《考研数学复习全书》编写组

高等数学复习指南

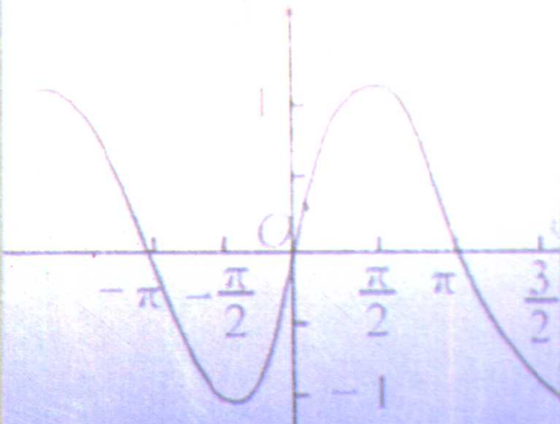
Gaodeng Shuxue Fuxi Zhinan

考研数学复习全书

（理工类）

2003年

数



东南大学出版社

考研数学复习全书

高等数学复习指南
（理工类）

《考研数学复习全书》编写组

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是根据国家教育部制订的《全国硕士研究生人学统一考试数学考试大纲》，在对多年的研究生人学试题进行分析总结和多年的考研辅导实践的基础上编写而成的。

全书共分8章，每章内容包括内容提要、典型例题及练习题，并附有习题答案与提示。本书是报考工学硕士的高等数学复习指南，绝大部分内容也适用于经济类考生，可作为高等院校教师和学生的数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学复习指南：理工类/《考研数学复习全书》编写组编．—南京：东南大学出版社，2000.10
(考研数学复习全书)
ISBN 7-81050-687-0

Ⅰ.高... Ⅱ.考... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第51910号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号　邮编 210096)
出版人　宋增民
江苏省新华书店经销　　华东有色地研所印刷厂印刷
开本：787mm×1092mm 1/16　印张：24.25　字数：605千字
2002年3月第1版第3次印刷
定价：30.00元
(凡有印装质量问题，可直接向发行科调换，电话：025-3792327)

修订前言

本套考研数学复习全书自发行后，受到了广大读者的欢迎，同时也给我们提出了宝贵的建议和要求。据此，我们作了如下修改：一是增加了 2002 年全国研究生入学考试数学试题；二是在对 2002 年全国考研数学试题分析及对 2003 年研究生入学考试数学试题预测的基础上，对例题及习题进行了调整，并增加了例题分析与总结。

本套考研数学复习全书中的《高等数学复习指南(理工类)》由东南大学的董梅芳、黄骏、王海燕、黄安才老师，河海大学的郁大刚、丁莲珍老师，南京邮电学院的薛志纯老师，扬州大学的张兴龙老师修订，并由董梅芳、薛志纯老师统稿。

我们希望本书能为有志报考硕士研究生的读者提供更多的帮助，也相信本书会更受读者的欢迎。

编者

2002 年 2 月

前　言

随着研究生招生规模的不断扩大，广大考生迫切需要一套系统的研究生考前复习指导书。为此，江苏省部分高校的一批多年参与考研辅导工作和考研阅卷工作、且有较高学术造诣和丰富教学经验的教师联合编写了本套考研数学复习全书，包括《高等数学复习指南(理工类)》、《线性代数与概率统计复习指南》、《数学模拟试题及分析(理工类)》，以适应不同类型的考生的要求。

本套考研数学复习全书是根据国家教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在对历年来的研究生入学考试试题进行了详细分析和总结的基础上编写而成的。全书系统性强、题型全面、突出重点、突破难点。通过对基本概念、理论和方法的归纳总结，典型例题的详细分析，使读者熟练掌握基本解题方法，注重解题思路和解题技巧，解答疑难问题，力求培养考生分析问题和解决问题的能力，提高考生的应试能力。

本套指导书中的《高等数学复习指南(理工类)》，由东南大学的董梅芳、黄骏、王海燕、黄安才老师，河海大学的郁大刚、丁莲珍老师，南京邮电学院的薛志纯、周华老师，江苏理工大学的丁丹平老师，扬州大学的张兴龙老师编写，由董梅芳、薛志纯老师统稿。

在本书的编写出版过程中，得到了东南大学出版社及有关高校数学系领导和教师的大力支持，在此一并表示感谢！

编者

2000 年 9 月

目　　录

1　函数、极限、连续

1.1　函数

1.1.1　函数

设数集 $D \subset R$,若对于任一 $x \in D$,按照一定的对应法则 f,总有确定的数值 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y = f(x)$,称 D 为函数的定义域,$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 为 f 的值域。

定义域和对应法则是确定一个函数的两要素。

1.1.2　反函数

设有函数 $y = f(x), x \in D$。对 $y \in f(D)$,由 $y = f(x)$ 可确定 x 与之对应,由此确定的函数称为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$,习惯上记为 $y = f^{-1}(x)$。

函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。

1.1.3　复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,$D = \{x \mid x \in D_\varphi$ 且 $\varphi(x) \in D_f\} \neq \varnothing$,则当 $x \in D$ 时,由 $y = f(\varphi(x))$ 确定的函数称为 f 与 φ 的**复合函数**。

1.1.4　初等函数

由常数和基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的并可用一个解析式子表示的函数,称为**初等函数**。

1.1.5　函数的几个重要性质

1) 有界性　若存在 $M > 0$,使得对任一 $x \in I \subset D$,都有 $|f(x)| \leqslant M$($f(x) \leqslant M$ 或 $f(x) \geqslant -M$),则称 $f(x)$ **在 I 上有界**(有上界或有下界)。

注　一般证明 $f(x)$ 在 I 上无界的方法是:找一数列 $\{x_n\} \subset I$,使 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$。

2) 单调性　若对任意的 $x_1 < x_2$,且 $x_1, x_2 \in I \subset D$,总有 $f(x_1) < (>) f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加(减少)**。

3) 周期性　若存在 $T > 0$,使当 $x \in D$ 时,有 $x \pm T \in D$,且 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**。通常称使 $f(x + T) = f(x)$ 成立的最小 T 为 $f(x)$ 的周期。

注　若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 $\dfrac{T}{a}$ 为 $f(ax + b)$ 的周期($a > 0$)。若 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期,$i = 1, 2, \cdots, n$,则 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的最小公倍数 T 是 $f_i(x)$ 及 $f_i(x)$ 经初等运算所得函数的公共周期。

4）奇偶性　若对任意 $x \in T$，总有 $f(-x) = -f(x)(f(-x) = f(x))$，则称 $f(x)$ 为**奇(偶)函数**。

奇(偶)函数的图形关于原点(y 轴)对称。

注　2 个奇或偶函数的运算具有以下结论：奇 ± 奇 = 奇；偶 ± 偶 = 偶；奇 $\overset{\times}{\div}$ 奇 = 偶；偶 $\overset{\times}{\div}$ 偶 = 偶；奇 $\overset{\times}{\div}$ 偶 = 奇。

例题精选 1.1

【例 1】　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(\ln(\ln x))$；

(2) $f(\sin x) + f(\cos x)$。

解　(1) 令 $u = \ln(\ln x)$，$f(u)$ 的定义域为 $[0,1]$，故 $0 \leqslant \ln(\ln x) \leqslant 1$，于是 $1 \leqslant \ln x \leqslant \mathrm{e}$，$\mathrm{e} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，因此 $f(\ln(\ln x))$ 的定义域为 $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}]$。

(2) 求 $f(\sin x) + f(\cos x)$ 的定义域，即求下列不等式组的解：

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad k = 0, \pm 1, \cdots$$

因此 $f(\sin x) + f(\cos x)$ 的定义域为 $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [2k\pi, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}]$。

【例 2】　求函数 $y = \sin \dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域。

解　$y = \sin \dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 为 $y = \sin \dfrac{\pi}{2} u$ 和 $u = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的复合函数。由于 $1 + x^2 \geqslant 2|x|$，所以 $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$，于是 $u = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$，$y = \sin \dfrac{\pi}{2} u$ 的值域为 $[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$。

【例 3】　已知

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ x & x \leqslant 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ x^3 & x > 1 \end{cases}$$

求 $f(g(x))$，$g(f(x))$。

解　这是求 2 个分段函数的复合函数。首先

$$f(g(x)) = \begin{cases} \ln g(x) & g(x) > 0 \\ g(x) & g(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

其次，由 $g(x) > 0$，得 $x > 1$ 或 $x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$，此时

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq 0 \\ x^3 & x > 1 \end{cases}$$

$$\ln g(x)=\begin{cases}\ln x^2 & x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0\\ \ln x^3 & x>1\end{cases}$$

而当 $x=0$ 时，$g(x)=0$，综上得

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln x^2 & x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0\\ \ln x^3 & x>1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

同理可得

$$g(f(x))=\begin{cases}f^2(x) & f(x)\leqslant 1\\ f^3(x) & f(x)>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln^2 x & x>0 \text{ 且 } f(x)\leqslant 1\\ x^2 & x\leqslant 0 \text{ 且 } f(x)\leqslant 1\\ \ln^3 x & x>0 \text{ 且 } f(x)>1\\ x^3 & x\leqslant 0 \text{ 且 } f(x)>1\end{cases}=\begin{cases}\ln^2 x & 0<x\leqslant \mathrm{e}\\ x^2 & x\leqslant 0\\ \ln^3 x & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

【例 4】 (1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$；

(2) 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且当 $y=1$ 时，$z=x$，求 $f(x)$；

(3) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)(a^2\neq 1)$，其中 $\varphi(x)$ 是已知函数，在 $x\neq 1$ 时有定义，求 $f(x)$。

解 (1) **方法 1** 由已知

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3x}{2x+(x-1)}=\frac{3\dfrac{x}{x-1}}{2\dfrac{x}{x-1}+1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

这种解法的关键是变形，凑出 $f(x)$。

方法 2 先由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 解出 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$，再将其代入 $f(3x)$ 得

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{\dfrac{3f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{3f(x)}{f(x)-1}-1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

(2) 由 $y=1$ 时 $z=x$，得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

即 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$，令 $u=\sqrt[3]{x}-1$，$x=(u+1)^3$，于是

$$f(u)=(u+1)^3-1=u^3+3u^2+3u$$

即得

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

(3) 题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数的等式，此类题目的解法一般是利用变量代换，设法得到一个方程组，然后解出 $f(x)$。为此，令 $t=\dfrac{x}{x-1}$，则 $x=\dfrac{t}{t-1}$，代入原等式得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$$

于是得到关于 $f(x), f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 的二元一次方程组

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right) - af(x) = \varphi(x) \\ f(x) - af\left(\frac{x}{x-1}\right) = \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) \end{cases}$$

解得

$$f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$$

【例5】 设 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$，且在 $[0,2]$ 上，$f(x) = x(x-2)$，试求 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的表达式。

解 设法利用所给的关系式 $f(x+2) = 2f(x)$ 来扩充 $f(x)$ 的定义域。

当 $x \in [2,4]$ 时，$x-2 \in [0,2]$，因此

$$f(x-2) = (x-2)(x-4)$$

$$f(x) = 2f(x-2) = 2(x-2)(x-4)$$

当 $x \in [-2,0]$ 时，$x+2 \in [0,2]$，因此

$$f(x+2) = (x+2)x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+2) = \frac{1}{2}x(x+2)$$

当 $x \in [-4,-2]$ 时，$x+2 \in [-2,0]$，由上得

$$f(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)(x+4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+2) = \frac{1}{4}(x+2)(x+4)$$

综上得 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)(x+4) & -4 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{1}{2}x(x+2) & -2 < x \leqslant 0 \\ x(x-2) & 0 < x \leqslant 2 \\ 2(x-2)(x-4) & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

【例6】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $a > 0, b > 0$，若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，证明：$f(a) + f(b) > f(a+b)$。

证 由 $a > 0, b > 0$ 得 $a < a+b, b < a+b$，再由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，得

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(a+b)}{a+b}, \qquad \frac{f(b)}{b} > \frac{f(a+b)}{a+b}$$

即

$$(a+b)f(a) > af(a+b), \qquad (a+b)f(b) > bf(a+b)$$

两式相加得

$$(a+b)(f(a) + f(b)) > (a+b)f(a+b)$$

从而有

$$f(a) + f(b) > f(a+b)$$

【例 7】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶(奇)函数,且图形关于 $x=2$ 对称,证明 $f(x)$ 为周期函数,并求周期 T。

证 要证 $f(x)$ 为周期函数,只需设法找到 $T>0$,使 $f(x)$ 满足关系式 $f(x+T)=f(x)$ 即可。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,又 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称,故有

$$f(2+x) = f(2-x)$$

以 $x-2$ 代入 x,得

$$f(x) = f(4-x)$$

在上式中,再用 $-x$ 代替 x,得

$$f(-x) = f(4+x)$$

因此 $f(x+4)=f(x)$,故 $f(x)$ 为周期函数,且以 4 为周期。

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,又 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称,故有

$$f(2+x) = f(2-x)$$

即

$$f(x) = f(4-x)$$

在上式中,用 $-x$ 代替 x,得

$$f(x+4) = f(-x)$$

再用 $x+4$ 代替 x,得

$$f(x+8) = f(-(x+4)) = -f(x+4) = -f(-x) = f(x)$$

故 $f(x)$ 为周期函数,且以 8 为周期。

【例 8】 设 $f(x)$ 满足关系式 $2f(x) + x^2 f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2+2x}{x+1}$,求 $f(x)$。

解 在

$$2f(x) + x^2 f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2+2x}{x+1} \tag{1}$$

中以 $\frac{1}{x}$ 代换 x,得

$$2f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1+2x}{x+x^2} \tag{2}$$

式(1) $\times x^2$ - 式(2) $\times 2$ 得

$$-3f(x) = \frac{-3x}{x+1}$$

即

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

1.2 极限

1.2.1 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists$ 正整数 N,使得当 $n > N$ 时,$|x_n - A| < \varepsilon$。

1.2.2 函数极限的定义

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists\delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists\delta > 0$,使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists\delta > 0$,使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists X > 0$,使得当 $x > X$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = A$:$\forall\varepsilon > 0$,$\exists X > 0$,使得当 $x < -X$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$。

注 由数列$\{x_n\}$可得到一个定义在正整数集 $\mathbf{N}$ 上的函数

$$f(n) = x_n \qquad n \in \mathbf{N}$$

因此数列极根也可看成一种形式的函数极限。

1.2.3 无穷小量、无穷大量及无穷小量阶的比较

1) 如 $\lim\limits_{x\to\square}f(x) = 0$,则称 $f(x)$ 是当 $x\to\square$ 时的**无穷小(量)**。

2) 如 $\lim\limits_{x\to\square}f(x) = \infty$,即对 $\forall M > 0$,当 $x\to\square$ 时,$|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 为 $x\to\square$ 时的**无穷大(量)**。

3) 无穷小量阶的比较

设 $f(x)$,$g(x)$ 是当 $x\to\square$ 时的无穷小(量),

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$,则称当 $x\to\square$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小(量)**,或称当 $x\to\square$ 时,$g(x)$ 是 $f(x)$ 的**低阶无穷小(量)**,记为 $f(x) = o(g(x))(x\to\square)$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$,则称当 $x\to\square$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**同阶无穷小(量)**,特别若 $A = 1$,则称当 $x\to\square$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是**等价无穷小量**,记为 $f(x)\sim g(x)\ (x\to\square)$;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{[g(x)]^k} = A \neq 0(k > 0)$,则称 $x\to\square$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 **k 阶无穷小量**。

1.2.4 极限的性质

1) **保号性**:设 $\lim\limits_{x\to\square}f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to\square}g(x) = B$,若 $A < B$,则当 $x\to\square$ 时,$f(x) < g(x)$;反之,若 $x\to\square$ 时,$f(x) < g(x)$,则必有 $A \leqslant B$。

2) **有界性**:若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 存在,则 $x\to\square$ 时,$f(x)$ 有界。

3）**四则运算**：设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)$都存在，则有

$$\lim_{x\to\square}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to\square}f(x)\pm\lim_{x\to\square}g(x)$$

$$\lim_{x\to\square}(f(x)g(x))=\lim_{x\to\square}f(x)\lim_{x\to\square}g(x)$$

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}\qquad(\lim_{x\to\square}g(x)\neq 0)$$

注　四则运算成立的条件是参与运算的每个极限均存在，解题时务必注意如下做法是错误的："$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$"，因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。

4）无穷小量与有界函数的乘积为无穷小量。

5）$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\square^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\square^-}f(x)=A$。

6）$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to\square}\alpha=0$。

7）**夹逼定理**：若$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\lim\limits_{x\to\square}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$。

8）**单调有界原理**：单调有界数列（函数）必有极限。

注　在应用单调有界原理时，具体化为2种情况：单调递增有上界的数列（函数）必有极限或单调递减有下界的数列（函数）必有极限。

1.2.5　极限的求法

1）利用函数的连续性　　若$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=u_0$，$f(u)$在$u_0$连续，则$\lim\limits_{x\to\square}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to\square}g(x))$。

2）利用左、右极限。

3）极限的四则运算。

4）无穷小量与无穷大量的性质。如无穷小量（不为零）与无穷大量互为倒数；无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量等。

5）利用恒等变形。如分子、分母有理化，通分，三角函数恒等式等。

6）夹逼定理和单调有界原理。

7）2个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

注意它们的一般形式

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,\qquad\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$

式中，"□"表示变量的某个表达式。

8）罗必达法则

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal[\text{当右边极限存在或为}\infty\text{时}]{\frac{0}{0}\text{或}\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注意罗必达法则只能直接用于求$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限。对于其它类型的未定式，必须首先化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，常用的有