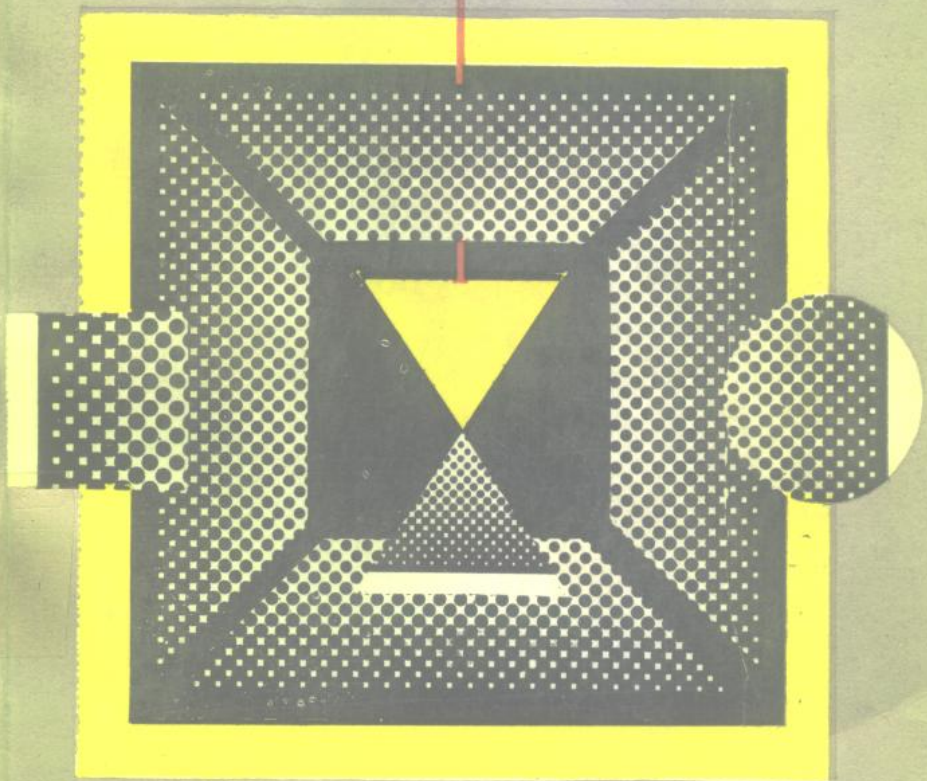


# 物理学 难题集萃

〔附基本题·附详解〕 下册

陈秉乾 胡望雨 舒幼生 金仲辉 编

高等教育出版社



An assembly of difficult problems in college Physics

366971

# 物理学难题集萃

(附基本题·附详解)

下 册

陈秉乾 胡望雨 编  
舒幼生 金仲辉



高等教育出版社

(京)112号

本书集萃了各类物理习题 600 余道,是作者从众多材料中加以精选、改造和演变,连同数十年的教学经验积累,撰写而成的。全书题目类型齐全,内容新颖,灵活实用。全书分力学、热学、电磁学、光学、狭义相对论五部分。又各设基本题和难题,题题有解。基本题突出的特点是解题思路明确,方法简炼,以强化学生解题规范化的训练;难题是本书的重点,而难题的“解题分析”则是本书的精华。对每个难题的分析,展现出本书作者对问题的视角,即定性的物理分析。书中的题目不拘一格,呈现出来的思路也是多姿多彩的。

本书文字简炼、流畅、用词准确,连同其思路的明晰,构成一本不可多得的佳作。本书分上、下册,可供各类高校物理专业师生使用,对国内外研究生考试有选用参考价值,也可作中学物理奥林匹克竞赛及各类物理竞赛代表队组织培训时的资料,供有志于物理竞赛的中学生及中学教师使用。

责任编辑 奚静平



物理学难题集萃  
(附基本题,附详解)

下 册

陈策乾 胡望雨 编  
舒幼生 金仲辉

高等教育出版社出版  
新华书店总店科技发行所发行  
北京印刷二厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 20.125 字数 520 000

1993年5月第1版 1993年6月第1次印刷

印数 0001—8 295

ISBN 7-04-004284-3, O·1226

定价 9.70 元

# 下册目录

## 基本题<sup>①</sup>

- 三 A. 电磁学……………A.1题—A.81题, 1页—85页
1. 静电场 导体与介质……………  
……………A.1题—A.25题, 1页—25页
  2. 稳恒电流……………  
……………A.26题—A.35题, 25页—35页
  3. 稳恒磁场……………  
……………A.36题—A.52题, 35页—53页
  4. 电磁感应与暂态过程……………  
……………A.53题—A.65题, 53页—66页
  5. 磁介质……………  
……………A.66题—A.70题, 66页—71页
  6. 交流电路……………  
……………A.71题—A.78题, 71页—82页
  7. 电磁场 电磁波……………  
……………A.79题—A.81题, 82页—85页
- 四 A. 光学……………A.1题—A.43题, 86页—127页
1. 几何光学 光度学……………  
……………A.1题—A.11题, 86页—96页
  2. 光的干涉……………  
……………A.12题—A.18题, 96页—103页
  3. 光的衍射……………  
……………A.19题—A.23题, 104页—108页
  4. 光的偏振……………  
……………A.24题—A.31题, 108页—117页
  5. 光的吸收 色散和散射……………

① 基本题和难题分别以A、B标明。

- .....A.32题—A.34题, 117页—119页
6. 光的量子性.....  
 .....A.35题—A.43题, 119页—127页
- 五A. 狭义相对论**.....A.1题—A.15题, 128页—141页

## 难 题

- 三B. 电磁学**.....B.1题—B.83题, 142页—373页
1. 静电场 导体与介质.....  
 ..... B.1题—B.25题, 142页—206页
  2. 电流 直流电路.....  
 .....B.26题—B.39题, 206页—240页
  3. 磁场 磁介质.....  
 .....B.40题—B.55题, 240页—287页
  4. 电磁感应 暂态过程.....  
 .....B.56题—B.72题, 287页—337页
  5. 交流电路 其他.....  
 .....B.73题—B.83题, 337页—373页
- 四B. 光学**.....B.1题—B.99题, 374页—597页
1. 几何光学.....  
 ..... B.1题—B.27题, 374页—430页
  2. 光的干涉.....  
 .....B.28题—B.44题, 430页—473页
  3. 光的衍射.....  
 .....B.45题—B.57题, 474页—508页
  4. 光的偏振.....  
 .....B.58题—B.81题, 508页—565页
  5. 分子光学.....  
 .....B.82题—B.89题, 565页—582页
  6. 量子光学.....  
 .....B.90题—B.99题, 582页—597页
- 五B. 狭义相对论**.....B.1题—B.18题, 598页—640页

# 基本题

## 三A. 电 磁 学

### 1. 静电场 导体与介质

题A-1 如本题图, 一电偶极子的电偶极矩  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , 偶极子中心  $O$  到点  $A$  的径矢为  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{l}$  的夹角为  $\theta$ . 在  $r \gg l$  的条件下, 试求点  $A$  的电场强度  $\mathbf{E}$  在径矢  $\mathbf{r}$  方向的分量  $E_r$  和垂直于  $\mathbf{r}$  方向的分量  $E_\theta$ .

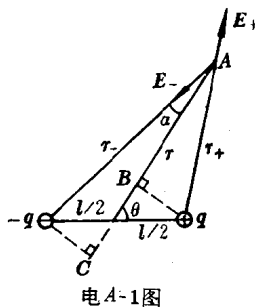
解 设点  $A$  到  $\pm q$  的距离分别为  $r_+$  和  $r_-$ , 则  $\pm q$  在点  $A$  产生的场强大小分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-^2}$$

因  $r \gg l$ , 故

$$r_+ \approx AB = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_- \approx AC = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$



电A-1图

代入上式, 得

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2} \cos \theta\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{l \cos \theta}{r}\right) \quad (1)$$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{l \cos \theta}{r}\right) \quad (2)$$

点A的场强在r方向的分量为

$$E_r = E_+ \cos \alpha - E_- \cos \alpha \approx E_+ - E_-$$

上式已利用  $r \gg l$  时,  $\cos \alpha \approx 1$ . 把式(1)和式(2)代入上式, 得

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P \cos \theta}{r^3}$$

点A的场强在垂直于r方向上的分量为

$$E_\theta = E_+ \sin \alpha + E_- \sin \alpha$$

把  $\sin \alpha \approx \frac{l \sin \theta}{2r}$  及式(1)和式(2)代入上式, 得

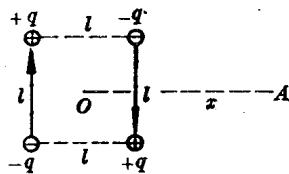
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \sin \theta}{r^3}$$

讨论: 若  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 则  $E_r = 0$ ,  $E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3}$ ; 若  $\theta = 0$ , 则  $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\times \frac{2P}{r^3}, E_\theta = 0.$$

题A-2 如本题图是一种电四极子, 设  $q$  和  $l$  均已知, 点A到电四极子中心O的距离为  $x$ ,  $AO$  与正方形的一对边平行. 试求在  $x \gg l$  条件下, 点A的电场强度  $E$ .

解 点A的场强  $E$  可看作是图中两个电偶极子产生的. 其一的中点与A点相距  $x - \frac{l}{2}$ , 另一的中点与A点相距  $x + \frac{l}{2}$ . 由上题



电A-2图

结果, 前者在点A产生的场强大小为  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}$ , 方向垂直

$OA$  向上; 后者在点A产生的场强大小为  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{\left(x + \frac{l}{2}\right)^3}$ , 方向垂

直  $OA$  向下. 于是点A总场强的大小为

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{\left(x + \frac{l}{2}\right)^3} \\
 &= \frac{P}{4\pi\epsilon_0 x^3} \left[ \left(1 - \frac{l}{2x}\right)^{-3} - \left(1 + \frac{l}{2x}\right)^{-3} \right] \\
 &\approx \frac{P}{4\pi\epsilon_0 x^3} \frac{3l}{x} = \frac{3Pl}{4\pi\epsilon_0 x^4}
 \end{aligned}$$

点A场强E的方向垂直OA向上。

题A-3 真空中有一均匀带电直线，长为L，总电量为Q，线外一点P与直线垂直距离为a，点P和直线两端的连线与直线之间的夹角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 。试求点P的电场强度。

解 如图，在带电直线上任取线元dl，它带电

$$dq = \frac{Q}{L} dl = \lambda dl$$

式中 $\lambda$ 为电荷线密度。该电荷元在点P产生的场强的大小为

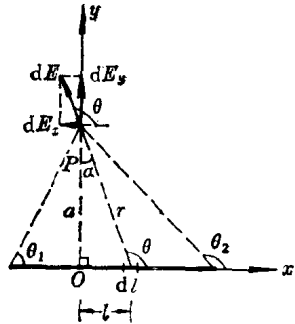
$$dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

式中r是dl到点P的距离，dE的方向如图所示。dE可分解为沿x、y轴的两个分量 $dE_x$ 和 $dE_y$ ，为

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (1)$$

$$dE_y = dE \sin \theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \quad (2)$$

式中l, r,  $\theta$ 均为变量。利用几何关系统一积分变量，以便积分。由图，有



电A-3图



$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{a}$$

$$l = a \operatorname{tg} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = -a \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

故

$$dl = \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta}$$

又

$$r^2 = a^2 + l^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta} \quad (3)$$

把式(3)代入式(1)和式(2), 得

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta d\theta$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \theta d\theta$$

积分, 得

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

讨论: 对无限长的带电直线, 有  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ , 则得

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

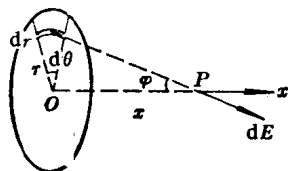
题A-4 如本题图, 半径  $R$  的带电圆盘, 其面电荷密度沿圆盘半径线性地变化, 为  $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ . 试求在圆盘轴线上距圆盘中心  $O$  为  $x$  处的场强.

解 取圆心 $O$ 为坐标原点, 垂直圆盘指向点 $P$ 的方向为 $x$ 轴, 把圆盘分为许多扇形面积, 再把每一个扇形面积分为许多弧状带. 如图所示, 有一与原点 $O$ 相距 $r$ 的弧状带, 带宽为 $dr$ , 扇形角为 $d\theta$ . 其带电量为

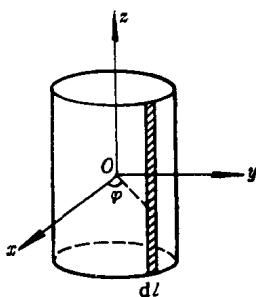
$$dq = \sigma dS = \sigma r d\theta dr$$

由于点 $P$ 相对圆盘对称, 故点 $P$ 的场强沿 $x$ 方向. 所以只需将全部电荷元在点 $P$ 场强 $dE$ 的 $x$ 分量 $dE_x$ 积分即可求得圆盘上全部电荷在点 $P$ 的场强. 得

$$\begin{aligned} E_P &= \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{x^2 + r^2} \cos\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{x^2 + r^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\ &= \frac{\sigma_0 x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + x^2}}{x}\right) \end{aligned}$$



电A-4图



电A-5图

题A-5 如本题图, 无限长带电圆柱面的面电荷密度按 $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$ 分布, 式中 $\varphi$ 是面积元的法线方向与 $x$ 方向之间的夹角. 试求圆柱轴线 $z$ 上的场强.

解 设圆柱面的横截面的半径为 $R$ , 由题A-3知, 无限长均匀带电直线在距离为 $R$ 处的场强为 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ . 于是带电圆柱面

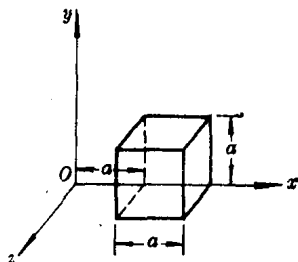
上宽度为  $dl = R d\varphi$  的无限长均匀带电直线在圆柱轴线上任一点产生的场强为

$$\begin{aligned} dE &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{R} = -\frac{\sigma_0 \cos\varphi}{2\pi\epsilon_0 R} R d\varphi \hat{R} \\ &= -\frac{\sigma_0 \cos\varphi}{2\pi\epsilon_0} (\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}) d\varphi \end{aligned}$$

式中  $\hat{R}$  是从点  $O$  到无限长带电直线垂直距离方向上的单位矢量,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  是  $x$ ,  $y$  方向的单位矢量. 故圆柱轴线上一点总场强为

$$\begin{aligned} E &= \int dE = -\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \cos\varphi}{2\pi\epsilon_0} (\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}) d\varphi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \mathbf{i} \end{aligned}$$

题A-6 设某空间电场强度的分布为  $E_x = bx^{\frac{1}{2}}$ ,  $E_y = E_z = 0$ , 其中  $b = 800 \text{ N/C}$ . 试求: (1) 通过如本题图的立方体的电通量, 该立方体边长为  $a = 10 \text{ cm}$ , 它的一个侧面与  $yz$  平面平行且相距为  $a$ . (2) 该立方体内的总电荷是多少?



电A-6图

解 (1) 因  $E$  沿  $x$  方向; 该立方体只有左、右侧面有电场线通过, 另四个面的电通量为零. 通过左、右侧面的电通量分别为

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{左}} &= E \cdot S_{\text{左}} = -E_x S \\ &= -ba^{\frac{1}{2}} \times a^2 = -ba^{\frac{5}{2}} \\ \Phi_{\text{右}} &= E \cdot S_{\text{右}} = E_x S \\ &= b(2a)^{\frac{1}{2}} \times a^2 = \sqrt{2} ba^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

故通过立方体的电通量为

$$\Phi = \Phi_{\text{左}} + \Phi_{\text{右}} = -ba^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2} ba^{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{2} - 1)ba^{5/2} = (\sqrt{2} - 1) \times 800 \times 0.1^{5/2} \\
 &= 1.05 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}
 \end{aligned}$$

(2) 由高斯定理

$$\Phi = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

故立方体内总电荷为

$$\begin{aligned}
 \sum q &= \epsilon_0 \Phi = 8.85 \times 10^{-12} \times 1.05 \\
 &= 9.29 \times 10^{-12} \text{ C}
 \end{aligned}$$

题A-7 根据量子理论, 氢原子中心是带正电 $e$ 的原子核(看作点电荷), 核外是带负电的电子云. 在正常状态下即核外电子处于基态( $s$ 态)时, 电子云的电荷密度分布呈球对称, 为 $\rho(r) = -\frac{e}{2a_0^3} e^{-2r/a_0}$ , 式中 $a_0$ 为常数, 称为玻尔半径. 试求氢原子内的电场分布.

解 氢原子内的电场是原子核产生的电场 $E_+$ 与电子云产生的电场 $E_-$ 的矢量和. 因 $E_+$ 和 $E_-$ 均沿径向, 故总电场亦沿径向, 其大小为 $E_+$ 和 $E_-$ 的标量和. 因原子核为点电荷, 故距核 $r$ 处的

$$E_+(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

因电子云的电荷分布具有球对称性, 故 $E_-$ 可用高斯定理计算, 为

$$E_-(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \rho(r') dV$$

取球坐标, 原点在原子核处, 则体积元 $dV = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi$ , 代入上式, 得

$$\begin{aligned}
 E_-(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^r -\frac{e}{2a_0^3} e^{-2r'/a_0} r'^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= -\frac{e}{\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \int_0^r r'^2 e^{-2r'/a_0} dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{e}{\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \left[ -\frac{1}{2} a_0 r^2 e^{-2r/a_0} - a_0 \left( \frac{1}{2} a_0 e^{-2r/a_0} r \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} a_0^2 e^{-2r/a_0} - \frac{a_0^2}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \left( \frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1 \right) e^{-2r/a_0} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

氢原子内的总电场强度为

$$E = E_+ + E_- = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1 \right) e^{-2r/a_0}$$

题A-8 三块面积均为 $S$ 且靠得很近的导体平板A、B、C分别带电 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 。试求：(1)六个导体表面的电荷密度 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\dots$ 、 $\sigma_6$ 。(2)本题图中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三点的场强。

解 (1)因三导体板靠得很近，导体表面电荷分布可认为是均匀的，且其间的场强方向垂直于导体表面。作如图中虚线所示的高斯面，因导体内场强为零，又导体外场强方向与高斯面侧面平行，故由高斯定理得出

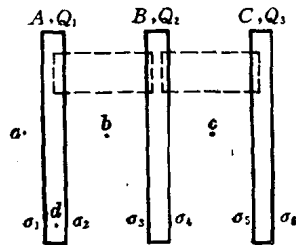
$$\sigma_2 = -\sigma_3, \quad \sigma_4 = -\sigma_5 \quad (1)$$

再由导体板A内 $d$ 点场强为零，可知

$$\sigma_1 = \sigma_6 \quad (2)$$

故点 $a$ 的场强为

$$\begin{aligned}
 E_a &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{i=1}^6 \sigma_i = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\epsilon_0 S} \\
 &= \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6)
 \end{aligned}$$



电A-8图

把式(1)、式(2)代入, 得

$$\sigma_1 = \sigma_6 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2S}$$

再由

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q_1}{S}, \quad \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{Q_2}{S}$$

得

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1}{S} - \sigma_1 = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2S}$$

$$\sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{Q_2}{S} - \sigma_3 = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2S}$$

$$(2) \quad E_a = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum \sigma_i = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\epsilon_0 S}$$

$$E_b = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum \sigma_i = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\epsilon_0 S}$$

$$E_c = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum \sigma_i = \frac{\sigma_5}{\epsilon_0} = \frac{Q_3 - Q_1 - Q_2}{2\epsilon_0 S}$$

题A-9 一球壳内、外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ , 均匀带电, 体电荷密度为 $\rho$ . 试求球壳内外的电位分布.

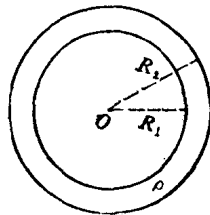
解 由于球壳上电荷均匀分布, 空间的场强分布具有球对称性, 可利用高斯定理求场强分布.

在 $r < R_1$ 处, 有

$$E_1 = 0$$

在 $R_1 \leq r \leq R_2$ 处, 有

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2} \int \rho dV$$



电A-9图

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{R_1}^r \rho r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

在  $r > R_2$  处,

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \rho dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3) \end{aligned}$$

由上述已知的场强分布, 沿径向积分, 即可求出电位分布. 取无穷远点电位为零. 在  $r < R_1$  处,

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr \\ &= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr + \int_{R_2}^\infty \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) \cdot \end{aligned}$$

在  $R_1 \leq r \leq R_2$  处,

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^\infty E_3 dr \\ &= \int_r^{R_2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr + \int_{R_2}^\infty \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho}{6\epsilon_0} \left( 3R_2^2 - r^2 - \frac{2R_1^3}{r} \right) \end{aligned}$$

在  $r > R_2$  处,

$$U_3 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

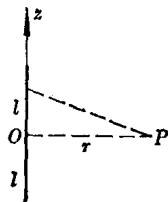
$$\begin{aligned}
 &= \int_r^\infty E_3 dr = \int_r^\infty \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr \\
 &= \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

题 A-10 电荷  $q$  均匀分布在长为  $2l$  的细直线上. 试求: (1) 中垂面上离带电直线中心  $O$  为  $r$  处的电位和场强. (2) 带电直线延长线上离中心  $O$  为  $z$  处的电位和场强.

解 (1) 利用点电荷电位公式, 先求出带电直线在点  $P$  的电位, 再利用电位梯度求点  $P$  的场强. 对本题而言, 上述解题步骤, 较之先求场强分布再求电位要简便些.

取带电直线中心  $O$  为坐标原点, 取坐标如图, 则带电直线中垂面上与直线相距为  $r$  的点  $P$  的电位为

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{-l}^l \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l}^l \frac{\frac{q}{2l} dz}{\sqrt{z^2+r^2}} \\
 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2+r^2}}{r}
 \end{aligned}$$



该点的场强为

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r \sqrt{l^2+r^2}}$$

电 A-10 图

(2) 带电直线延长线上的电位. 在  $z > l$  处,

$$U = \int_{z-l}^{z+l} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z-l}^{z+l} \frac{\frac{q}{2l} dz}{z} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{z+l}{z-l}$$

相应的场强为

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2-l^2)}$$

在  $z < -l$  处,

$$U = \int_{z+l}^{z-l} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 z} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l} \int_{z+l}^{z-l} \frac{dz}{z} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{z-l}{z+l}$$



相应的场强为

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(z^2 - l^2)}$$

题A-11 如本题图,  $AB = 2l$ ,  $\widehat{OCD}$  是以  $B$  为中心,  $l$  为半径的半圆.  $A, B$  处分别有正负点电荷  $q, -q$ . 试问: (1) 把单位正电荷从  $O$  沿  $\widehat{OCD}$  移动到  $D$ , 电场力对它作了多少功? (2) 把单位负电荷从  $D$  沿  $AB$  延长线移动到无穷远, 电场力对它作了多少功?

解 因电场力作功与路径无关, 所以有:

$$(1) \quad W_1 = q_0(U_0 - U_D)$$

式中  $q_0 = 1\text{C}$ ,  $U_0 = 0$ , 且

$$U_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3l} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l} = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

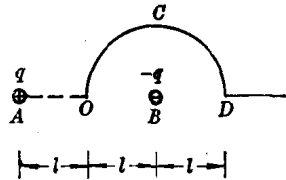
故

$$W_1 = \frac{q_0 q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

$$(2) \quad W_2 = -q_0(U_D - U_\infty)$$

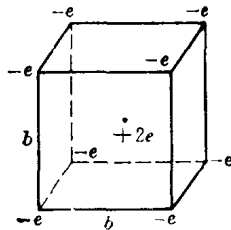
因  $U_\infty = 0$ , 故

$$W_2 = \frac{q_0 q}{6\pi\epsilon_0 l}$$



电A-11图

题A-12 如图, 在边长为  $b$  的立方体的每个顶点上放有点电荷  $-e$ , 立方体中心放有点电荷  $+2e$ . 试求此带电体系的相互作用



电A-12图