$$

(b) $P(E_2E_3\cup E_1)=P(E_2E_3)+P(E_1)-P(E_1E_2E_3)$

$$=0.6+0.4-P(E_1\mid E_2E_3)P(E_2E_3)$$

$$=1-\frac{1}{2}\times 0.6$$

$$=0.7$$

(c) $P(E_2E_3)=0.6>P(E_1)=0.4$

$\therefore$ 選 $A\rightarrow C\rightarrow B$

2.16 一營造商投標兩工程。工程 A 得標之機率爲 $P(A)=\frac{1}{4}$，工程 B 得標的機率爲 $P(B)=\frac{1}{3}$。

(a) 設標到 A 與標到 B 爲獨立事件，則營造商至少標到一項工程之機率爲何？

(b) 若已知該營造商至少標到一項工程，則其標到 A 之機率爲何？

(c) 若該廠商亦投標 C 工程，能標到 C 之機率爲 $P(C)=\frac{1}{4}$。則其

至少標到一項工程的機率爲何？此處亦假設 A，B，C 三事件彼此獨立。又該廠商一件工程也標不到之機率爲何？

【解】

(a) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(b) $$P(A\mid A\cup B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

(c) $$P(A\cup B\cup C)=P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}})$$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{8}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{8}$$

2.17 城市 1 與 2 由公路 A 連結，城市 2 與 3 由公路 B 連結。向東行的車道以 A_1，B_1 表示，向西行的車道以 A_2，B_2 表示。

設公路 A 的任一車道兩年內不需大翻修的或然率爲 90%，公路 B 則爲 80%。