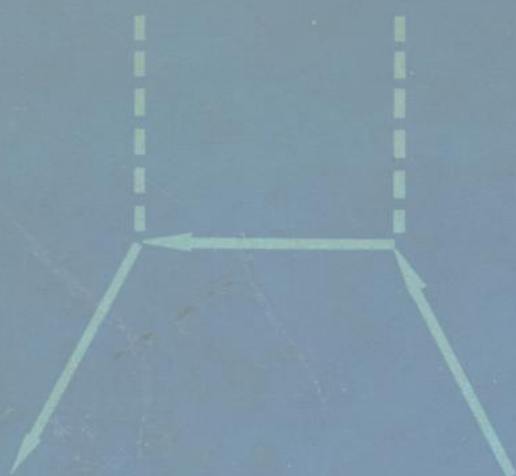




量子电动力学

А.И.阿希叶泽尔
В.Б.别列斯捷茨基

科学出版社

53.365
202

量子电动力学

A. И. 阿希叶泽尔 著
B. Б. 别列斯捷茨基

于 敏 宋玉昇 等译

曹昌祺 黄念宁 校

科学出版社

1964

A. И. АХИЕЗЕР, В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ
КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Издание второе переработанное
Физматгиз, Москва, 1959

內 容 簡 介

本书系统地讲述电磁相互作用过程的理論：詳細地研究了这一理論的基础：波动場的一般理論、格林函数理論、散射矩陣理論等。重整化理論的讲述則是以場系統諸性质的簡單物理概念为基础。

作者用了大量篇幅讲述許多应用問題；研究了輻射、 γ 射綫的內轉換、电子在外場中的行为、康普頓效应、韧致輻射、电子-正电子偶的产生和湮灭、等效光子方法、对原子能級和散射的輻射修正，以及由于宇称不守恒的发现而引起广泛注意的有极化粒子参加的过程。在这些章节中还包括詳細的計算，說明一般方法的应用，并把最終結果以公式和曲綫表出，这对理論研究和实验研究都是可以利用的。

本书的目的的一方面是对量子电动力学的基础和結果給出明确的物理图像，另一方面是使讀者掌握有关計算的方法和技术，因此可供物理系高年級学生、研究生、教师 and 理論物理方面的研究人員参考。

本书第一、二章由于敏譯，第三、四、五、六、七、八章由宋玉昇譯，第九章由中国科学技术情报研究所原子能組譯。第一、二、三、四、七、八章由曹昌祺校訂，第五、六、九章由黃念宁校訂。由曹昌祺負責全书的总校工作。

量 子 电 动 力 学

A. И. 阿希叶泽尔
B. Б. 別列斯捷茨基 著

于 敏 宋玉昇 等譯

曹昌祺 黃念宁 校

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1964 年 7 月第 一 版 书号：2941 字数：726,000

1964 年 7 月第一次印刷 开本：787×1092 1/18

(京) 0001—5,600 印张：35 5/9 插頁：3

定价：[科七] 5.60 元

88170

第二版序言

在准备第二版过程中,我们对本书作了重大的修改,但此书的基本目的和内容仍然不变,即只对电磁过程作系统的讲述。只是某些普遍性的定理和方法越出了电动力学的范围。在第二版中,在这方面讲述的篇幅有所增加(如反射性质、格林函数和泛函方法等)。

在讲述量子电动力学的原则性问题中,对重整化理论作了最大修改。在不要求完整的数学严格性的前提下,我们试图从统一的简单的物理观点讲述重整化的概念,避免单纯地给出消除发散的方案,并尽量地用了量子力学系统的一般性质。因此,本书的结构已有某些改变。用辐射修正理论研究散射矩阵占了单独一章(第七章)。在第五、六两章中用了不等于零的一级近似研究电动力学过程,在这里与发散的消除和重整化无关。在第八章中研究了高级近似。

在讲述具体效应时,我们力求在合理的限度内尽可能完全地写出结果和详细的推导。对各种电动力学现象的讨论也有所增多。特别是讲述了极化粒子过程的理论和瞄准参量方法等。

在这里我们对 В. 阿列克辛 (Алексин)、В. 巴里亚赫塔尔 (Барьяхтар)、В. 鲍尔迪谢夫 (Болдышев)、Д. 沃尔科夫 (Волков)、С. 佩列特明斯基 (Пелетминский)、Р. 波洛文 (Половин)、П. 弗明 (Фомин) 表示衷心感谢,他们对本书第二版的准备工作给予了很大的帮助。

A. 阿希叶泽尔

B. 别列斯捷茨基

第一版序言摘要

目前我們已知道了許多粒子，它們對應着彼此間有相互作用的各种量子場。但是，在自然界中存在的各种各样的物理相互作用中，目前已被充分詳細地研究过的，除万有引力外，只有电磁相互作用，此相互作用的理論便是本书要系統討論的量子电动力学的对象。

因为电磁相互作用是电子和光子的基本作用，所以量子电动力学有可能解释和預言同这些粒子行为有关的范围极广的現象。至于量子电动力学对其他粒子(核子和介子)的应用，那么由于这些粒子有其他形式的相互作用(核子或介子相互作用)起主要作用，因而受到很大的限制。因此，与介子有关的問題不在本书讲述，而核子与电磁場的相互作用，也只是研究小速度的极限情况。

建立量子电动力学的基本方程和把相互作用的場分为电磁場、电子-正电子場之所以可能，是因为場之間的相互作用是比較弱的。这表現在，描述相互作用的常数 $\alpha = e^2/\hbar c$ 是一个小量。在量子电动力学中，場之間的相互作用可看作为小的微扰，量子电动力学的数学工具就是微扰論，它把全部定量結果表示为 α 的幂級数展开。

因为电磁場和电子-正电子場是具有无限自由度的系統，所以在利用微扰論时就产生了为現代理論所特有的发散表式，这种表式只在微扰論的不等于零的一級近似中才不存在。近年来，由于量子电动力学的发展，有可能建立发散表式重整化的原則，从而使計算高級近似(称为輻射修正)也成为可能。

这一进步在很大程度上是与新的、不变性的微扰論有关。不变性微扰論使有可能把結果表示成緊湊的和相对論不变的形式，由此可以建立重整化規則。另一方面，应用不变性微扰論来計算一級近似，也比以前的方法有很大的实用优点。因此，本书的全部讲述是建立在不变性微扰論的基础上。

現代量子电动力学作为物理現象的一定范围内令人滿意的理論，还有一个严重的缺点，即为了消除所产生的发散，不得不引入一些补充的思想，这些思想既不包含在理論的基本公式中，也不反映在理論的初始方程中。看来，这种情况有它深刻的原因。此原因就是，若不考虑到自然界中存在的更广泛类型的相互联系，要建立有限范围現象的完备理論(指純电磁現象的理論)，是远远不可能的。

3/0608/14 目 录

第二版序言	xi
第一版序言摘要	xii
第一章 光子的量子力学	1
§ 1. 光子的波函数	1
1. 引言	1
2. 波矢量空间中的光子波函数	1
3. 能量	4
4. 光子波函数的归一化	5
§ 2. 具有一定动量的光子态	6
1. 光子的动量算符	6
2. 坐标表象中引入光子波函数的不可能性	7
3. 平面波	8
4. 光子的极化密度矩阵	10
§ 3. 动量矩。光子的自旋	12
1. 动量矩算符	12
2. 光子的自旋算符	13
3. 光子的自旋波函数	15
§ 4. 具有一定动量矩和宇称的光子态	17
1. 光子动量矩算符的本征函数	17
2. 纵球矢量和横球矢量	19
3. 光子态的宇称	21
4. 按球面波的展开	22
5. 电场和磁场的表式	25
§ 5. 光子被带电系统的散射	27
1. 入射波和出射波	27
2. 有效散射截面	29
3. 光学定理	30
4. 色散关系	32
§ 6. 光子场的势	33
1. 横向势、纵向势和标量势	33
2. 纵向极化“光子”	35
3. 平面波和球面波的势	37
§ 7. 光子系统	38
1. 双光子系统的波函数	38

2. 双光子的偶态和奇态	39
3. 动量矩一定的双光子态的分类	41
4. 任意数目光子系统的波函数	43
§ 8. L 矢量和球函数	45
1. 不可约张量	45
2. L 矢量代数	46
3. 球函数	49
第二章 电子的相对论量子力学	54
§ 9. 狄拉克方程	54
1. 旋量, 泡利矩阵	54
2. 狄拉克方程, 狄拉克矩阵	55
3. 双旋量的么正变换	57
4. 电子波函数分量的数目和反射变换	58
5. 狄拉克方程的对称形式, 连续性方程	59
6. 狄拉克方程的不变性	60
7. 由波函数分量组成的二次式	62
§ 10. 电子态和正电子态, 动量和极化确定的态	64
1. 具有正频率的解	64
2. 电荷共轭变换	66
3. 正电子的波函数	67
4. 平面波	69
5. 平面波的极化	70
6. 电子的极化密度矩阵	72
7. 对极化态的平均	76
§ 11. 动量矩和宇称一定的电子态	79
1. 轨道函数和自旋函数, 球旋量	79
2. 具有确定动量矩的状态的波函数	80
3. 态的宇称	82
4. 按球面波的展开	83
§ 12. 外场中的电子	85
1. 计及外场的狄拉克方程	85
2. 有心场情况变数的分离	86
3. 径向波函数的渐近行为	88
4. 能级与势阱深度的关系	89
5. 恒定均匀磁场中的电子	91
§ 13. 电子在核场中的运动	93
1. 库仑场的径向方程解	93
2. 连续谱的波函数	96
3. 能级的同位素移动	98
4. 原子核有限大小效应的一般研究	99
§ 14. 电子的散射	101
1. 旋量散射振幅	101

2. 相位表示的截面公式	103
3. 极化和方位的不对称	105
4. 庫仑場中的散射	106
5. 小角度的散射	110
§ 15. 非相对論近似	111
1. 向泡利方程的过渡	111
2. 二級近似	113
3. 狄拉克方程对核子的应用	116
第三章 量子化电磁場与电子-正电子場	118
§ 16. 电磁場的量子化	118
1. 場方程的四維形式	118
2. 变分原理, 电磁場的能量-动量張量	120
3. 势按平面波的展开	123
4. 电磁場的量子化	124
5. 不定度規的应用	129
§ 17. 电磁場的对易子	134
1. 势和場分量的对易关系	134
2. 势分量的編时乘积和正規乘积	137
3. 与算符 $\square$ 和 $(\square - m^2)$ 有关的奇异函数	142
§ 18. 电子-正电子場的量子化	149
1. 狄拉克方程的变分原理, 电子-正电子場的能量-动量張量	149
2. 电子-正电子場的量子化条件	152
§ 19. 电子-正电子場的对易子, 場分量的編时乘积和正規乘积, 电流密度	157
1. 場分量的对易关系	157
2. 电子-正电子場算符的編时乘积和正規乘积	158
3. 电流密度	161
§ 20. 波动場的一般性質	164
1. 場的波函数和洛伦茲羣	164
2. 洛伦茲羣的不可約有限維表示	166
3. 能量-动量張量和动量矩張量	170
4. 电流密度矢量	174
5. 相对論不变的場方程	175
6. 自旋为 0 或 1 的粒子的波动方程	179
§ 21. 場的量子化, 自旋与統計学間的关系	181
1. 整数自旋情况下电荷的不定性質和半整数自旋情况下能量的不定性質	181
2. 整数自旋和半整数自旋时場的量子化, 泡利定理	184
3. 坐标反射和時間反演	187
第四章 量子电动力学的基本方程	193
§ 22. 相互作用的电磁場和电子-正电子場	193
1. 相互作用場的方程組	193
2. 拉格朗日函数, 能量-动量張量	195

3. 表成泊松括号形式的場方程	198
4. 量子电动力学方程的不变性	199
§ 23. 相互作用表象中的量子电动力学方程。不变性微扰論	204
1. 海森堡表象和薛定諤表象。相互作用表象	204
2. 量子电动力学中向相互作用表象的过渡	206
3. 电荷共轭算符	211
4. 微扰論	214
§ 24. 散射矩陣	218
1. 碰撞問題和散射矩陣的定义	218
2. 場算符的矩陣元	219
3. 散射矩陣元表为正規乘积之和的形式	222
4. T 編序和 N 編序之間的一般关系	224
5. 散射矩陣对時間反演的对称性	227
§ 25. 散射矩陣元的图表示。动量空間中的散射矩陣	231
1. 正規乘积的图表示	231
2. 場相互作用的各种过程	232
3. 向动量空間的过渡	236
4. 具有奇数顶点的閉合电子綫	240
5. 写出矩陣元的規則	241
§ 26. 各种过程的几率	243
1. 几率的一般公式	243
2. 对电子和光子的极化求和与平均	245
3. 有极化粒子的过程的几率	248
4. 有外場存在的过程的几率	250
第五章 电子与光子的相互作用	253
§ 27. 光子的放射与吸收	253
1. 矩陣元的一般表式	253
2. 电多极輻射	254
3. 磁多极輻射	257
4. 选择定則	260
5. 角分布和輻射的极化	261
§ 28. 光子被自由电子的散射	267
1. 散射矩陣元	267
2. 守恆定律的应用	268
3. 散射截面的不变性	269
4. 非极化粒子情形的微分截面	270
5. 角分布和总截面	273
6. 反冲电子的分布	275
7. 极化光子的散射	276
8. 光子被极化电子的散射	278
§ 29. 軋致輻射	280
1. 連續譜电子波函数的微扰論。出射波和入射波	280

2. 轫致辐射的有效截面	283
3. 库仑场中辐射的角分布	287
4. 辐射的极化	288
5. 辐射谱	289
6. 屏蔽	291
7. 辐射时能量的损失	294
8. 非相对论范围内轫致辐射的精确理论	296
9. 极端相对论范围内轫致辐射的精确理论	300
10. 电子同电子、电子同正电子碰撞时的辐射	303
§ 30. 长波光子的辐射	306
1. “红外困难”	306
2. 利用散射矩阵研究小频率范围内的发散性	310
3. 光子“质量”与极小频率的关系	313
§ 31. 光电效应	318
1. 非相对论范围内的光电效应	318
2. 相对论范围内的光电效应	322
§ 32. 电子-正电子偶的产生	326
1. 核场中由光子产生的电子-正电子偶	326
2. 在非相对论和极端相对论情形下在核场中由光子产生粒子偶的精确理论	330
3. 两光子产生的粒子偶	334
4. 光子与电子碰撞时粒子偶的产生	336
5. 两个快速带电粒子碰撞时粒子偶的产生	337
§ 33. 电子-正电子偶转变成光子	341
1. 电子-正电子偶转变成二个光子	341
2. 电子-正电子偶的双光子湮没时的极化效应	344
3. 电子-正电子偶转变成一个光子	346
4. “正电子代核原子”的衰变	347
5. 正“正电子代核原子”的三光子衰变	349
6. 粒子偶湮没时光子的多重产生	352
§ 34. 等效光子方法	353
1. 等效光子数	353
2. 核场中快速电子的轫致辐射	357
3. 两电子碰撞时的辐射	359
4. 核场中光子产生粒子偶	360
5. 两快速粒子碰撞时粒子偶的产生	361
§ 35. 束缚电子对光子的散射。双光子的辐射	362
1. 色散公式	362
2. 共振散射	367
3. 束缚电子上的康普顿散射	368
4. 双光子辐射。氫原子的亚稳态 $2s_{1/2}$	370
第六章 两电荷的推迟相互作用	373
§ 36. 电子-电子的散射。电子-正电子的散射	373

1. 电子对电子的散射·····	373
2. 电子对正电子的散射·····	376
3. 极化电子和极化正电子的散射·····	377
4. 电子-正电子偶转变成 μ 介子偶·····	380
§ 37. 推迟势·····	380
1. 两电荷的相互作用函数·····	380
2. 矩陣元的一般形式·····	382
3. 推迟势和跃迁电流·····	384
§ 38. 精确到 v^2/c^2 的两电子相互作用能量·····	386
1. 布萊特公式·····	386
2. 两电子系统的薛定諤方程·····	390
3. 电子与正电子的相互作用·····	391
4. 电子与正电子的交换相互作用·····	392
§ 39. “正电子代核原子”·····	394
1. 哈密頓算符和无微扰方程·····	394
2. 微扰算符·····	395
3. 精細結構·····	397
4. 塞曼效应·····	400
§ 40. γ 射綫的内轉換·····	402
1. 推迟势按球面波的展开·····	402
2. 轉換系数·····	405
3. K 壳层上的轉換·····	407
4. 核的有限大小的作用·····	413
5. 电子壳层对核辐射的影响·····	414
§ 41. 有粒子偶产生的轉換, 电子引起的核激发·····	415
1. 磁多极辐射的轉換·····	415
2. 电多极辐射的轉換·····	419
3. 电子引起的核激发·····	422
4. 单色正电子·····	424
§ 42. 庫仑(单极)跃迁·····	425
1. 化为靜电相互作用·····	425
2. $E0$ 跃迁时核的轉換和核激发·····	427
第七章 散射矩陣的研究·····	429
§ 43. 量子电动力学方程精确解的性质. 传播函数·····	429
1. 相互作用場系統的穩定态·····	429
2. 传播函数及其参量表示·····	432
3. 传播函数与散射矩陣的联系. 传播函数的积分方程·····	437
4. 电子的电磁質量·····	442
§ 44. 散射矩陣的結構·····	445
1. 图的自能部分·····	445
2. 图的頂角部分·····	448
3. 电子质量的重整化·····	452

§ 45. 电子电荷的重整化	453
1. 电子的物理电荷	453
2. 传播函数和顶角部分的重整化	454
3. 三光子顶角部分	456
4. 矩陣元的重整化	458
5. e_0 幂级数形式的微扰論的建立	460
§ 46. 散射矩陣中的发散性及其消除	462
1. 不可約图中的发散性	462
2. 上限动量的引入	463
3. 不可約頂角部分和自能部分的重整化表式的收敛性	465
4. 可約图情形的重整化量的收敛性	468
§ 47. 自能部分和頂角部分的計算	470
1. 四維区域积分的計算	470
2. 二級电子自能部分	477
3. 二級光子自能部分	480
4. 外电子綫情形下的三級頂角部分	483
5. 一条外电子綫情形的三級頂角部分	487
§ 48. 量子电动力学的应用范围	489
1. 微扰論的展开参量	489
2. 展开为 e^2 的幂级数的零級近似	491
3. 零級近似情况的积分方程	495
4. 传播函数的泛函特性	495
5. 量子电动力学的完閉性問題	497
§ 49. 广义格林函数	499
1. 有外場存在的格林函数	499
2. 双电子格林函数. 电子-正电子系統的束縛态方程	501
3. 格林函数的变分导数方程	504
4. 格林函数的泛函积分表式	506
第八章 对电磁过程的輻射修正	511
§ 50. 电子的有效势能. 对电子磁矩和庫仑定律的輻射修正	511
1. 电子与电磁場相互作用能量的 α 級修正	511
2. 对电子磁矩的輻射修正	515
3. 对庫仑定律的輻射修正	517
§ 51. 对电子散射的輻射修正	520
1. 电子在核庫仑場中散射的二級玻恩近似	520
2. 考虑到 α 級輻射修正的电子在核庫仑場中的微分散射截面	524
3. 散射截面中光子“质量”的消除	527
4. 任意散射过程的紅外发散的消除	529
5. 电子-电子和电子-正电子散射的輻射修正	533
§ 52. 光子-电子散射、粒子偶的双光子湮沒和轆致輻射的輻射修正	536
1. 对康普頓效应的輻射修正	536
2. 小能量和大能量的极限情形	544

3. 粒子偶的双光子湮没的辐射修正	546
4. 对轫致辐射的辐射修正	548
§ 53. 原子能级的辐射修正	550
1. 原子能级的辐射位移	550
2. μ 氢介原子能级的辐射位移	554
3. 谱线的自然宽度	555
4. 共振附近的光子散射	558
§ 54. 光子-光子散射和电磁场的拉格朗日函数	560
1. 四秩的光子-光子散射张量	560
2. 光子对光子的散射	564
3. 光子-光子散射截面与电磁场拉格朗日函数的辐射修正间的关系	565
4. 电磁场格林函数的精确表式	575
§ 55. 光子在核库仑场中的散射	584
1. 恒定电磁场中光子散射截面的一般表式	584
2. 光子向前散射的振幅和产生粒子偶的截面间的关系	585
3. 光子在核场中产生粒子偶时反冲核按动量的分布	587
4. 反冲核的角分布和核库仑场中光子产生粒子偶的积分截面	594
5. 光子在核场中的小角度相干散射	596
第九章 零自旋粒子的电动力学	603
§ 56. 标量粒子的场方程	603
1. 一阶方程	603
2. 自由标量场的量子化	605
3. 场的对易子, 场分量乘积的真空平均值	607
§ 57. 标量电动力学中的散射矩阵	609
1. 相互作用表象	609
2. 散射矩阵元的计算规则	612
3. 散射矩阵中的发散性	613
§ 58. 标量粒子的散射	615
1. 标量粒子在核库仑场中的散射	615
2. 带电标量粒子在标量粒子上的散射	617
§ 59. 标量粒子对光子的散射, 标量粒子对光子的轫致辐射	618
1. 标量粒子对光子的散射	618
2. 标量粒子的轫致辐射	620
§ 60. 标量粒子偶的产生和湮没	621
1. 光子在核库仑场中引起的标量粒子偶的产生	621
2. 双光子引起的标量粒子偶的产生	622
3. 标量粒子偶的双光子湮没	623
4. 标量粒子偶和电子-正电子偶的相互转变	623
§ 61. 标量带电粒子的真空极化	625
1. 标量粒子的真空极化张量	625
2. 对库仑定律的修正	627
3. 光子对光子的散射, 对电磁场的拉格朗日函数的辐射修正	628
結論	630

第一章 光子的量子力学

§ 1. 光子的波函数

1. 引言

光的微粒性是历史上奠定量子理论发展的第一个基本事实。光粒子(光子)的能量 ω 和相应的电磁场的振动频率 ω 之间的普朗克-爱因斯坦关系式 $\omega = \hbar\omega$, 是历史上第一个包含量子常数 $\hbar$ 的关系式。

但是,彻底的原子的量子力学是在光子的量子力学之前创立的。这一点具有深刻的物理原因。原子中的粒子,即电子和原子核,有不等于零的静质量。对于它们,存在一个比静能量小得多的能量范围,在此范围内可以不考虑相对论的效应。光子因为静质量等于零,所以不存在非相对论的范围,光子的量子力学从一开始就应是相对论的。

量子力学把具有一个或几个波函数的场与粒子相对应,波函数决定粒子的各种物理量的几率分布和平均值。波函数满足某个微分方程组,此微分方程组也决定粒子的运动性质。

当这种描述过渡到相对论范围时,我们首先应当考虑相对性原理的要求。相对性原理的要求可归结为:场方程应当对于洛伦兹变换是不变的。单是这个条件还不能单值地确定出反映该粒子特性的场方程的形式。但是,在光子的情形中,由于有经典的类似,即经典电磁场方程,使场方程的建立变得容易,因此自然地把麦克斯韦方程组作为光子的量子力学运动方程;此时光子的波动性将与电磁场的性质一样。我们将看到,这一点再加上关系式 $\omega = \hbar\omega$, 完全足以建立起光子的理论以及光子与带电粒子相互作用的理论。

我们的第一个任务是研究在没有电荷情况下的光子。虽然粒子的性质是在它同别的粒子相互作用时表现出来的,但是这种讨论作为研究相互作用的准备阶段还是必要的。

2. 波向量空间中的光子波函数

电磁场是用电场矢量 $\mathbf{E}$ 和磁场矢量 $\mathbf{H}$ 来描述的,在没有电荷存在时它们满足真

空的麦克斯韦方程组:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

(在这里和以后我们用光速 $c = 1$ 的单位制).

如上所述, 我们将把矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 解释作描述光子状态 (在量子力学意义上) 的量. 为了给方程组 (1.1) 以“微粒性”解释, 我们把它和一般量子力学中的薛定谔方程相比较. 为此, 最好先把方程组 (1.1) 对空间坐标 $\mathbf{r}$ 作傅立叶变换, 即变到波矢量空间. 把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 写作

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ \mathbf{H} &= \int \mathbf{H}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

于是不难看出, 由于 (1.1), 傅立叶分量 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ 和 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 满足下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} &= -i[\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\mathbf{k}}], \\ \mathbf{k}\mathbf{H}_{\mathbf{k}} &= 0, \\ \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} &= i[\mathbf{k}, \mathbf{H}_{\mathbf{k}}], \\ \mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

式中矢量上边的点表示对时间的微分 (为简单起见, 以后在函数 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ 和 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{H}(\mathbf{k}, t)$ 中不标出变数 t). 对这个方程组还应加上场是实数这一条件:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} &= \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^*, \\ \mathbf{H}_{-\mathbf{k}} &= \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^*. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

我们也可以用矢量 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ 和 $\dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ 来代替 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ 和 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$, 利用 (1.3) 消去 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 得

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i \left[\frac{\mathbf{k}}{k^2}, \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \right]. \quad (1.5)$$

最好是避免附加上实数条件, 为此我们作下列变换, 这样就自然保证了关系式 (1.4) 成立

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= N(k)(\mathbf{f}_{\mathbf{k}} + \mathbf{f}_{-\mathbf{k}}^*), \\ \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} &= -ikN(k)(\mathbf{f}_{\mathbf{k}} - \mathbf{f}_{-\mathbf{k}}^*), \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

这里的 $N(k)$ 是某归一化因子, 在下面我们将看到, 把它取作

$$N(k) = \sqrt{\frac{k}{2(2\pi)^3}} \quad (1.7)$$

是方便的. 变换(1.6)表示, 可以代替两个函数 $\mathbf{E}_k$ 和 $\dot{\mathbf{E}}_k$ (由于(1.4), 它们事实上只
在半个 k 空间独立取值)而引入一个函数 $\mathbf{f}_k$, 它在整个 k 空间独立取值.

如果利用(1.6), 则展式(1.2)有下面形式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathcal{E} + \mathcal{E}^*, \quad \mathbf{H} = \mathcal{H} + \mathcal{H}^*, \\ \mathcal{E} &= \int N(k) \mathbf{f}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ \mathcal{H} &= \int N(k) \left[\frac{\mathbf{k}}{k}, \mathbf{f}_k \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

不难得出 $\mathbf{f}_k$ 所满足的方程. 从(1.3)中消去 $\mathbf{H}_k$, 得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \mathbf{E}_k = 0,$$

它可以改写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ik \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - ik \right) \mathbf{E}_k = 0.$$

此二次方程可变换成 $\mathbf{f}_k$ 的一次方程. 事实上, 利用由(1.6)得到的关系式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - ik \right) \mathbf{E}_k = -2iN(k)k\mathbf{f}_k,$$

我们得出

$$i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} = k\mathbf{f}_k. \quad (1.9)$$

将(1.5)和(1.6)代入(1.3), 得出

$$k\mathbf{f}_k = 0. \quad (1.10)$$

方程(1.9)和(1.10)可以合为一个方程. 对(1.10)乘以 $\frac{k}{k}$ 后再与(1.9)相加, 得出

$$i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} = w\mathbf{f}_k, \quad (1.11)$$

式中

$$(w\mathbf{f}_k)_a = w_{a\beta} f_{k\beta}, \quad (1.11')$$

$$w_{a\beta} = k \left(\delta_{a\beta} - \frac{k_a k_\beta}{k^2} \right).$$

由(1.11)得知

$$\frac{\partial}{\partial t} (k\mathbf{f}_k) = 0.$$

因此, 如果(1.10)在初时刻被满足, 则它将永远被满足. 具有初始条件(1.10)的方程(1.11)与麦克斯韦方程组等效.

方程(1.11)有薛定谔方程的形式, 其中 w 是哈密顿算符(在这里和以后我们将用

$\hbar = 1$ 的单位制)。此算符的本征值等于 k 。假若可以把此处所引入的哈密頓算符形式地和光子能量的物理算符等同, 那么本征值等于 k 正是光子频率和能量之间的量子关系。我们在下面将证明这一点, 并且可以把函数 f_k 解释作光子在 k 空间的波函数 (在一般的量子力学意义上)。我们也可以在 k 空间中定义光子的其他物理量算符, 例如动量算符, 动量矩算符等等。

3. 能 量

我们来证明, 上面引入的算符 w 确实可以解释成光子的能量算符。为此, 我们写出相应于该光子的电磁场的能量 $\bar{w}$ 的表式

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d\mathbf{r} \quad (1.12)$$

(对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 我们用亥维赛单位)。上式是场矢量二次式的空间积分。而在量子力学中, 波函数二次式的空间积分表示相应的物理量的平均值。因为我们研究的是一个光子的场, 所以把(1.12)式解释作光子能量的平均值是一种很自然的推广。

我们来证明, $\bar{w}$ 可以表成下式:

$$\bar{w} = \int f_k^* w f_k dk, \quad (1.13)$$

式中 w 由公式(1.11)来确定。

为此, 我们把(1.2)代入(1.12):

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \int \{ \mathbf{E}_k \mathbf{E}_{k'} + \mathbf{H}_k \mathbf{H}_{k'} \} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{r}.$$

利用下面的关系式对 $\mathbf{r}$ 积分:

$$\int e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$$

(式中 $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ 是三維 δ 函数), 再由(1.5), 我们得出

$$\bar{w} = 4\pi^3 \int \left(\mathbf{E}_k \mathbf{E}_{-k} + \frac{1}{k^2} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_{-k} \right) d\mathbf{k}.$$

根据(1.6), 我们用 f_k 表示 $\mathbf{E}_k$ 和 $\dot{\mathbf{E}}_k$, 得出

$$\bar{w} = 16\pi^3 \int N^2 f_k^* f_k d\mathbf{k}.$$

若把 $N(k)$ 取作(1.7)所表示的值, 我们即得出关系式(1.13)。

我们来讨论方程(1.11)的单色解:

$$f_k \equiv f(\mathbf{k}, t) = f_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}, \quad (1.14)$$

式中 ω 是光子能量算符 w 的本征值。显然, $f_0(\mathbf{k})$ 只有当 $k = \omega$ 时才不等于零, 而能