气体动力学基本原理

D 编

气体动力突跃的基本理论

〔美〕W. D. 黑斯 著

科学出版社

气体动力学基本原理

D 编

气体动力突跃的基本理论

〔美〕W. D. 黑斯 著

徐华舫 译

科 学 出 版 社

1 9 8 8

内 容 简 介

本书是美国 H.W. 埃蒙斯教授主编的«气体动力学基本原理»(系〔美〕«高速空气动力学与喷气推进»丛书第III卷)一书的 D 编. 它从最概括的观点出发对气体动力突跃作了理论分析. 书中给出了正突跃面所遵循的流体动力学基本规律，分析了突跃面存在的条件. 依靠雨果纽曲线详细地讨论了正激波和放热的突跃变化.对于采用纳维-斯托克斯关系式研究激波结构和放热突跃变化的结构也作了详细的论述. 还讨论了燃烧波和放热突跃面的内稳定性问题以及在激波内进行的物理过程.

本书可供高等院校流体力学专业的学生、教师及喷气发动机、高速风洞等方面的科技人员参考.

H. W. EMMONS Ed.
FUNDAMENTALS OF GAS DYNAMICS
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1 9 5 8
(SECTION D)

气体动力学基本原理
D 编
气体动力突跃的基本理论
〔美〕W. D. 黑斯 著
徐华舫 译
责任编辑 谈德颜
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1988年2月第一版 开本：850×1168 1/32
1988年2月第一次印刷 印张：2 5/8
印数：0001—1,750 字数：66,000
ISBN 7-03-000272-5/O·73
定价： 0.88 元

目　　录

引　　言

本编的目的在于尽可能实际地从最概括的观点对气体动力突跃面做一个理论介绍．气体动力突跃面在流场中是这样一种曲面，越过该面，从宏观的观点看来，流体的各项属性作了突跃式的变化，同时有流体流过该曲面．这样，气体动力突跃面就和接触突跃面有所区别了，越过接触突跃面是没有流动的，且接触突跃面的两边压强是相等的．流体动力突跃面在流体力学的许多分支里都存在；在气体动力学或高速气体动力学中，几乎一切有实际重要意义的流动里都有流体动力突跃面出现．流体动力突跃面的存在为人所认识，最早在十九世纪中叶，虽然那些现在为人们所接受的突跃关系式要到雨果纽（Hugoniot）的文章（1889）[1,第80页]发表才确立．流体动力学中关于突跃面的早期研究历史，读者可参看古朗（Courant）和弗里德里克斯（Friedrichs）合著的那本书[2]．

最重要的气体动力突跃面是激波；在激波中，气体或其他物质的压强、密度、温度和熵作突然的升高．在普通的激波中，波后气体所遵循的状态方程和波前气体一样．有许多别种气体动力突跃面却不是这样的．其中最重要的也许要算是燃烧波了，在燃烧波中化学变化就发生在突跃面本身中，所以突跃面的两边介质所遵循的是很不相同的状态方程．在空气动力问题或风洞问题中可能出现的另一种重要突跃面是凝结突跃；在凝结突跃面之前的气体含有过饱和的水蒸汽，这些水蒸汽在凝结突跃波中有一部份凝结成为细水珠了．

在十分强烈的突跃面或激波中，有许多重要的现象，以前一直为物理学家所特别注意．其中可列举出电离、离解，和弛豫三种效应．有大量辐射的话，辐射的能量效应也可能对突跃面有强烈的影响，而如果速度足够高的话，也许还得把相对论的效应考虑进

去.

当然这些气体动力突跃面并不真是严格的突跃;激波、燃烧波或凝结突跃都是具有一定厚度的，各物理参数在这个厚度里作连续的变化. 如果这个厚度和流场上某个适当的宏观尺寸（如曲线激波的曲率半径)相比较是个微小的量的话,那末通过分析在推求各物理量的关系式时,就可以把突跃面当作严格的突跃来处理.突跃面的厚度和宏观尺寸相比较十分微小这个假设在本编内是一条基本的假设.

“结构”一词用在气体动力突跃面上时，是指在突跃面的微小而有一定值的那个厚度内部,流体物理参数值的结构.一种介质的热力平衡被扰动之后，总需经过一个特征时间才能接近于重新建立起平衡来;这个时间乘以流速决定一个特征距离,这个距离必和一个分子自由行程同一数量级,或大于此值. 如果在突跃面中,物理变化和化学变化都很缓慢，慢到突跃面的厚度和这个特征距离相比较是个很大的数值的话，那就可以应用热力学上的准平衡概念.这样就可以用纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程,也可以使用适合于缓慢反应的经典化学动力学规律.如果突跃面很薄,物理和化学变化都进行得十分迅速，那就必须考虑热力平衡基本上不存在.这就可能需要放弃连续介质的概念,而采用分子运动论的观点. 在研究某些突跃面的结构时，例如包含有化学反应或凝结的突跃面,必须考虑到某些分子过程，如扩散和集结过程.（参看第F编、G编及H编).

显然,要想透彻地研究气体动力突跃面及其结构,根本上是要把流体动力学，物理学和化学综合应用，而且不乏值得注意的问题. 目前非常需要一些能正确描写在突跃面中发生的现象的附加概念，这些概念将能使这些现象所遵循的复杂规律得以作一定的简化,以便对问题作出更合用的理论处理.

D. 1. 正突跃面中的基本关系式

现在给出流体动力学中正突跃面所遵循的基本规律，并加以讨论．这里所研究的过程是定常的，流动是一维的，突跃面和流动方向相垂直． 虽然大多数自然界中的突跃面并不符合这些限制，但加了这些限制对问题的普遍性并没有作任何根本性的损害．突跃面的运动可以除去，只要观察者总是和突跃面一起运动就行了．流场的非定常性和非均一性可以这样免除：观察者对微小的空间和时间的标度采用足够小的微观观点．突跃面的斜度可以这样除去：观察者沿突跃面运动，使切向分速恰为零．

在建立基本规律时，需要作一些假设，这些假设对结果的适用范围是有关系的．一个必须的基本假设是：突跃面两侧的流体各遵循一个已知的状态方程[1]，且具有唯一的可定义的速度值以及各种热力参数的值．这条假设在某些场合可能造成困难，例如固体和气态的燃烧产物的混合物，或是显著偏离热力平衡的场合．通过辐射所交换的能量略去不计；假定牛顿力学或非相对论力学适用．

突跃面的基本规律是根据力学的几条基本守恒律推导出来的．由于这些基本规律或与之十分类似的基本规律在前几编里已经推导过了，所以这里不再作详细的推导．符号用标准的，即 p 代表压强，ρ 代表密度，u 代表流速，h 代表单位质量的焓，e 代表单位质量的内能．为了方便，另用 v 代表密度的倒数，即单位质量的体积．

参看图 D, 1a，质量守恒律给出基本规律:

---

1) "状态方程"一词在这里以及本编以后诸节中是用来包括所有的常用的热力变数在内的，而不仅是工程上用的那种只指连结压强、比容和温度的关系式．例如规定焓为熵及压强的函数，这样一个关系，按这里的说法，就可以看作是一个状态方程，因为这样一个关系式给出了全部热力学方面的知识．此外，"状态方程"一词有时还用来表示任何一个连结状态参数的方程．

$$m = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \tag{1.1}$$

这样定义的m称为质量流量．动量守恒律给出另一条规律：

$$p_0 = p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \tag{1.2}$$

最后，能量守恒律给出下列规律：

$$h_0 = h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \tag{1.3}$$

这三个方程称为三条守恒律．

从第一、二两条守恒律(方程 1.1 及 1.2) 立即可以得出一个适用于所有类型的气体动力突跃面的方便式子，即

$$p_2 - p_1 = m(u_1 - u_2) = m^2(v_1 - v_2) \tag{1.4}$$

这个式子说明，越过突跃面时，速度下降的同时伴随着压强上升和密度上升．反之，速度上升则伴随着压强下降和密度下降．这就使我们得以立即把所有的突跃面划分成为压缩(减速)的突跃和膨胀(加速) 的突跃两大类． 如果方程 1.4 中的三个相等的量都是零，那末就不存在突跃面了．如果这些差值都很小，就称为弱突跃面．方程 1.4 还可以改写成下列两种形式：

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = u_1 u_2 \tag{1.5}$$

$$(u_1 - u_2)^2 = (p_2 - p_1)(v_1 - v_2) \tag{1.6}$$

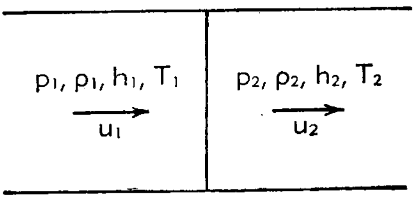

图 D，1a． 正突跃面．

方程 1.3 中的能量函数是单位质量的焓值，它和单位质量的内能有下列的关系：

$$h = e + pv \tag{1.7}$$

能量方程可以写为另一种形式：

$$h_0 = e_1 - \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_0 u_1}{m} = e_2 - \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_0 u_2}{m} \tag{1.8}$$

从上面的三条守恒律可以导出所谓的雨果纽关系式，该式可以表为两种形式:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(v_1 + v_2) \tag{1.9}$$

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(v_1 - v_2) \tag{1.10}$$

这个关系式在研究爆轰和爆燃时十分重要;它有个特点,式子里没有流速出现，所以它是一个纯热力学的方程. 根据这个式子可作出雨果纽曲线,该曲线是在给定的 p_1 和 v_1 值之下,作 p_2 对 v_2 的曲线. 如果突跃面两侧的流体遵循同一状态方程,那末 p_1, v_1 点必在此曲线上. 如果有化学反应或状态变化发生,致使 p_1, v_1 点不在此曲线上,那末可以按该点在曲线以下或以上,而将变化划分为放热的突跃和吸热[1]的突跃. 通常遇见的只是放热的突跃；图 D, 1b 上画的雨果纽曲线就是放热的. 在研究突跃现象时，还有别种形式的图线可用，不过别种图线不具有雨果纽曲线仅包含热力参数这样的特点.

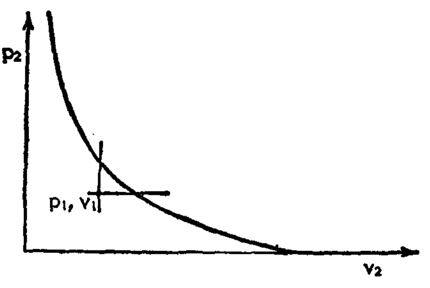

图 D, 1b. 雨果纽曲线

1）放热和吸热这两个词用在这里不完全合乎通常的用法，也许膨胀的和收缩的这一类的名词更合适些. 不过那样用的话，在压缩的膨胀突跃面上便会造成概念的混淆，所以本文作者宁愿使用放热和吸热这两个词，尽管它和热量的释放或吸收并没有很清晰的定义关系。一般地说来，释放热能的反应所产生的突跃面是和这里所说的放热突跃相符合的，而吸收热能的反应所产生的突跃面则和这里所说的吸热突跃相符合；因此放热突跃和吸热突跃确是和字面的通常意义有些联系的.

在研究气体动力突跃面时，最重要的问题之一是突跃面存在的可能性．突跃面存在的条件可以列出几条：

1. 上述各种守恒律必须满足．这只是必要的条件而决不是充分的条件．可以有许多满足各突跃规律而事实上却并不存在的假想突跃面．

2. 单位质量介质的熵值必须增大．这是用来满足热力学第二定律的一个条件，也是个必要的条件．和条件 1 合在一起，仍不足以保证突跃面的存在，但在排除一些为条件 1 所允许而又并不存在的突跃面这个问题上，可能是有用的．

3. 突跃面在其结构上必须与物理上可实现的过程相适应．这里“物理上”一词包括任何反应中的化学方面的以及化学动力学方面的考虑．只要突跃面是内部稳定的，在小范围内，这个条件是突跃面存在的必要及充分条件，因为在突跃面结构内部相应的物理规律和热力学规律都必须满足，所以条件 1 和 2 就自动满足了．在多数情况下，为便于做理论处理，必须用一些理想化了的过程去近似地替代确切的物理过程． 例如纳维-斯托克斯方程在一定强度的激波中并不是严格正确的，如用此方程作分析，所得到的代表物理过程的图画便是近似的．这里，关键的一点在于，根据物理过程证明的存在定理，其可用性决定于所用的假设过程究竟和实际过程符合到什么程度，即近似度如何．

4. 突跃面的内在结构必须是稳定的．就是说，一个平衡解如果受到了为当地流体动力条件所允许的扰动，它必须能回复到平衡解．这种内在的或局部的稳定性理论还没有很多的发展．下面第 4 节将对这种理论作个简单介绍，并提出一些结果来．

5. 一般地说来，突跃面必须是稳定的．证明了满足上述条件 3 和4，顶多不过证明在小范围内突跃面可以存在而已．在任何一个具体场合里，突跃面存在的条件是：就整个流动的形态和流体动力解可能的变化而言，突跃面必须是稳定的．这种类型的稳定性问题不在本编的讨论范围之内．

气体动力突跃面应按介质越过突跃面时它所遵循的状态方程

有无变化加以划分．如果突跃面两侧介质的状态方程相同，这种突跃面就称为激波．有时会碰到一种特殊情况；同一种介质在不同的热力学范围内由于物相不同而有不同的状态方程，所以同一介质在突跃面的两侧其状态方程可能具有不同的形式．部份凝结了的气体经过突跃面之后变成没有凝结的状态了，这就是个例子；这种突跃面可以称之为蒸发突跃，例如，一道足够强的激波通过雾时就会发生这种情形．不过大多数状态方程形式有改变的场合都是突跃面前面的介质处于亚稳状态的．这一类突跃面的例子有凝结突跃，突跃前的蒸汽是过饱和的；还有爆轰波或爆燃波；在这两种突跃中都发生一定的化学变化．就作者所知，所有的实际场合这类的变化都是放热的．

下两节将主要依靠对雨果纽曲线的详细考虑来进行讨论．为该两节作准备，这里先说一些一般的结论．在雨果纽曲线上，假定流体的初始状况（下标 1）是已知的且固定不变．下两节及本节以后的部份，突跃面后面的未知量将免去下标2．在本编中，除本节最后稍稍谈一下相变的问题之外，其余的地方一概不考虑，所以各热力参数一般地都认为具有连续的一阶导数．

为作准备，先回忆一下来自热力学的几个基本的不等式[3,第79－81页]．其中有两个根据物系的热力稳定性来的，可以表为

$$c_p > c_v > 0 \tag{1.11}$$

另外一个根据物系的流体静稳定性来的，可以表为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0 \tag{1.12}$$

一个基本的物理条件是质量流量 m 必须是实数，按方程 1.4，$p - p_1$ 与 $v_1 - v$ 必须同号．这就限制了雨果纽曲线，使得它有物理意义的，能代表压缩解的只是 p_1，v_1 点左上象限里的那一段．能代表膨胀解的只是右下象限里的那一段．其他两个象限里的曲线段只在考虑数学上的连续性时才用得着．

在雨果纽曲线上，能使各种参数取定驻值的那些点子特别使人感兴趣．有一种定驻点特别有意义，即单位质量的熵 s 和质量

流量 m 都是定驻的. 关系式

$$dh_0 = \frac{1}{2} v_1 dp_0 = v_1^2 m dm \tag{1.13}$$

表明物理量 h_0 和 p_0 与 m 在同一点出现极值. 从雨果纽关系式 1.9 或 1.10,再用上方程 1.4,可以推得

$$Tds = \frac{1}{2}(p - p_1)dv + \frac{1}{2}(v_1 - v)dp \tag{1.14}$$

$$Tds = (v_1 - v)^2 m dm = (p - p_1)(v_1 - v)\frac{dm}{m} \tag{1.15}$$

可见, s, m, p_0, h_0 和 u_1 同时出现同类的极值(最大或最小),此点必是

$$-\frac{dp}{dv} = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \rho^2 a^2 = \frac{p - p_1}{v_1 - v} = m^2 = \rho^2 a^2 \tag{1.16}$$

或突跃面后流速为声速的点,其

$$u^2 = a^2. \tag{1.17}$$

这一点称为恰浦曼 (Chapman)-儒格 (Jouguet) 点, 因为这是恰浦曼[4]和儒格[5]的重要发现. 这种点子以后就记为恰-儒点. 如果 p_1, v_1 点恰在雨果纽曲线上, 那末这就是一个恰-儒点, 在这一点上只有熵必需是定驻的.

在考虑其他各量出现极值时,就需用方程 1.1,1.4, 1.6, 1.9 和 1.10 的微分形式,还有联系内能、焓与熵的关系式:

$$de = Tds - pdv \tag{1.18}$$

$$dh = Tds + vdp \tag{1.19}$$

有几个不很明显的关系式可以表为

$$\frac{1}{2} d(u_1 - u)^2 = de + p_1 dv = -dh + v_1 dp \tag{1.20}$$

$$(v_1 - v)^2 m dv = (2v_1 - v)Tds - (v_1 - v)^2 dp \tag{1.21}$$

$$(v_1 - v)^2 m dv = (2v_1 - v)dh - v_1^2 dp \tag{1.22}$$

在雨果纽曲线中代表压缩解的左上象限里, 各极值必以下列的循环次序出现,或以其反序出现:

p 最小

h	最小
恰-儒点	最小
u	最小
v	最小
e	最大
u_1-u	最大
p	最大

如果循环重复下去或是次序颠倒过来，那末上列最大或最小也倒过来．例如，上面表中的"p 最小"之前的极值将是"u_1-u 最小"．还有，如果上列的表在"v 最小"之后，但在"e 最大"之前的排列次序颠倒过来，那末下一个极值将是"v 最大"，接下去是"u 最大"．这些极值，只可能在曲线的奇点或非解析点上同时有两个存在．压缩段上的各极值表示在图 D，1c 上，这里画的是一条夸张了的雨果纽曲线．

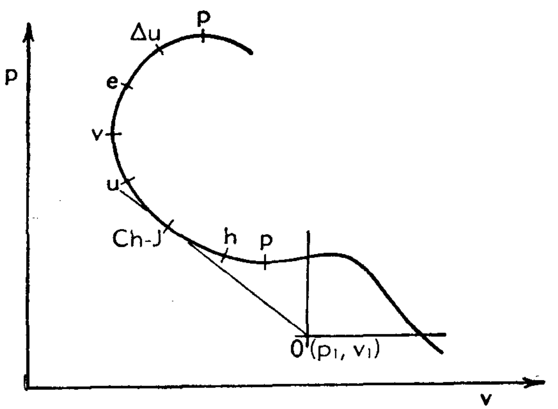

图 D，1c． 雨果纽曲线 v 压缩段上的各极值

为了说明这个序列是怎样得出来的，我们考虑 p，h 和 s 三个量．假定雨果纽曲线是连续的，观察者从 p 的最小值沿曲线走到 s 的最小值(或恰-儒点)．在 p 最小处，dp 为零，而 ds 为负(因为是在向 s 最小值趋近)；从方程 1.19 看，dh 在该点必为负．而在

s 最小值上，ds 为零，dp 为正，此点之 dh 必为正. 于是得出一个结论来：在 p 最小与 s 最小之间，焓必有一最小值. 依此法分别取一组组的三个物理量按同样的推理，最后便可得出整个的极值序列来.

在右下象限中，即代表膨胀解的曲线段上，各极值的序列如下：

v	最小
e	最大
恰-儒点	最大
u	最大(如果 $v < 2v_1$)
p	最小
u	最大(如果 $v > 2v_1$)
h	最小
$u - u_1$	最大
v	最大

由 p_1, v_1 点到雨果纽曲线作直线，代表该直线斜率的极值的恰-儒点，在 u 对 u_1 的速度图上，是横向的极值点 (u_1 的极值). 这两个图之间具有一种互易性质的关系，即速度图上过原点的直线的斜率 u/u_1 必也是雨果纽曲线的横向极值(即 v 极值). 雨果纽图上的 p_1, v_1 点在解释雨果纽曲线的性质时占很重要的地位，至于 0,0 点则并不重要. 为了参考方便起见，把 p_1, v_1 点称为雨果纽曲线的"原点". 读者可以看到，如果把雨果纽曲线作成 $p - p_1$ 对 $v - v_1$ 的曲线，那末 p_1, v_1 这一点就是平常所说的原点了.

有些包括热力参数的导数的辅助公式很有用，现在列为下列诸式：

$$d\eta = \frac{dv}{1 - \frac{1}{2}(v_1 - v)\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_v} \tag{1.23a}$$

$$= \frac{Tds}{\frac{1}{2}(p - p_1) + \frac{1}{2}(v_1 - v)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s} \tag{1.23b}$$

$$= \frac{-de}{\frac{1}{2}(p+p_1)-\frac{1}{2}(v_1-v)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_e} \tag{1.23c}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{1-\frac{1}{2}(p-p_1)\left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_p} \tag{1.23d}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \frac{dh}{\frac{1}{2}(v_1+v)+\frac{1}{2}(p-p_1)\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_h} \tag{1.23e}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \left[\frac{1}{2}d(u_1-u)^2\right] \Big/ \left\{\frac{1}{2}(v_1-v) \times\left[1-(p-p_1)\left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_p\right]-\frac{1}{2}(p-p_1)\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s\right\} \tag{1.23f}$$

这些方程的推导这里都不写了，只叙述一下所用的方法．从方程1.14 形式的雨果纽关系式能推导出来的诸方程，包含了三个一阶导数．但这三个一阶导数之间有一个热力学关系或状态关系存在，如

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v ds + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s dv \tag{1.24}$$

消去一个变数，即得连结两个一阶导数的方程；从方程 1.14和1.24中消去 dp，即得到连结方程 1.23a 和 1.23b 的关系式．用同样的办法可以把全部方程 1.23 得出来．在方程 1.23 中那个以各种形式建立等式关系的导数，只要其中有任何一个变数有变化，它就可以不成为零；这个导数可以看作是沿雨果纽曲线所确定的变数 η 的导数，这个变数称为“雨果纽曲线变数”，它没有定驻点．如果方程 1.23 中有一个分母在雨果纽曲线上某点变为零，那末相应的变数在这一点上便是定驻的，反之则反是．

由方程 1.14，1.23a 和 1.23b 可得下式：

$$m^2-\rho^2a^2 = \left[1-\frac{1}{2}(v_1-v)\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_v\right]\left(m^2+\frac{dp}{dv}\right) \tag{1.25}$$

这个式子可以用来说明雨果纽曲线的形状和突跃面后的流速是亚声速还是超声速的这一问题的关系.

最后,恰-儒点还有一个性质要说一下，雨果纽曲线在该点的二阶导数为

$$\left[1-\frac{1}{2}(v_1-v)\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_v\right]\frac{d^2p}{dv^2}=\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s=2\rho^3a^2\Gamma \tag{1.26}$$

式中

$$\Gamma=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial \rho a}{\partial \rho}\right)_s \tag{1.27}$$

对于比热为常数的完全气体,无量纲量Γ等于 $\frac{1}{2}(\gamma+1)$,而在非完全气体的跨声速相似律理论中,Γ是替代$\frac{1}{2}(\gamma+1)$ 的一个适当的物理量. 方程 1.26 可用方程 1.25 对 v 取导数，并用由方程 1.16 给出的恰-儒点的极值性质而推导出来.

如果要使雨果纽曲线满足某些正常行为的条件，除基本的热力学不等式 1.11 和 1.12 之外,还有一些其他的不等式也是必须满足的，这些条件不是从一般的热力学的推理上去证明它应该得到满足,而是,从另一方面考虑，即除某些介质不见得能满足所有的这些条件外，应为大多数介质所能满足的条件. 引用α代表热力膨胀系数

$$\alpha=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{1.28}$$

并列出以下的经典热力学关系式:

$$\frac{pv}{c_p}\alpha=p\left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_p=\frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s=1+\frac{v^2}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_e \tag{1.29a}$$

$$\frac{a^2}{c_p}\alpha=v\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_v=-\frac{v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s=-1-\frac{a^2}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_h \tag{1.29b}$$

有意义的条件是:

条件 I $$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s=2\rho^3a^2\Gamma>0 \tag{1.30}$$

条件 II-弱
$$\frac{pv}{c_p}\alpha = \frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s > -\frac{2pv}{a^2} \tag{1.31}$$

条件 II-强
$$\frac{pv}{c_p}\alpha = \frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s > -\frac{pv}{a^2} \tag{1.32}$$

条件 III-弱
$$\frac{pv}{c_p}\alpha = \frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s < 2 \tag{1.33}$$

条件 III-强
$$\frac{pv}{c_p}\alpha = \frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s < 1 \tag{1.34}$$

注意，条件 II-强内包含条件 II-弱，而条件 III-强内包含条件 III-弱.

具有相变时，方程 1.31，1.32，1.33 和 1.34 的这些条件是不变的，只是在双相混合物上，这些方程，可以用 dT/dp 代替$(\partial T/\partial p)_s$而被简化．对于简单的双相混合物，条件 I 也是不变的；而在介质由单相变为双相或反过来变化的那一点上，即在饱和条件下，物理量 Γ 或 $(\partial^2 p/\partial v^2)_s$ 是无定义的．在这一点上，物理量

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \rho^2\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \rho^2 a^2 \tag{1.35}$$

是不连续的，这时条件 I 可以用下列的条件代替：即 ρa 随密度的等熵增大而增大．注意，这里的 a^2 总是用来表示一个热力学导数的，只有对于频率很低的声波说来，它才必须和声音传播速度的平方等同．

贝瑟（Bethe）[6]对于任意流体中的激波做了研究，他所用的分析方法和本编第一二节所用的有些共同点，并且也规定了一些条件，这些条件和上列的条件中的一部份相同．上列的条件 I 就是贝瑟的条件 I；条件 II-弱是贝瑟的条件 II；而条件 III-强是贝瑟的条件 III． 他仔细地分析了一些特殊的介质违反他的三个条件的可能性；在这本著作中不包括这些分析．可以这样说，通常的介质是满足所有的贝瑟条件的，也满足条件 II-强、关于条件 I，贝瑟发现，在单相区和双相区之间的（热力状态的）边界上，单相的物理量 ρa 必大于双相的 ρa．所以在相区边界上条件 I 可以表为：等熵膨胀必使单相转变为双相状态。贝瑟看到，如果双相中有一