

高等学校教材

非线性网络

武汉水利电力学院 蒋德福 编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书着重讨论电力系统中常见的铁磁谐振(基频谐振和分频谐振)的计算方法和分析方法。与国内外现有同类书比较,具有下列特点:全书系以电力工业非线性网络问题为基本内容;有些计算方法与分析方法采用与其它书不同的表达方式以便于理解;通过大量生产实际的例题与习题以提高计算和分析能力。全书共分六章:非线性元件特性、非线性网络的近似算法、非线性网络的数值算法、非线性网络的稳定性、铁磁电路的计算和分析、非线性半导体涂层电压分布的计算方法和测定方法。

本书可供高等学校电力类专业学生和研究生以及电力系统工程技术人员阅读和参考。

高等学校教材

非 线 性 网 络

武汉水利电力学院 蒋德福 编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 9.75印张 218千字

1987年11月第一版 1987年11月北京第一次印刷

印数0001—4630册

ISBN 7-120-00036-5/TM·15

15143·6482 定价 1.70 元

目 录

前 言

第一章 非线性元件特性	1
第一节 非线性元件特性	1
第二节 非线性元件特性的试验测定法	4
第三节 非线性元件特性曲线的拟合方程	7
习 题	11
第二章 非线性网络的近似算法	12
第一节 电阻性非线性网络的算法	12
第二节 有储能元件的非线性网络稳态的近似算法	17
第三节 具有可控非线性电感网络稳态的近似算法	20
第四节 直流电流互感器	22
第五节 非线性网络暂态的分段线性化算法	25
第六节 非线性网络暂态的慢变振幅算法	30
习 题	37
第三章 非线性网络的数值算法	39
第一节 非线性网络稳态的牛顿-拉夫逊算法	39
第二节 非线性网络稳态的主元迭代算法	41
第三节 非线性网络暂态的主元迭代算法	48
第四节 非线性网络暂态的状态变量算法	53
第五节 非线性网络暂态的分步逼近算法	59
第六节 非线性网络暂态的龙格-库塔算法	67
习 题	71
第四章 非线性网络的稳定性	72
第一节 特征根法	73
第二节 相平面法	81
第三节 描述函数法	90
习 题	96
第五章 铁磁电路的计算和分析	98
第一节 串联铁磁电路基频稳态的计算和分析	98
第二节 串联铁磁电路的基频谐振条件	100
第三节 串联铁磁电路的电压和电流的谐波分量幅值的计算	111
第四节 并联铁磁电路基频谐振的计算和分析	115
第五节 串联铁磁电路 $\frac{1}{3}$ 次分频谐振的谐波平衡算法	117

第六节	串联铁磁电路 $\frac{1}{3}$ 次分频谐振的描述函数算法	125
第七节	串联铁磁电路 $\frac{1}{3}$ 次分频谐振的计算示例	135
习 题		139
第六章	非线性半导体涂层电压分布的计算方法和测定方法	140
第一节	线性半导体涂层电压分布的计算方法	140
第二节	非线性半导体涂层电压分布的近似计算方法	143
第三节	非线性半导体涂层电压分布的实际测定法	145
习 题		149
参考文献		150

第一章 非线性元件特性

非线性网络的计算和分析与非线性元件的特性有密切的关系,因此在进行非线性网络的计算和分析以前,必须掌握非线性元件的特性。非线性元件的特性一般是用试验方法测定,它的实测数据或是用表格的形式表示出来,或是用曲线的形式表示出来。

为了进行非线性网络的计算和分析,必须用近似的数学式把非线性特性表达出来,就是说必须找到实测非线性特性曲线的拟合方程。由于实测的非线性特性曲线受许多因素影响,所以得到的拟合方程也是近似的。这是不能采取准确的方法进行非线性网络的计算和分析的原因之一。

由于非线性元件的工作状态不同,其特性曲线的形状和其拟合方程的形式也可能不同。最好是在接近非线性元件工作状态的情况下用试验方法测定其特性,但实际上这是很难做到的,也没有必要,因为用同一种制造工艺制造的元件其特性也不可能完全相同,而非线性网络的计算和分析也是近似的。

线性网络阻抗元件的特性可以用两个物理量(例如电阻的电压和电流)的比值表征,非线性元件的特性最好用曲线和其拟合方程表征。与线性元件不同,非线性元件的等效阻抗(或导纳)与其电压或电流值有关,仍然是非线性的。

在非线性特性上的较小工作段内,我们可以用直线段代替或用特性曲线工作点上的切线代替。我们把与工作点对应的两个量的比值叫做绝对特性,把特性曲线在工作点的切线斜率叫做微分特性。

在这一章里,我们将讨论常用的非线性元件的特性和其试验测定方法,以及实测特性曲线的拟合方程等问题。

第一节 非线性元件特性

我们常用的非线性阻抗元件主要是非线性电阻、非线性电感和非线性电容。非线性阻抗元件的性质不同,特性的表示方式也不同,非线性元件特性用同相变化的两物理量之间的关系表示,即非线性电阻特性用伏安特性表示,非线性电感特性用磁化特性表示,非线性电容特性用伏库特性表示。

我们常用的非线性电阻有碳化硅或氧化锌制的压敏电阻、二极管的正向等效电阻等。通常开关中电弧的伏安特性是非线性的,它的等效电阻也是非线性的。

图1-1是非线性电阻的稳态直流伏安特性,用有效值表示的交流伏安特性也具有类似的曲线形状。图1-1(a)是电弧的直流静态伏安特性,图1-1(b)是碳化硅或氧化锌压敏电阻的直流静态伏安特性。图1-2(a)是电弧的稳态交流伏安特性,它是对称于原点的一个滞环。图1-2(b)是压敏电阻的稳态交流伏安特性。引起滞环的原因是电弧通道和压敏电阻片

的热惯性。

与工作点 D (图1-1) 对应的非线性电阻的绝对电阻 R_a 和微分电阻 R_d 分别为

$$R_{aD} = \frac{U_D}{I_D}, \quad R_{dD} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_{U=U_D} \quad (1-1)$$

绝对电阻和微分电阻的倒数 $G_{aD} = \frac{1}{R_{aD}}$ 和 $G_{dD} = \frac{1}{R_{dD}}$ 分别叫做绝对电导和微分电导。

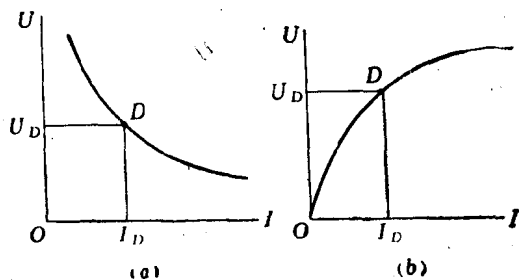


图 1-1

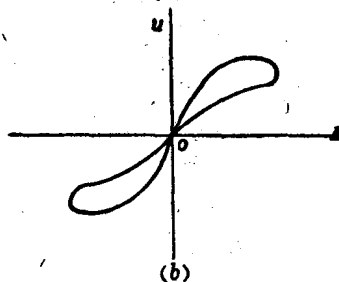
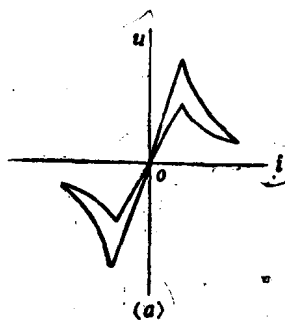


图 1-2

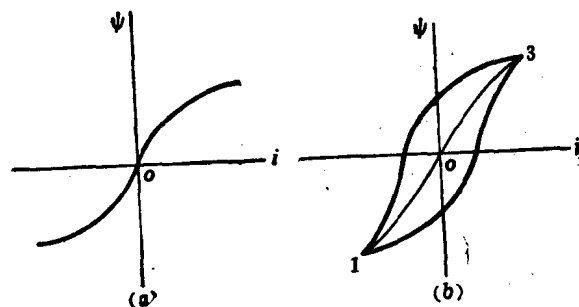


图 1-3

图1-1和图1-2的伏安特性曲线的形状表明：非线性电阻的工况不同，特性曲线的形状也不同，通过相同电流时的电压降也不同。试验结果表明：用有效值表示的低频交流伏安特性与直流的伏安特性之间的差别不大。

非线性电感是指有封闭铁芯磁路的线圈，常见的非线性电感有各种类型的变压器和有铁芯的电抗器。

非线性电感的特性可以用铁芯中的磁通密度 B 与磁场强度 H 之间的关系表示，即 $B = f_1(H)$ ；或用磁链 Ψ 与磁场强度 H 之间关系表示，即 $\Psi = f_2(H)$ ；或用磁链 ψ 与线圈电流 i 之间关系表示，即 $\psi = f_3(i)$ 或 $i = f_4(\psi)$ [图1-3(a)]。在进行具有非线性电感的网络的计算时，采用线圈电流 i 与磁链 ψ 之间的关系比较方便。非线性电感的实际交流磁化特性 $i(\psi)$ [图1-3(b)] 也是一个滞环。因为非线性电感的磁化特性 $i(\psi)$ 的测定要比用有效值表示的伏安特性 $U(I)$ 的测定要困难些，所以常用有效值伏安特性表示非线性电感的特性。但在进行具有非线性电感的网络的计算时，必须用磁化特性，在后面我们将讨论由伏安特性得到近似的磁化特性的方法。

因为非线性电感上的电压降为

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \frac{di}{dt} = L(i) \frac{di}{dt} \quad (1-2)$$

所以电感 $L(i)$ 是电流的函数，电流越大，铁芯中磁通饱和的影响越大，电感越小。我们可以把 $L(i)$ 叫做微分电感，把比值 ψ/i 叫做绝对电感，但后者对非线性网络的计算没有实际意义，因此一般就不用微分电感和绝对电感的名词。

在一个铁芯上只有一个线圈的非线性电感的数值是由其磁化特性和电流值决定的，是不能控制的，我们把它叫做不可控非线性电感。如果在一个铁芯上绕两个线圈（图1-4），在一个线圈中通以可调节的直流电流 I_d ，在另一个线圈中通以交流电流，铁芯中的磁通是由直流磁通分量 Φ_d 和交量磁通分量 φ 组成。调节直流电流的大小，可以改变磁化特性曲线上的工作点，而改变电感的大小，即可改变交流电流（如果交流电源电压保持不变）的大小和功率的大小。

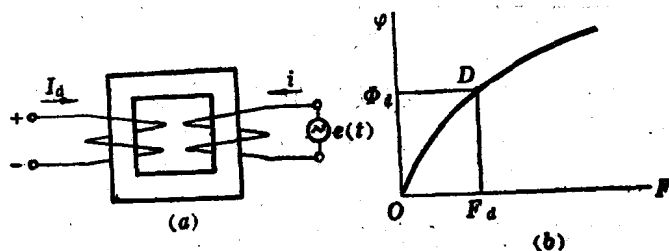


图 1-4

在许多电子技术领域中，非线性电容的应用较广泛。电力系统中某些电力设备绝缘特性在一定条件下也是非线性的。非线性电容的特性用电荷与电压之间的关系表示，即用伏库特性 $q=f_1(u)$ 或 $u=f_2(q)$ 表示。直流伏库特性 $Q=f_1(U)$ [图1-5(a)] 是一条曲线，交流伏库特性 $q=f_1(u)$ 是一个滞环 [图1-5(b)]。在一般情况下，用曲线103作为伏库特性 $q=f(u)$ ，代替滞环特性。

非线性电容特性曲线的工作点 D [图1-5(c)] 是由直流电压决定的。如果迭加在直流电压上的交流电压幅值很小，即特性曲线的工作段很小，我们可以用直线段或用工作点上的切线代替曲线。切线的斜率 $C_d = \frac{dq}{du}$ 叫做微分电容，电荷 Q_D 与电压 U_D 的比值 $C_d = \frac{Q_D}{U_D}$ 叫

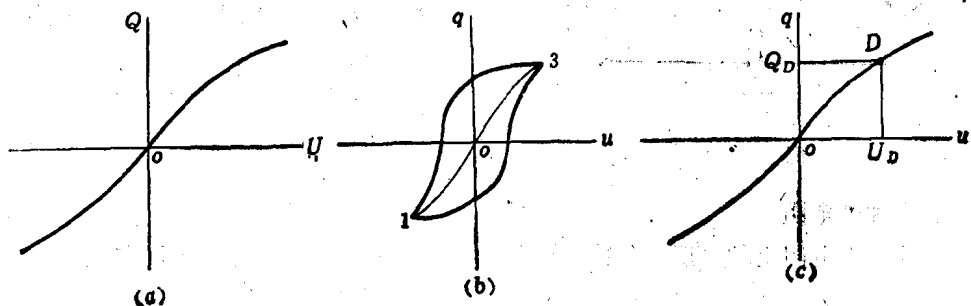
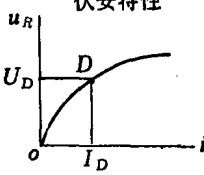
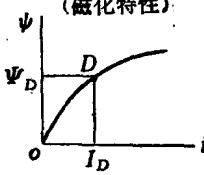
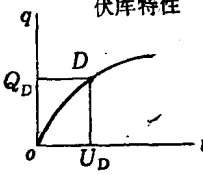


图 1-5

表 1-1

	非线性电阻 R	非线性电感 L	非线性电容 C
特性曲线	伏安特性 	韦安特性 (磁化特性) 	伏库特性 
绝对特性	$R_{sD} = \frac{U_D}{I_D}$	—	$C_{sD} = \frac{Q_D}{U_D}$
微分特性	$R_{dD} = \left. \frac{du_R}{di_R} \right _{u_R=U_{RD}}$	$L_D = \left. \frac{d\psi}{di} \right _{i=I_D}$	$C_{dD} = \left. \frac{dq}{du} \right _{u=U_D}$

做绝对电容。

表1-1是常用的三种非线性元件特性表示方法的比较表。除了在表1-1上列出的非线性特性外，在近似计算中，还引用一个线性等效阻抗的概念，将在第二章里讨论。

第二节 非线性元件特性的试验测定法

为了进行较准确的计算和分析，要求尽可能准确地测定非线性元件的特性，并且最好在接近工作状态的情况下测定。但在进行实际网络（图1-6）的计算以前，非线性元件的工作状态是未知的，通过它的电流和其电压降是不知道的，这使我们不可能进行准确的测定，因此我们只能根据具体条件，尽可能用几种不同的方法测定，比较测定结果，并与某些已知工作状态下的计算结果对照，选择一种实用的测定方法。下面讨论非线性电阻、非线性电感和非线性电容特性的测定方法。

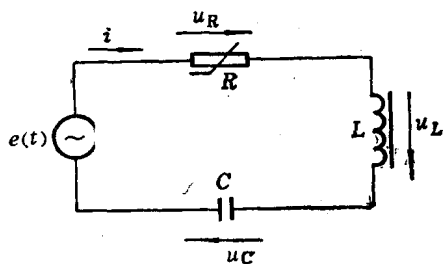


图 1-6

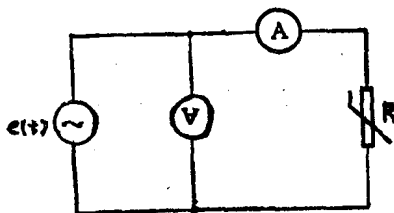


图 1-7

一、非线性电阻

因为非线性电阻上的电压降与通过它的电流同相变化，并且可直接测定，所以非线性电阻特性的测定方法比较简单，可用图1-7的电路测定。当电源电压是直流电压时，可以测得非线性电阻的直流稳态伏安特性。当电源电压是工频正弦交流电压时，通过非线性电

阻的电流为非正弦电流。如果用测有效值的电压表和电流表测非线性电阻上的电压降和通过它的电流,可以得到用有效值表示的交流伏安特性,它是近似的特性。如果用测幅值的电压表和电流表测电压降幅值和电流幅值,可以得到用幅值表示的交流伏安特性,它是较准确的特性。实测数据表明:碳化硅或氧化锌压敏电阻的交流幅值伏安特性接近于直流伏安特性,有效值交流伏安特性与直流伏安特性之间的差不超过10%。

非线性电阻的冲击伏安特性与直流伏安特性有较大的差别,必须用冲击电流源来测定。图1-8是测定非线性电阻冲击伏安特性的原理接线图,图上 C 为已被充好电的电容器, L 为线性小电感, R 为被测非线性电阻, R_s 为测定通过非线性电阻的电流用的分流电阻, C_1 和 C_2 为测非线性电阻上电压降用的电容分压器, O 为一次快速脉冲示波器, g 为球间隙。把球间隙 G 的距离固定在某一适当的数值,使电容器 C 上的电压达到某一规定值时,球间隙 G 击穿,电容器 C 通过 L 、 R 和 R_s 放电,冲击电流通过非线性电阻,其伏安特性用示波器 O 记录。

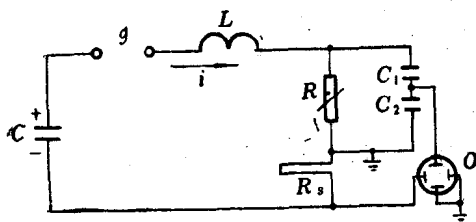


图 1-8

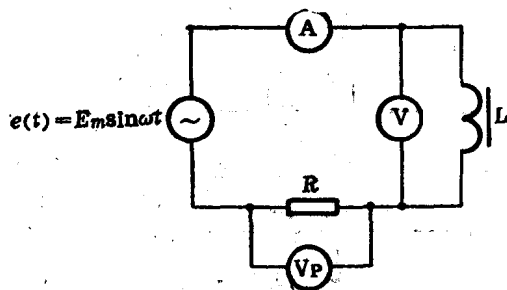


图 1-9

二、非线性电感

非线性电感的铁芯是封闭的,我们不能用直接方法测定铁芯中的磁通,就是说不能用直接方法测定非线性电感的磁化特性。由于非线性电感的直流磁化特性与交流磁化特性有较大的差别,如果非线性电感在交流电源下工作,我们必须用交流电源来测定非线性电感的磁化特性。在前面,我们曾指出:非线性电感的交流稳态磁化特性是一个滞环[图1-3(b)],一般可以用图1-3(a)的单值特性曲线代替,它是在不同电流值下磁化特性滞环顶点的连线,即 $I_m = f_1(\Psi_m)$ 或 $\Psi_m = f_2(I_m)$ 。如果把正弦交流电压直接加在非线性电感的两端点上,则非线性电感的磁链幅值为

$$\Psi_m = \frac{U_m}{\omega} \quad (1-3)$$

式中 U_m 和 ω 分别为正弦交流电压的幅值和角频率。

在非线性电感端点上加正弦交流电压时,通过非线性电感的电流是非正弦交流电流。非正弦交流电流的幅值是用测电压幅值的电压表测非正弦交流电流在一个小电阻上电压降幅值的方法测定。图1-9是测定非线性电感交流磁化特性的原理接线图,图上电压表 V 和电流表 A 用以测电压和电流的有效值, V_p 是测电压峰值的小量程电压表, R 是无感的小电阻。为了保持非线性电感两端点上电压的正弦性,电阻 R 上的电压降应该小于电

源电压的1%。改变正弦交流电源电压的幅值 E_m ，我们就可以得到用幅值表示的磁化特性 $I_m = f_1(\Psi_m)$ 或 $\Psi_m = f_2(I_m)$ 。

因为我们不考虑非线性电感磁化特性的滞环效应，所以可以把用幅值表示的磁化特性看成是工频交流电压下电流与磁链瞬时值之间的关系曲线，即瞬时磁化特性。

我们也可以用图1-9的接线图测定非线性电感的伏安特性。至于可控非线性电感的磁化特性应该用直流电源测定。

三、非线性电容

非线性电容伏库特性 $q=f(u)$ 的电压 u 是可以直接测定的，电荷 q 的测定就比较麻烦。

非线性电容的直流伏库特性可用图1-10的接线测定，图上 G 为冲击检流计， R_s 为冲击检流计的分流电阻， G 和 R_s 是用来测定非线性电容上的电荷的， R_1 是保护电阻。当直流电源电压 E 固定时，合上开关 K ，非线性电容 C 被充电，在极板上积聚电荷，两极板上的电压 u_c 逐渐升高。等到非线性电容 C 极板上电压等于电源电压 E 时，充电结束， G 和 R_s 指出非线性电容极板上的电荷。改变直流电源电压 E ，就可得到非线性电容的直流伏库特性 $Q=f(U)$ 。

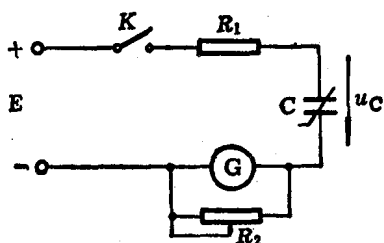


图 1-10

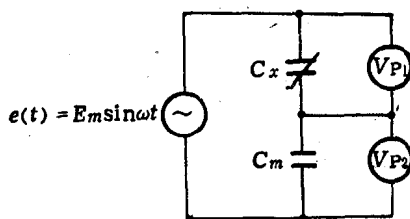


图 1-11

非线性电容的交流伏库特性与直流伏库特性有较大的差别，交流伏库特性可用图1-11的接线测定，图上 C_x 和 C_m 分别为被测非线性电容和测量用的线性电容， V_{P1} 和 V_{P2} 都是测量峰值的电压表。因为 C_m 与 C_x 串联，所以 C_m 上的电荷等于 C_x 上的电荷。由于测量用的电容是线性电容，因此测量用的电容上的电荷幅值 Q_{mm} （即被测非线性电容上的电荷幅值 Q_{xm} ）

$$Q_{mm} = Q_{xm} = C_m U_{mm} \quad (1-4)$$

式中 U_{mm} 为测量用电容 C_m 上的电压幅值。

改变正弦交流电源电压幅值 E_m ，就可得到非线性电容的交流幅值伏库特性 $Q_m = f(U_m)$ 。因为我们不考虑伏库特性的滞环效应，所以把幅值伏库特性看成非线性电容的瞬时伏库特性 $q=f(u)$ 。

非线性电容的微分电容可用图1-12的电桥电路测定，这种电桥电路就是西林电桥电路，不过电源是由直流电压源 E_D 和交流电压源 $e(t)$ 迭加而成，交流电压幅值应该很小，使非线性电容特性曲线的工作段可以用切线代替（参阅图1-13），并使电桥能调节到平衡状态。由电桥的指示值就可得到与 $U_D (=E_D)$ 和 Q_D 对应的微分电容。如果直流电源电压 E_D 由零逐级增加，就可由与直流电源电压对应的微分电容，用逐点描切线的方法得到直流伏库

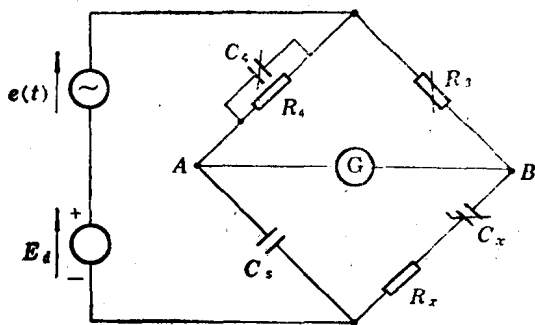


图 1-12

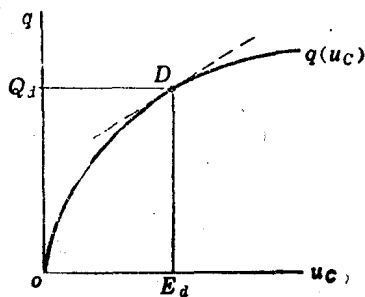


图 1-13

特性。

第三节 非线性元件特性曲线的拟合方程

用试验方法得到的特性曲线只能用在用图解法求解网络方程的场合。对于复杂的电阻性网络和交流动态网络来说，非线性特性曲线必须用近似的数学式表达出来，就是说必须得到特性曲线的拟合方程。把拟合方程代到网络方程中去，用适当的方法求解。

因为用试验方法得到的数据在坐标纸上标出后，实测点不一定都分布在一条光滑的曲线上，而可能分布在具有一定宽度的带内。我们通过实测点作一条光滑的平均曲线。根据曲线的形状，选用一个拟合方程形式，用适当的方法确定拟合方程的系数。

因为实际测得的非线性特性的数据往往要受到一些因素的影响，实测数据本身也可能是不稳定的，所以应该根据具体条件选择一个既便于计算又基本符合实测曲线的规律的拟合方程。

如果某些非线性元件的特性已经有理论公式或经验公式，而实测数据又较稳定时，我们只要用少数的实测数据即可确定拟合方程的系数。例如晶体二极管伏安特性的理论公式为

$$i_s = I_0 (e^{\lambda u_s} - 1) \quad (1-5)$$

式中， i_s 和 u_s 分别为二极管的电流和电压； I_0 为二极管的饱和电流； λ 为常数（ $\lambda \approx 40$ ）。

式（1-5）中有两个未知数 I_0 和 λ ，为了确定 I_0 和 λ 的值，只要进行两次试验，取得两组数据，把这两组数据代入式（1-5）中去，得到代数方程组，求解它，就可得到 I_0 和 λ 。

又例如碳化硅压敏电阻伏安特性的经验公式为

$$u = Ci^\alpha \quad (1-6)$$

式中 u 和 i 分别为压敏电阻的电压和电流， C 和 α 为两个常数。试品不同， C 和 α 的数值也可能不同。我们也可以用两组实测数据决定 C 和 α 值。这种方法比较简单，但如果两组实测数据选择不适当，用这种方法决定的系数，可能带来很大的误差。

当没有非线性特性的理论公式和经验公式时，我们可以根据实测非线性特性的平均曲线的形状，选用近似的拟合方程形式。常用的拟合方程形式有：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (1-7)$$

$$y = x/(a+bx) \quad (1-8)$$

$$y = atg^{-1}bx \quad (1-9)$$

$$y = atghbx \quad (1-10)$$

$$y = ax^b \quad (1-11)$$

⋮
⋮

特性曲线拟合方程的形式确定后，可以用下面三种方法确定拟合方程的系数。

一、选择实测点的方法

这种方法与确定理论公式和经验公式系数的方法一样，为使得到的拟合方程与实测曲线尽量接近，实测数据组数往往要比拟合方程的系数数量要多得多。在这些实测数据中，选用数目等于拟合方程未知系数数量的实测数据组，这些数据组最好较均匀地分布在特性曲线工作段上。例如我们选用非线性特性曲线的拟合方程为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (1-12)$$

式中 x 和 y 为两个物理量， a_0 、 a_1 和 a_2 为未知系数。我们选三组实测数据 (x_0, y_0) 、 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 。把它们代入式 (1-12) 中去，得到

$$y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$$

$$y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$$

我们就可以由上面的代数方程组求得 a_0 、 a_1 和 a_2 。

如果特性曲线是一条直线 ($a_2 = 0$)，并且实测点都分布在直线附近，用这种方法得到的拟合方程是可信的。如果实测点偏离直线较大，或者非线性特性不是直线，而选用的实测点数很少，用这种方法得到的拟合方程的误差可能很大。

二、最小二乘方法

为了减小拟合方程带来的误差，要求实测点数比拟合方程的未知系数的数目多得多，并且较均匀地分布在特性曲线的工作段附近。在这种情况下，我们采用最小二乘方法确定拟合方程的系数。

现在假设拟合方程为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 = f(x) \quad (1-13)$$

而实测点为 n 个，即为 (x_i, y_i) ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

根据最小二乘方法原理，当

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2 \quad (1-14)$$

为最小时，函数 $f(x)$ 与实测值 (x_i, y_i) 最佳拟合。

满足 S 为最小的条件是

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0,$$

即

$$na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \quad (1-15)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1-16)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \quad (1-17)$$

求解上列代数方程组，就可以得到拟合方程的系数 a_0 、 a_1 和 a_2 。

拟合方程的幂级数的方次越高，拟合方程越接近实测特性曲线，但计算工作量大。正如前面提到过的，非线性元件特性受许多因素影响，对拟合方程的要求过高是没有实际意义的。

对于同一试品的一批实测数据，采用不同形式的拟合方程，采用最小二乘方法确定其系数；再由得到的拟合方程计算数值或绘制曲线，与实测数据比较，差别不同。

例如一台10000/100V电压互感器100V线圈的伏安特性的实测值和按不同的拟合方程得到的计算值在表1-2上列出

表 1-2

电压, V 电流, A 计算公式															
	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
实 测 值	0.05	0.075	0.105	0.125	0.149	0.17	0.217	0.272	0.358	0.47	0.63	0.89	1.30	1.79	2.40
式(1-18)	0.026	0.051	0.077	0.103	0.129	0.156	0.215	0.283	0.371	0.491	0.66	0.907	1.257	1.75	2.43
式(1-19)	0.007	0.015	0.025	0.038	0.054	0.075	0.135	0.223	0.349	0.518	0.739	1.019	1.364	1.783	2.283
式(1-20)	0.035	0.068	0.105	0.138	0.174	0.216	0.283	0.359	0.438	0.525	0.62	0.75	0.87	1.10	2.39
式(1-21)	0.046	0.091	0.135	0.181	0.226	0.272	0.365	0.461	0.555	0.655	0.766	0.885	1.005	1.145	1.32

$$I = 5.1 \times 10^{-3} U + 4.7 \times 10^{-6} U^3 + 7 \times 10^{-11} U^5 \quad (1-18)$$

$$I = 1.4 \times 10^{-3} U + 1.223 \times 10^{-6} U^3 \quad (1-19)$$

$$U = 144.5 I - 41.85 I^3 + 4.438 I^5 \quad (1-20)$$

$$U = 111 I - 11.5 I^3 \quad (1-21)$$

表1-2的数据表明：式(1-18)的计算值与实测值比较接近，式(1-21)的计算值与实测值的差别最大。这说明：拟合方程的形式对计算值的误差有很大的影响。

三、变换坐标法

当非线性特性曲线形状较复杂，或拟合方程的形式较复杂时，用最小二乘方法得到的代数方程组很难求解。如果我们采用坐标变换的方法，把拟合方程的形式简化，就较容易地求得拟合方程的系数。

例如碳化硅压敏电阻的伏安特性的经验公式为

$$u = C i^a$$

如果我们把它改写成下面的形式

$$\ln u = \ln C + a \ln i \quad (1-22)$$

并假设 $y = \ln u$, $x = \ln i$, $m = \ln C$, 则式 (1-22) 变为

$$y = m + \alpha x \quad (1-23)$$

通过坐标变换, 可以把在 (u, i) 平面上的一条曲线, 变成在 (x, y) 平面上的
一条直线。我们掌握了这个规律, 就可以把实测点在 (x, y) 平面上标出来, 通过实测
点作一条平均直线, 或用最小二乘法求得直线方程的系数。

表 1-3

I, mA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x = \ln I$	0	0.692	1.1	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.2	2.3	2.4	2.5	2.57	2.64	2.71
U, V	19.2	25.0	29.2	33.0	35.9	38.2	40.8	42.6	44.0	45.2	46.5	48.1	49.5	51.0	52.5
$y = \ln U$	2.96	3.22	3.37	3.5	3.58	3.64	3.71	3.75	3.78	3.81	3.84	3.87	3.90	3.93	3.96

表1-3是碳化硅压敏电阻的15组实测数据, 把这些数据代入式 (1-15) 和式 (1-16)
中去, 得到代数方程组

$$15m + 27.9\alpha = 54.8 \quad (1-24)$$

$$27.9m + 60.6\alpha = 105.2 \quad (1-25)$$

解这代数方程组, 得到 $m = 2.954$, $\alpha = 0.378$, $C = 19.18$ (当 u 的单位为V, i 的
单位为mA时); $C = 261$ (当 i 的单位为A时)。

因为非线性元件特性曲线的拟合方程一般是数值关系, 不反映物理特性, 用拟合方程
进行网络计算时, 应特别注意。例如碳化硅压敏电阻在低频交流电压作用下, 电压降与电
流之间没有相位差, 但伏安特性 $u = Ci^\alpha$ 却不能反映相位关系, 因为 $\alpha \neq 1$ 。为了避免在非
线性网络计算中可能出现的问题, 我们用下式表示碳化硅压敏电阻的伏安特性

$$u = C \operatorname{sgn}(i) |i|^\alpha \quad (1-26)$$

式中 $\operatorname{sgn}(i)$ 表示电流 i 的符号。例如电流为负值时, $\operatorname{sgn}(i)$ 为负, 电压为负值, 即电压
与电流保持同相的关系。

我们得到了非线性特性曲线的拟合方程后, 就可以分析该非线性元件的不同特性之间
的关系。例如非线性电感的特性应该是磁链与电流之间的关系 (磁化特性), 但常用端电
压的有效值和电流的有效值之间的关系 (伏安特性) 表示非线性电感的特性。这就向我们
提出非线性电感的伏安特性与磁化特性之间有没有联系? 它们的拟合方程的形式是否相
同? 下面就来讨论这个问题。

如果非线性电感的磁化特性用

$$i = a_1 \psi + a_3 \psi^3 + a_5 \psi^5 \quad (1-27)$$

表示, 则当非线性电感上的电压 $u = U_m \sin \omega t$ 时, 磁链 $\psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t = -\psi_m \cos \omega t$ 。

把它代入式 (1-27) 中去, 得到

$$i = -\left(\frac{a_1}{\omega} U_m + \frac{3}{4\omega^3} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8\omega^5} a_5 U_m^5\right) \cos \omega t - \left(\frac{1}{4\omega^3} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16\omega^5} a_5 U_m^5\right) \cos 3\omega t - \frac{1}{16\omega^5} a_5 U_m^5 \cos 5\omega t \quad (1-28)$$

电流的有效值

$$I = \left\{ \left[\frac{1}{\omega} a_1 U + \frac{3}{2\omega^3} a_3 U^3 + \frac{5}{2\omega^5} a_5 U^5 \right]^2 + \left[\frac{1}{2\omega^3} a_3 U^3 + \frac{5}{4\omega^5} a_5 U^5 \right]^2 + \frac{1}{16\omega^{10}} a_5^2 U^{10} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1-29)$$

式中 U 为端电压的有效值 ($U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$).

当 $\frac{a_1}{\omega} \gg \frac{a_3}{\omega^3}$, $\frac{a_1}{\omega} \gg \frac{a_5}{\omega^5}$ (在一般情况下都能满足) 时, 伏安特性为

$$I \approx \frac{a_1}{\omega} U + \frac{3}{2\omega^3} a_3 U^3 + \frac{5}{2\omega^5} a_5 U^5 = k_1 U + k_3 U^3 + k_5 U^5 \quad (1-30)$$

式中 $k_1 = \frac{a_1}{\omega}$; $k_3 = \frac{3}{2\omega^3} a_3$; $k_5 = \frac{5}{2\omega^5} a_5$.

式 (1-29) 和式 (1-30) 表明: 在 $\frac{a_1}{\omega} \gg \frac{a_3}{\omega^3}$, $\frac{a_1}{\omega} \gg \frac{a_5}{\omega^5}$ 的情况下, 用有效值表示的非线性电感伏安特性的拟合方程形式与磁化特性拟合方程的形式相同, 而它们的系数之间存在一定的关系, 就是说伏安特性虽然是一个近似特性, 但在一定条件下, 可以用测定伏安特性的方法代替测定磁化特性。

习 题

(1) 已知碳化硅非线性电阻的伏安特性为 $u = 4000i^{\frac{1}{2}}$, 求 $i = 27\text{A}$ 和 64A 时的绝对电阻和微分电阻, 以及它们的比值。

(2) 已知非线性电感的磁化特性为 $i = 0.8\psi + 0.2\psi^3$ (ψ 为磁链), 求 $i = 0.1\text{A}$ 、 1A 和 4A 时的电感。

(3) 非线性阻抗的特性用 $y = \frac{x}{a+bx}$ 表示, 要把在 (x, y) 平面上的特性曲线在 (u, v) 平面上变为一条直线, 问变量的变换关系是什么?

(4) 非线性阻抗特性用 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 表示, 请由下表的实测数据求系数 a_0 、 a_1 和 a_2 。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	30	29.1	28.4	28.1	28	27.7	27.5	27.2	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8	24.0

(5) 已知非线性电感的磁化特性为 $i = 1.6\psi + 0.8\psi^3$, 如用电源电压 $e(t) = E_m \times \sin 314t$ 测定它的伏安特性, 求实测的伏安特性, $E_m \leq 350\text{V}$ 。如果伏安特性用 $I = a_1 U + a_3 U^3$ 表示, 请由实测伏安特性数据求系数 a_1 和 a_3 。

第二章 非线性网络的近似算法

在第一章里，我们讨论了非线性元件的特性，在掌握了非线性元件的特性后，就可利用线性网络中的一些定律列出非线性网络方程。由于非线性网络方程中包含有非线性元件的特性，非线性网络方程一般没有解析解，只能采用近似方法或数值计算方法求解。

非线性网络的近似算法一般可分为两类：一类是把非线性特性简化，用直线或折线代替曲线，在直线段内可用线性网络的计算方法进行计算；另一类是把网络中电流和电压等物理量中的高次谐波分量忽略掉，只保留基频分量（有时还保留一个高频或分频分量），然后用线性网络的计算方法进行计算。

非线性网络的近似计算方法又分稳态近似计算法和暂态近似计算法两类。

非线性网络的近似计算方法与网络的性质有密切关系。电阻性网络不分稳态和暂态，由于电压降与电流同相变化，我们可以用图解法求解。当电阻性非线性网络的电源电压性质不同时，近似计算方法也不同。

有储能元件（电容或电感）的非线性网络其特点是储能元件上的电压降与通过它的电流之间有相位差，非线性元件上电压降的频谱与电流的频谱不同。有储能元件的非线性网络稳态的近似计算方法是把非线性元件上电压降的频谱与电流的频谱统一，即保留一个频率或两个频率分量。有储能元件非线性网络的暂态近似计算法与电源电压性质和网络的特点有关。

非线性网络的近似计算方法其特点是，方法的原理是近似的，但是得到的计算公式还需要用数值计算方法求解。非线性网络的数值计算方法的计算公式也有一定的近似性，因此两种方法是互相补充的。

非线性网络的近似计算方法的误差一般来说是较大的，但是在一定条件下，近似计算方法的误差仍是可以被人们接受的，这是因为近似计算方法可以帮助我们掌握非线性网络中各物理量之间的内在联系和变化规律，以及某些现象的物理本质。这也是在现在电子计算机广泛应用的条件下继续采用近似计算方法的原因。

在这一章里，我们将讨论非线性网络的一些常用的近似计算方法。

第一节 电阻性非线性网络的算法

电阻性非线性网络可能是集中参数电阻性网络，也可能是分布参数长输电线的电阻性等效电路。

当电源电压是直流电压时，电阻性非线性网络可以用图解法求解。

图2-1是最简单的电阻性非线性网络，它是由线性电阻 R_1 和非线性电阻 R_2 组成， R_2 的伏安特性 $U_2(I_2)$ 已在图2-2上画出。由图2-1电路得到电路方程。

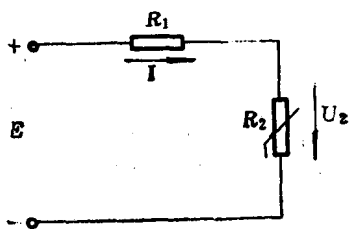


图 2-1

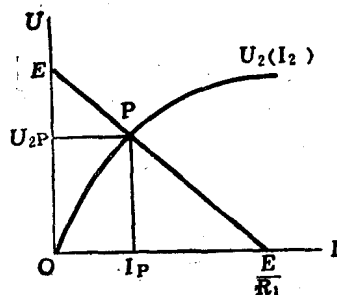


图 2-2

$$E = IR_1 + U_2 \quad (2-1)$$

把式 (2-1) 改写为

$$E - IR_1 = U_2 \quad (2-2)$$

式 (2-2) 等号的左侧是一条直线的方程，在图2-2上用直线表示；等号右侧是非线性电阻 R_2 上的电压降，它与电流之间的关系呈现非线性电阻的伏安特性[图2-2上曲线 $U_2(I_2)$]。由图2-2，我们就得到式 (2-2) 的解，即直线与伏安特性的交点 $P(I_P, U_{2P})$ 。

当电阻性非线性电路由两个以上的非线性电阻组成时，求解前必须把多个非线性电阻的合成伏安特性找出来，然后采用前面讨论过的图解法求解。例如[图2-3(a)]的电路由两个非线性电阻 R_1 和 R_2 组成，它们的伏安特性在[图2-3(b)]上分别用曲线 $U_1(I_1)$ 和 $U_2(I_2)$ 表示出。在图上还画有两个非线性电阻的合成伏安特性 $U(I)$ 。由电路方程

$$E = U_1 + U_2 = U \quad (2-3)$$

得交点 a ，即得电路的解——电流 I_0 ；由交点 b 和 c 得到与电流 I_0 对应的电压降 U_{10} 和 U_{20} 。

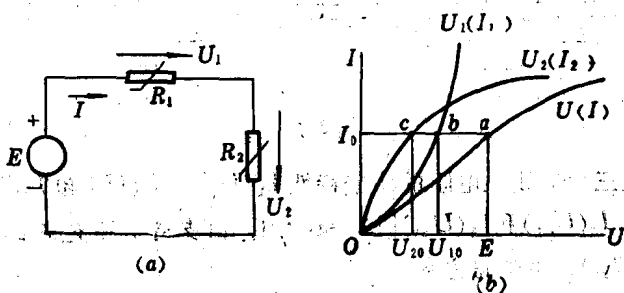


图 2-3

在上述的例子中，两个非线性电阻有一个共同的变量 I ，我们比较容易地由两个电阻的伏安特性作出它们的合成伏安特性（如果两个非线性电阻并联，共同变量为电压 U ）。如果非线性网络中的非线性电阻没有一个共同的变量[如图2-4(a)]，我们就无法得到非线性电阻的合成伏安特性。在这种情况下，我们可以把网络的并联支路看成是有源的非线性电阻元件，把它们的电压降作为共同的变量，例如图2-4(a)电路的电压 U_{21} 作为三个并联支路的共同变量。因为