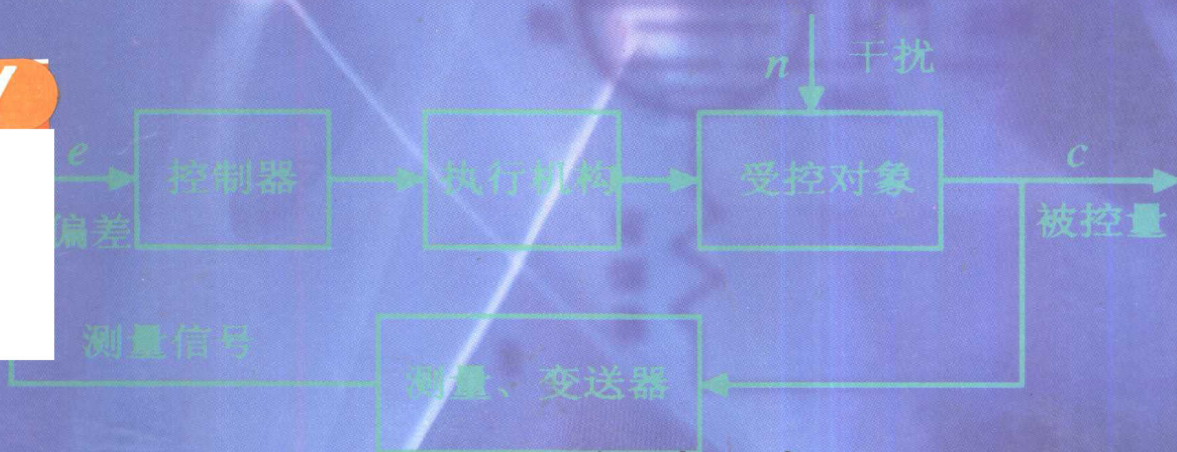


高等学校教材

自动控制原理

于希宁 刘红军 主编



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

高等学校教材

自动控制原理

主编 于希宁 刘红军

参编 刘鑫屏 戴毅姜



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是在金慰刚教授主编的 1985 年出版的《自动控制原理》一书的基础上,总结了多年的使用经验,并根据 1999 年制订的新版《自动控制原理》课教学大纲的要求重新编写的。本书包括古典控制理论基础知识、控制原理实验和用计算机辅助分析和设计控制系统三大部分。

本书编写的宗旨是:内容精炼、突出重点;注意深入浅出,循序渐进,符合教学规律;注重启发性,易于自学;注重物理概念,强化理论联系实际。通过实验的方法使读者了解控制系统性能分析的物理意义,同时增加了计算机辅助分析和设计控制系统的内容,使读者在学习理论知识的同时,掌握一种高效便利的工具,减轻繁琐枯燥的计算负担,使读者把主要精力集中到思考本质问题,加深对控制理论的理解,掌握控制理论的各种分析方法,并用它研究解决一些实际工程问题上。

全书共分为十章,其中第一章~第六章主要讲述线性控制理论,以及分析和设计控制系统的时域分析法、根轨迹分析法和频域分析法,第七章简要介绍非线性控制系统的分析方法,第八章介绍了离散控制系统的分析方法,第九章为四个典型实验的指导书,第十章为使用 MATLAB 计算仿真工具进行系统辅助分析和设计的指导书。

本书可作为工科院校控制类专业及其他相关专业的本科生教材,也可供控制类专业师生及从事自动化方面的工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/于希宁,刘红军主编. —北京:中国电力出版社, 2001

高等学校教材

ISBN 7-5083-0634-1

I. 自... II. ①于...②刘... III. 自动控制理论—高等学校—教材
IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 027973 号

中国电力出版社出版、发行
(北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>)
实验小学印刷厂印刷
各地新华书店经售



2001 年 7 月第一版 2001 年 7 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米 16 开本 20 印张 499 千字
印数 0001—3500 册 定价 26.00 元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换)

前言

自动控制理论与众多学科相联系,其应用已遍及众多技术领域。控制理论已日趋成为一般性的控制科学,虽然它已从第一代经典控制理论发展到第二代现代控制理论,并开始进入第三代大系统理论和智能控制理论,但经典控制理论仍是学习现代控制和其他高等控制理论的基础,也是工科院校普遍开设的一门重要的技术基础理论课。

本书是在金慰刚教授主编,1985年出版的《自动控制原理》一书基础上,总结了多年的使用经验,并根据1999年制订的新版《自动控制原理》课教学大纲的要求,由对这门课程具有多年教学经验的教师编写的。本次教材编写的宗旨是内容精炼,突出重点;注重物理概念,强化理论联系实际;注意深入浅出,循序渐进,符合教学规律;注重启发性,易于自学。另考虑到新知识的不断增加,课程的教学学时还要进一步压缩,为了保证基础理论知识的教学,对其中的一些传统教学内容进行了删改,增加了使用MATLAB计算仿真工具进行系统分析与设计的内容,使读者在学习理论知识的同时,掌握一种高效便利的工具,减轻繁琐枯燥的计算负担,使其把主要精力集中到思考本质问题,加深对控制理论的理解,掌握控制理论的各种分析方法,并用它研究解决一些实际工程问题上。另外为方便读者使用,把相关的实验内容也一并列入本书。

本书共分十章,第一章~第六章主要讲述线性控制理论,以及分析和设计控制系统的时域分析法、根轨迹分析法和频域分析法;第七章简要介绍非线性控制系统的分析方法;第八章介绍了离散控制系统的分析方法;第九章为四个典型实验的指导书;第十章为使用MATLAB计算仿真工具进行系统的分析与设计。为了便于理解和巩固所学内容,书中每一章均附有小结,并有适当数量的例题和习题。

本书可作为控制类专业本科生的教学用书,对于非控制类专业少学时授课,可以采用选讲其中的主要内容来完成。另外本书也可供控制类专业师生及从事自动化方面的工程技术人员阅读和参考。

本书由华北电力大学于希宁、刘红军、刘鑫屏、戴毅姜等老师编写,于希宁、刘红军任主编。本书的编写受到华北电力大学教改基金项目的资助,本书的出版受到国家电力公司重点学科建设项目的资助。另外在本书的整个编写过程中,韩璞教授和许多同行曾给予大力的支持和帮助,并提出许多宝贵意见,在此一并致以衷心感谢。

由于作者水平有限,错误或不当之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2001年1月

目 录

前 言

第一章 绪论	1
第一节 引言	1
第二节 自动控制系统的一般概念	2
第三节 自动控制系统的分类	3
第四节 对自动控制系统的基本要求	5
习题	6
第二章 控制系统的数学模型	7
第一节 控制系统的微分方程	7
第二节 传递函数	13
第三节 动态结构图	17
第四节 动态结构图的等效变换	20
第五节 信号流图与梅逊公式	24
第六节 典型传递函数及典型环节的传递函数	28
习题	33
第三章 时域分析法	37
第一节 控制系统的典型输入信号和时域性能指标	37
第二节 一阶系统的动态分析	40
第三节 二阶系统的动态分析	42
第四节 高阶系统的近似分析	52
第五节 控制系统的稳定性分析	56
第六节 控制系统的稳态误差	64
习题	73
第四章 根轨迹法	76
第一节 根轨迹的基本概念	76
第二节 绘制根轨迹的依据	77

第三节	绘制一般根轨迹的基本法则	79
第四节	控制系统根轨迹的绘制举例	86
第五节	参量根轨迹	89
第六节	多回路系统的根轨迹	90
第七节	零度根轨迹	92
第八节	纯迟延系统根轨迹	95
第九节	控制系统的根轨迹分析	99
习题		102
第五章	频域分析法	105
第一节	频率特性	105
第二节	典型环节的频率特性	109
第三节	控制系统开环频率特性	119
第四节	频率特性的稳定判据	127
第五节	控制系统的相对稳定性	134
第六节	开环频率特性与闭环时域指标的关系	137
第七节	闭环系统频率特性	141
第八节	闭环频率特性与时域指标间的关系	144
习题		145
第六章	线性控制系统的设计与校正	150
第一节	概述	150
第二节	线性控制系统设计与校正的基础知识	150
第三节	校正装置(控制器)的构成及其特性	153
第四节	根轨迹法串联校正	159
第五节	频率法串联校正	167
第六节	局部反馈校正	175
第七节	复合控制校正	177
习题		179
第七章	非线性系统分析	182
第一节	概述	182
第二节	典型本质非线性环节的描述函数	186
第三节	用描述函数法分析系统的稳定性	190
第四节	相平面图	196
第五节	相平面分析法	213
习题		215

第八章 线性离散控制系统的分析与综合	218
第一节 概述	218
第二节 采样过程及信号复现	219
第三节 Z 变换	223
第四节 脉冲传递函数 (Z 传递函数)	231
第五节 离散控制系统的稳定性分析	237
第六节 离散控制系统的稳态性能	241
第七节 离散控制系统的动态性能分析	244
第八节 离散系统的校正方法	247
习题	251
第九章 自动控制原理实验	253
实验一 典型环节的电模拟及其阶跃响应分析	253
实验二 随动系统的开环控制、闭环控制及稳定性	254
实验三 随动控制系统的定、动态性能指标及系统校正	256
实验四 控制系统频率特性分析	258
第九章附录 模拟计算机简介	259
第十章 自动控制理论的计算机辅助设计	263
第一节 引言	263
第二节 前期基础知识	263
第三节 控制系统模型	268
第四节 控制系统的时域分析	270
第五节 控制系统的根轨迹分析	274
第六节 控制系统的频域分析	283
第七节 控制系统的校正	291
第八节 离散控制系统	299
习题	304
附录 A 常用函数拉普拉斯变换	307
附录 B 常用拉普拉斯变换的性质和定理	308
附录 C 拉氏反变换	309

第一章 绪 论

第一节 引 言

从 20 世纪 40 年代起,特别是第二次世界大战以来,由于工业的发展和军事技术上的需要,自动控制技术得到了迅速的发展和广泛的应用。如今,自动控制技术不仅广泛应用于工业控制中,在军事、农业、航空、航海、核能利用等领域也发挥着重要的作用。例如:电厂中锅炉的温度或压力能够自动维持恒定不变,机械加工中数控机床按预定程序自动地切削工件,军事上导弹能准确地击中目标,空间技术中人造卫星能按预定轨道运行并能准确地回收等等,都是应用了自动控制技术的结果。

所谓自动控制,就是在没有人直接参与的情况下,利用控制装置对机器设备或生产过程进行控制,使之达到预期的状态或性能要求。

自动控制的应用虽然可以追溯到 18 世纪(1784 年)瓦特(Watt)利用离心飞锤式调速器使蒸汽机转速保持恒定的开创性的突破,以及 19 世纪(1868 年)麦克斯威尔(Maxwell)对轮船摆动(稳定性)的研究。但在初期,自动控制应用的进展并不快。自动控制的发展是在 20 世纪。例如 1932 年奈奎斯特(Nyquist)对控制系统稳定性的研究(奈氏判据),伯德(Bode)于 1940 年在频域法中引入对数坐标,伊万思(Evans)于 1948 年提出根轨迹,维纳(Weiner)于 1949 年出版了划时代著作《控制论》,对控制理论作了系统的阐述。他们的研究工作以及前人的努力,奠定了经典控制理论的基础,到 50 年代趋于成熟。经典控制理论的特点是以传递函数为数学工具,主要研究单输入—单输出的线性定常系统的分析与设计问题。

50 年代末 60 年代初期,由于空间技术发展的需要,对自动控制的精确性和经济指标提出了极其严格的要求,数字计算机特别是微型计算机的迅速发展,又在客观上提供了必要的技术手段,从而使自动控制理论有了重大发展。如庞特里亚金(Pontryagin)的极大值原理、贝尔曼的动态规划理论、卡尔曼的最优滤波理论等,这些都标志着控制理论发展到了现代控制理论阶段。现代控制理论的特点是采用状态空间法,研究多输入—多输出、定常和时变、线性和非线性系统的分析与设计。

70 年代以来,随着技术革命和大规模复杂系统的发展,自动控制理论又向大系统理论和智能控制理论发展。智能控制理论的研究是以人工智能的研究为方向,引导人们去探讨自然界更为深刻的运动机理。当前的研究方向有自适应控制、模糊控制、人工神经网络以及混沌理论等,并且有许多研究成果产生。智能控制理论的研究和发展,启发与促进了人们的思维方式,标志着信息与控制学科的发展远没有止境。

值得指出的是,现代控制理论、大系统理论和智能控制理论,虽然解决了经典控制理论不能解决的理论和工程问题,但这并不意味着经典控制理论已经过时,相反,在自动控制技术的发展中,由于经典控制理论便于工程应用,今后还将继续发挥其理论指导作用,同时它也是进一步学习现代控制理论和其他高等控制理论的基础。

本书将对经典控制理论的基本内容作系统、详细的介绍。

第二节 自动控制系统的一般概念

自动控制是在人工控制的基础上发展起来的。图 1-1 是锅炉汽包水位控制系统的原理图。图中 W 、 D 分别为给水流量和蒸汽流量（负荷），控制的任務就是以一定精度保持汽包中液位为某一期望（给定）的数值。

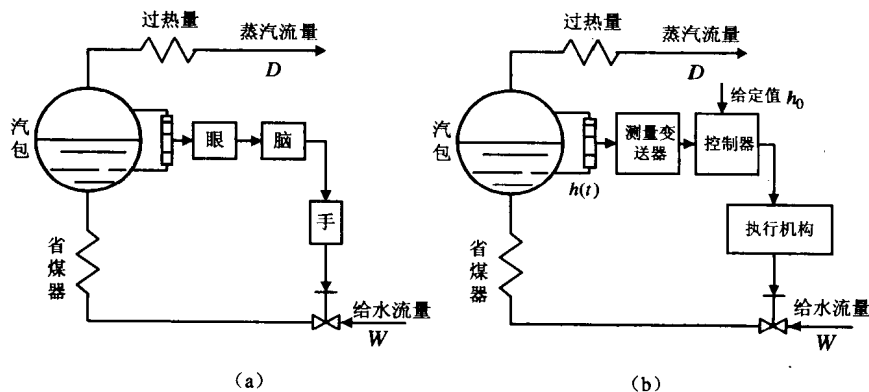


图 1-1 锅炉汽包液位控制原理图

(a) 人工控制; (b) 自动控制

在人工控制中，人是通过眼、脑、手这三个器官来进行液位控制的。首先用眼睛观察液位的高低变化，然后用大脑分析比较实际液位是否偏离期望值，若偏离了，则经过思考（运算）按操作经验，指挥手去执行这一命令，调节给水调节阀的开度，从而把液位控制在所期望的数值上。

在自动控制中，汽包水位 $h(t)$ 经测量变送器（代替了人的眼睛）自动测量出来并按一定函数关系转换成（通常为比例关系）统一信号（电流或电压）。与水位给定值进行比较，二者之差送入控制器（相当于人的大脑）。控制器根据偏差的正负及大小，发出一定规律的输出信号，指挥执行器（相当于人的手）去操作给水控制阀的开度，改变给水流量，从而改变汽包水位。水位的变化由测量变送器测出反馈回来与给定值比较，控制器根据偏差的正负及大小不断校正执行器的动作，直到最后水位等于给定值为止。

为便于研究控制问题，下面介绍几个常用术语。

(1) 被控量。表征设备或生产过程运行情况或状态并需要加以控制的物理量。如图 1-1 中汽包水位 $h(t)$ 。

(2) 给定值。按生产和管理的要求，被控量必须维持的希望值。该值也叫参考输入或设定值。

(3) 扰动。引起被控量变化的各种原因，如图 1-1 中的蒸汽流量 D 的变化。

(4) 控制量。由控制机构改变的，用以控制被控量变化的物理量，如图 1-1 中的给水流量 W 。

(5) 被控对象。被控制的物理量相应的生产过程或进行生产的设备、机器等，如图 1-1 中的汽包。

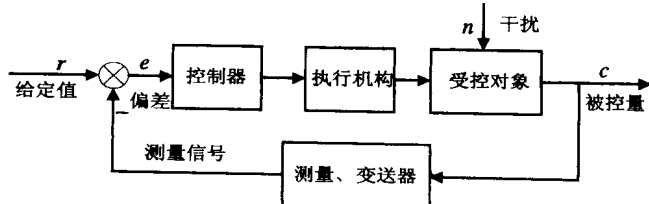


图 1-2 自动控制系统方框图

通过上例的液位控制，我们可以看出，自动控制系统是由被控对象和控制装置两大部分组成。在工业过程控制中，控制装置包括检测元件、变送器、控制器或计算机装置、执行机构等，分别完成检测、运算和执行等职能。为了便于分析并直观地表示系统各组成部分间的相互影响和信号传递关系，一般习惯上采用原理性方框图直观地表示，如图 1-2 所示。

在方框图中，系统的每一具有一定功能的组成部分称为“环节”。环节在图中用一个方框表示，各环节之间的信号传递用带箭头的直线表示，注意箭头表示的是信号的传递方向，而不是实际物料的流动方向，两者不能混淆。进入环节的信号称为输入，离开环节的信号称为输出。就整个系统来说，输出量就是被控量，输入量则有两个：一个是给定值输入，另一个是干扰输入，系统中干扰不止一个，其作用点也各不相同。

第三节 自动控制系统的分类

随着自动控制理论和自动控制技术的日益发展，自动控制系统也日趋复杂和完善，出现了各种各样的控制系统，可从不同的角度加以分类。本节重点讨论以下几种分类方法。

一、按系统的结构分类

1. 开环控制

控制装置与被控对象之间只有顺向作用而无反向作用时，称为开环控制，如图 1-3 所示。

例如简单的电动机转速控制系统，如图 1-4 所示，受控对象为电动机，控制装置为电位器、放大器。当改变给定电压 U_n^* 时，经放大器放大后的电压 U_a 随之变化，作为被控量的电动机转速 $n(t)$ 也随之变化。就是说，系统正常工作时，应由 U_n^* 来确定 $n(t)$ 。



图 1-3 开环控制系统

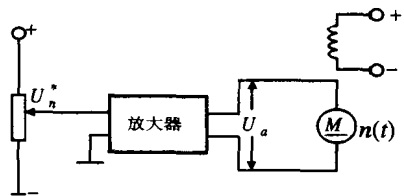


图 1-4 开环控制的调速系统

若由于电网电压的波动，或负载的改变等扰动量的影响使得转速 n 发生变化，而这种变化未能被反馈至控制装置并影响控制过程，故系统无法克服由此产生的偏差。

开环控制的特点是，系统结构和控制过程均很简单，但抗干扰能力差，控制精度不高，故一般只能用于对控制性能要求较低场合。

如果系统存在破坏系统正常运行的干扰，而干扰又能被测量，则可利用干扰信号产生控制作用，以补偿干扰对被控量的影响，如图 1-5 所示。这种按开环补偿原理建立起来的系统称为“前馈控制”。前馈控制是一种主动控制方式，即它能做到在干扰影响被控量之前，就将干扰完全抵消。

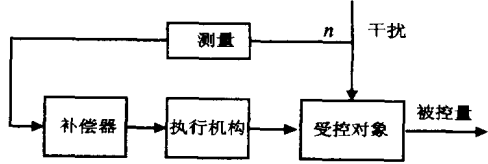


图 1-5 开环干扰补偿控制系统

单纯的前馈控制一般很难满足控制要求，这是因为系统往往存在很多干扰，不能一一补偿，而且有的干扰限于技术条件而无法检测，也就无法实现前馈补偿，因此，其控制精度受到原理上的限制。

2. 闭环控制

控制装置与被控对象之间不仅有顺向作用，而且还有反向联系，即有被控量对控制过程的影响，这种控制称为闭环控制，如图 1-2 所示。由图 1-2 可知，系统的输出经检测、变送器又反送至系统的输入端，形成所谓“反馈信号”，从而构成一个闭环回路。若反馈信号与系统输入信号（给定值）相反，则称为负反馈；若极性相同，则称为正反馈。控制器根据反馈信号和给定信号相比较后所得到的偏差信号，经运算后输出控制作用去消除偏差，使被控量等于给定值。由此可见，闭环控制是按偏差进行的控制。

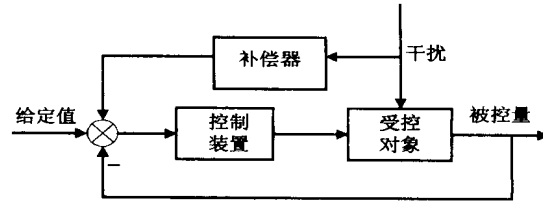


图 1-6 复合控制系统

闭环控制系统的一个突出优点就是不管是由于干扰或由于系统结构参数变化所引起的被控量偏离给定值，都会产生控制作用去消除此偏差。但由于闭环控制只有在偏差出现之后才产生控制作用，因此系统在强干扰作用下，被控量有可能产生较大波动。对于这种工作环境，适宜于采用按偏差调节和按干扰补偿相结合的复合控制系统，如图 1-6 所示。

二、按给定值的特征分类

(1) 定值控制系统。这种控制系统在运行中被控量的给定值保持不变，被控量的稳态值不变，也保持恒定。多数控制系统均属于此类系统，如图 1-1 所示的锅炉汽包液位控制系统就是一例。

(2) 随动控制系统。这种控制系统的被控量给定值，不是预先设定的，而是受某些外来的随机因素控制而变化，其变化规律是未知的时间函数。此系统要求其输出信号（被控量）以一定精确度跟随输入信号（给定值）而变化，故名随动系统。如跟踪卫星的雷达天线控制系统、发电机组负荷控制系统、轮舵位置控制系统等。

(3) 程序控制系统。这种控制系统的被控量给定值是预定的时间函数，并要求被控量随之变化。例如数控伺服系统、发电机组启停控制系统以及一些自动化生产线等均属此类系统。

三、按系统的特性分类

(1) 线性控制系统。系统中各组成部分或元件特性可以用线性微分方程来描述，称这种系统为线性系统。线性控制

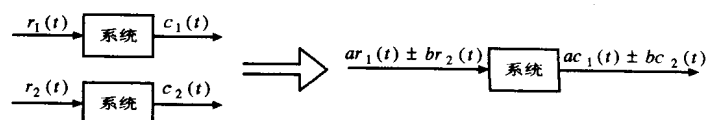


图 1-7 线性控制系统的叠加原理

系统的特点是满足叠加原理。即系统存在几个输入时，系统的输出等于各个输入分别作用于系统的输出之和；当系统输入增加或缩小时，系统的输出也按同样比例增加或缩小，如图 1-7 所示。

(2) 非线性控制系统。当系统中存在非线性元件或具有非线性特性，就要用非线性微分方程来描述，这类系统就称为非线性系统。非线性系统不满足叠加原理。

四、按系统中参数随时间的变化情况来看分类

(1) 定常系统。从系统的数学模型来看，若全部参数不随时间变化，可用定常微分方程来描述，则称这类系统是定常（或时不变）系统。在实际中遇到的系统，大多属于这一类或近似于这一类系统。本书也主要研究线性定常系统。

(2) 时变系统。从系统的数学模型来看，若系统中有的参数是时间的函数，随时间变化而改变，则称这类系统是时变系统。

五、按系统中传输信号对时间的关系来分类

(1) 连续控制系统。当系统中各元件的输入量和输出量均是连续量或模拟量时，就称此类系统为连续控制系统或模拟控制系统。连续系统的运动规律通常可用微分方程来描述。

(2) 离散控制系统。当系统中某处或多处的信号是脉冲序列或数码形式时，这种系统称为离散系统。通常采用数字计算机控制的系统都是离散系统。离散系统的运动规律通常可用差分方程来描述，其分析方法也不同于连续控制系统。

当然，除了以上的分类方法之外，还可以根据其他的特点来进行分类。本书只讨论闭环随动控制系统和闭环定值控制系统的分析、综合校正方法，且重点放在单变量线性连续系统上，对于线性离散控制系统和非线性系统，也用一定篇幅进行分析和讨论。

第四节 对自动控制系统的基本要求

对自动控制系统的基本要求主要有以下三个方面。

一、稳定性

稳定性是指系统处于平衡状态下，受到扰动作用后，系统恢复原有平衡状态的能力。如果系统受到外作用后，经过一段时间，其被控量可以达到某一稳定状态，则称系统是稳定的，如图 1-8 所示的几种情形；否则为不稳定的，如图 1-9 所示。图 1-9 (a) 为在给定信号作用下，被控量振荡发散的情况；图 1-9 (b) 为被控量受到扰动作用后，不能恢复平衡的情况。另外，若系统出现等幅振荡，即处于临界稳定状态，严格说也属于不稳定。

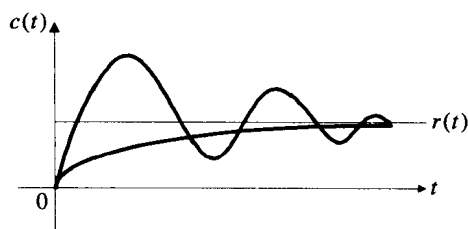


图 1-8 稳定系统的动态过程

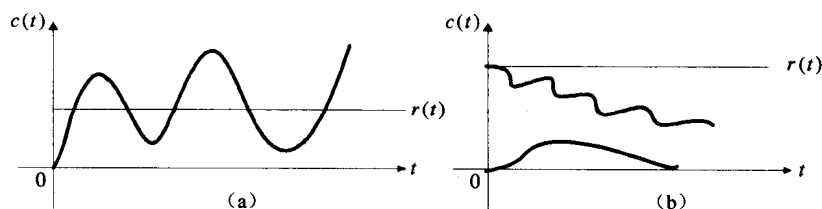


图 1-9 不稳定系统的动态过程

(a) 被控量振荡发散的情况；(b) 被控量不能恢复平衡的情况

不稳定的系统无法正常工作，甚至会毁坏设备，造成重大损失。直流电动机的失磁、导弹发射的失控、运动机械的增幅振荡等都属于系统不稳定。

二、快速性

快速性是通过动态过程时间的长短来表征的，如图 1-10 所示。过渡过程时间越短，表明快速性越好，反之亦然。快速性表明了系统输出对输入的响应的快慢程度。系统响应越快，则复现快变信号的能力越强。

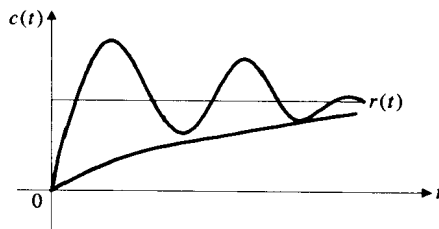


图 1-10 控制系统的快速性

三、准确性

稳定的系统在过渡过程结束后所处的状态称为稳态。准确性是指稳态时系统期望输出量和实际输出量之差，如图 1-11 所示，它反映了系统的稳态精度。

上述的基本要求只是定性的描述。在设计一个控制系统或者考察一个控制系统时，上述三条均需要有定量的要求。另外，对于同一个控制系统，其稳、准、快三方面之间是相互制约的。如果提高了过程的速度性，可能会引起系统强烈的振荡；改善了平稳性，动态过程又可能很缓慢，甚至使最终精度也很差。怎样根据工作任务的不同，使其对三方面的性能有所侧重，并兼顾其他，以达到要求，正是本课程及其后续课程要解决的问题。

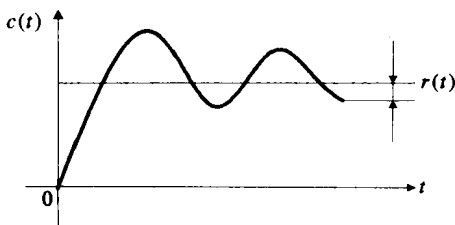


图 1-11 控制系统的稳态精度

习 题

1-1 试比较开环控制系统和闭环控制系统的优缺点。

1-2 试列举几个日常生活中的开环和闭环控制系统的例子，并说明其工作原理。

1-3 试判断下列微分方程所描述的系统属何种类型（线性、非线性；定常、时变）

$$(1) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 5 \frac{dr(t)}{dt} + r(t); \quad (2) t \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t);$$

$$(3) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2 \frac{dc(t)}{dt} + 2c^2(t) = r(t); \quad (4) 5 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = 3 \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) + 3 \int r(t) dt.$$

1-4 根据图 1-12 所示的电动机速度控制系统工作原理图：

- (1) 将 a, b 与 c, d 用线连接成负反馈系统；
- (2) 画出系统方框图。

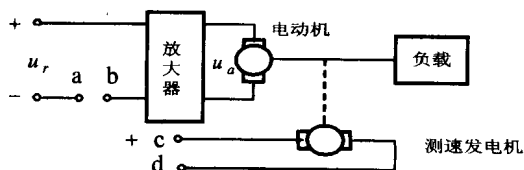


图 1-12 电动机速度控制系统工作原理图

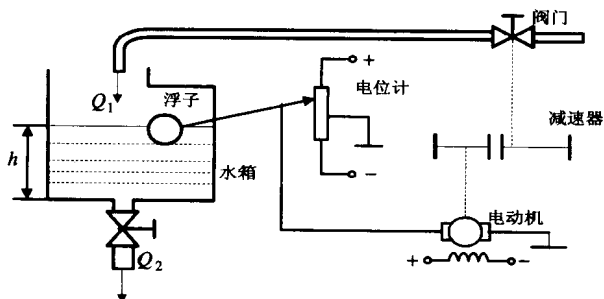


图 1-13 液位自动控制系统示意图

1-5 图 1-13 是水位控制系统示意图，图中 Q_1, Q_2 分别为进水流量和出水流量。控制的目的是保持水位为一定的高度。试说明该系统的工作原理并画出其方框图。

1-6 仓库大门自动控制系统如图 1-14 所示，试分析系统的工作原理，绘制系统的方框图，指出各实际元件的功能及输入、输出量。

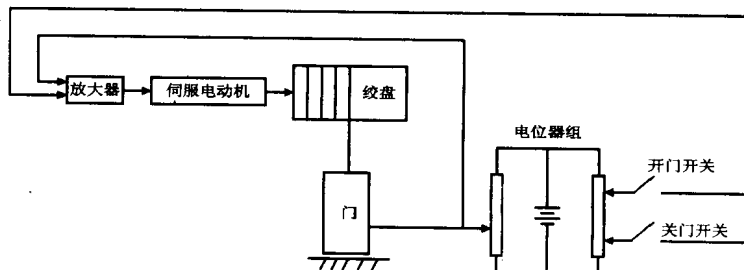


图 1-14 仓库大门自动控制系统示意图

第二章 控制系统的数学模型

在进行系统的分析和设计中,定性了解系统的工作原理及运动过程非常重要,但要更深入地定量研究系统的动态特性,要做的首要工作就是要建立控制系统的数学模型。数学模型是描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间相互关系的数学表达式。

从数学模型入手研究自动控制系统是本课程的研究方法。控制系统的种类多种多样,有电气的、机械的、液压的和气动的等。但若它们的运动过程的数学表达式相同,则它们的分析和计算也就完全一样。因此,利用控制系统的数学模型,可以撇开系统的具体物理属性,探求这些系统运动过程的共同规律,对控制系统从理论上进行具有普遍意义的分析和研究,研究所得的结论就必然会有效地指导各种控制系统的分析与设计。

通常可以用分析法和实验法来建立系统的数学模型。分析法是对系统各部分的运动机理进行分析,根据它们所遵循的物理或化学规律(如牛顿定律、基尔霍夫定律、热力学第二定律等)分别列写相应的运动方程。当然和模型有关的因素很多,在建立模型时不可能也没必要把一些非主要因素都囊括进去而使模型过于复杂,应根据实际情况建立关于系统某一方面属性的描述。实验法是人为地给系统施加某种测试信号,然后测量并记录系统的输出,并对这些输出数据进行分析 and 处理,求出一种数学表示方式,这种建模方法称为系统辨识,这是一项需要专门课程来加以学习和研究的内容。本章不讨论该项内容,而将重点研究用分析法建立线性定常系统数学模型的方法。

作为线性定常系统,其数学模型可用微分方程、传递函数、动态结构图和频率特性几种形式描述。本章将介绍前三种,第四种频率特性模型将在第五章中讨论。

第一节 控制系统的微分方程

一、系统微分方程的建立

一个完整的控制系统通常是由若干个元器件或环节以一定方式连接而成的,对系统中每一个具体的元器件或环节按照其运动规律可以比较容易的列写出其运动方程,然后将这些微分方程联立起来,以求出整个系统的微分方程。

下面举例说明控制系统中常用的电气元件、力学元件的微分方程的列写方法。

【例 2-1】 图 2-1 所示 RLC 串联电路中,设输入量为 $u_r(t)$, 输出量为 $u_c(t)$, 试列写其微分方程。

解: 为建立系统输出 $u_c(t)$ 和输入 $u_r(t)$ 的动态关系,可设回路电流 $i(t)$ 为中间变量,根据基尔霍夫定律,可以列出

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u_r(t) \\ \frac{1}{C} \int i(t) dt = u_c(t) \end{cases}$$

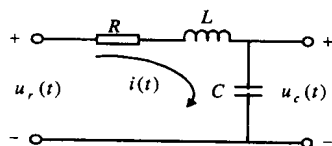


图 2-1 RLC 串联电路

这是该系统的原始微分方程组,为了便于分析和求解,必须将原始的微分方程组化成标

准形式。所谓标准形式就是把原始微分方程组消去中间变量，合并为一个微分方程，在该方程中只包含输入量、输出量以及它们的导数项，把与输出量有关的项写在方程的左端，与输入量有关的项写在方程的右边，方程两端变量的导数项均按降阶排列。

在本例中，消去中间变量 $i(t)$ 及其导数项可得

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t) \quad (2-1)$$

可见， RLC 无源网络的数学模型是一个二阶常系数线性微分方程。

【例 2-2】 设有一个由弹簧、阻尼器和质量为 m 的物体组成的机械系统如图 2-2 所示，设外作用力 $F(t)$ 为输入量，位移 $y(t)$ 为输出量，列写该系统的微分方程。

解：根据牛顿第二定律可得

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - F_B(t) - F_k(t) \quad (2-2) \quad \text{图 2-2 弹簧、物体和阻尼器系统}$$

式中 $F_B(t)$ ——阻尼器粘性阻力；

$F_k(t)$ ——弹簧的弹性力。

$F_B(t)$ 与物体运动速度成正比，即

$$F_B(t) = f \frac{dy(t)}{dt}$$

式中 f ——阻尼系数。

$F_k(t)$ 与物体的位移成正比，即

$$F_k(t) = ky(t)$$

式中 k ——弹性系数。

将上述关系代入式 (2-2) 中得微分方程为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - f \frac{dy(t)}{dt} - ky(t)$$

化成标准形式得

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t) \quad (2-3)$$

比较式 (2-1) 与式 (2-3) 可以看出，以上两例虽然是不同的物理系统，但它们的微分方程却具有相同的形式，这样的系统称为相似系统。相似系统的动态特性也相似，因此可以通过研究电路的动态特性来研究机械系统的动态特性。由于电子电路具有易于实现和变换结构等特点，因此常采用电子电路来模拟其他实际系统，这种方法称为电子模拟技术。还可以通过数字计算机求解系统的微分方程来研究实际系统的动态特性，这就是计算机仿真技术。

【例 2-3】 图 2-3 所示为两级 RC 电路串联组成的无源滤波网络，试列写以 $u_r(t)$ 为输入、 $u_c(t)$ 为输出的网络的微分方程。

解：根据回路电流法可列写如下方程

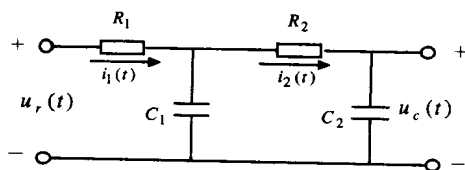
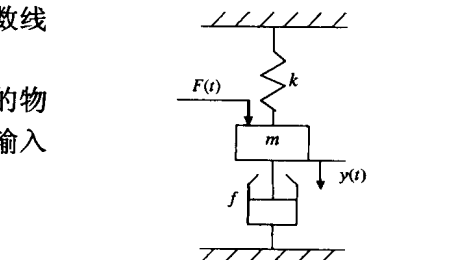


图 2-3 两级 RC 滤波电路

$$\begin{cases} u_r(t) = i_1(t)R_1 + \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \\ \frac{1}{C_1} \int [i_2(t) - i_1(t)] dt + i_2(t)R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt = 0 \\ u_c(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \end{cases}$$

综合上述方程组，消去中间变量 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ ，化简整理得

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2) \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

令 $R_1 C_1 = T_1, R_2 C_2 = T_2, R_1 C_2 = T_3$ ，则得到

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t) \quad (2-4)$$

可见，该滤波网络的动态数学模型也是一个二阶常系数线性微分方程。

【例 2-4】 图 2-4 为一个圆柱体被轴承支承并在粘性介质中转动。当力矩 M_f 作用于系统时，产生角位移 $\theta(t)$ 。试列写以 M_f 为输入、 $\theta(t)$ 为输出系统的微分方程。

解：根据牛顿力学第二定律，系统的诸力矩之和为

$$\sum M = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

式中 J ——转动惯量；

$\sum M$ ——和力矩， $\sum M = M_f - M_d$ 。

$$M_d = f \frac{d\theta}{dt}$$

式中 M_d ——阻尼力矩，其大小与转速成正比，方向与作用力矩方向相反；

f ——粘性阻尼系数。

整理，得

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = M_f - f \frac{d\theta}{dt}$$

化成标准式，得机械旋转系统的微分方程式

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = M_f$$

对于由多个环节组成的复合控制系统建立微分方程时，一般先列写组成系统各环节的微分方程，然后，消去中间变量便得到描述系统输出量与输入量之间关系的微分方程。

现在以图 2-5 所示的直流电动机系统为例，说明复合控制系统的微分方程的列写。

【例 2-5】 如图 2-5 所示系统，输入为电枢电压 U_a ，输出为转轴角速度 ω ，试列写其微分方程式。

解：直流电动机是由两个子系统构成，

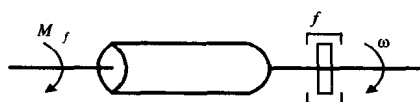


图 2-4 机械旋转运动系统

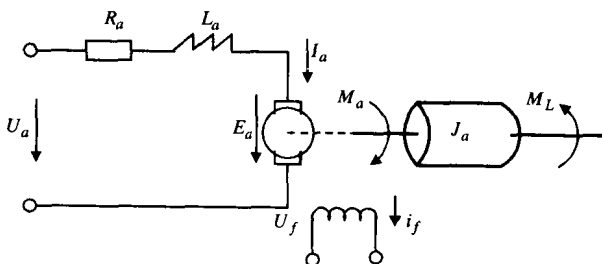


图 2-5 直流电动机系统

一个是电网络系统，由电网络得到电能，产生电磁转矩。另一个是机械运动系统，转动机械能带动负载转动。

(1) 电网络平衡方程

$$L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a + E_a = U_a$$

式中 I_a ——电动机的电枢电流；

R_a ——电动机的电阻；

L_a ——电动机的电感；

E_a ——电枢绕组的感应电动势。

(2) 电动势平衡方程

$$E_a = K_e \omega$$

式中 K_e ——电动势常数，由电动机的结构参数确定。

(3) 机械平衡方程

$$J_a \frac{d\omega}{dt} = M_a - M_L$$

式中 J_a ——电动机转子的转动惯量；

M_a ——电动机的电磁转矩；

M_L ——折合阻力矩。

(4) 转矩平衡方程

$$M_a = K_C I_a$$

式中 K_C ——电磁转矩常数，由电动机的结构参数确定。

将上述四个方程联立，因为空载下的阻力矩很小，略去 M_L ，得方程组如下

$$\begin{cases} L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a + E_a = U_a \\ E_a = K_e \omega \\ J_a \frac{d\omega}{dt} = M_a \\ M_a = K_C I_a \end{cases}$$

消去中间变量 I_a, E_a, M_a ，得到关于输入输出的微分方程式

$$\frac{J_a L_a}{K_C} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{J_a R_a}{K_C} \frac{d\omega}{dt} + K_e \omega = U_a$$

这也是一个二阶线性微分方程，因为电枢绕组的电感一般很小，若略去 L_a ，则可得到简化的一阶线性微分方程为

$$\frac{J_a R_a}{K_C} \frac{d\omega}{dt} + K_e \omega = U_a$$

总结上面的例子可以归纳出建立系统微分方程的一般步骤：

(1) 全面了解系统的工作原理、结构组成和支配系统运动的物理规律，确定系统的输入