丁立祚　张明忠　沈连科　庞德海　合编

高等力学试题分析解答

GAODENGLIXUE SHITIFENXI JIEDA

中　国　铁　道　出　版　社

内 容 简 介

本书列有理论力学、材料力学、结构力学及弹性力学方面的题目343个，逐题做了较详细的分析解答。这些题目均选自1981～1983年五十多个单位招收攻读硕士研究生的试题，具有一定的难度和代表性，以及灵活和综合的特点，可以帮助读者巩固理论，加深概念，开阔思路和提高解题技巧。

读者对象：大专院校工科学生，研究生，自学人员及有关专业青年教师。

高等力学试题分析解答
丁立祚　张明忠　沈连科　庞德海　合编
中国铁道出版社出版
责任编辑　冯秉明
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：850×1168 1/32　印张：20　字数：534 千
1984年7月 第1版　1984年7月 第1次印刷
印数：0001—26,000册　定价：2.95元

前　言

本书取材于我国高等院校、研究生院和科研机关等五十多个单位在1981年、1982年和1983年招收攻读硕士研究生的试题，包括理论力学、材料力学、结构力学和弹性力学四个方面，共选了343个题，逐题做出较为详细的分析解答，并按课程系统分类加以编排。本书基本体现了现有工科力学教学大纲的要求，也有一定数量的题目稍高于大纲规定的水平。这些题目多有灵活与综合的特点，有一定的难度和代表性，对加深理解，巩固所学知识、开阔思路，以及培养分析问题的能力和解题技巧，都是有裨益的。

本书对大专院校学生、报考攻读硕士研究生的读者以及电视大学、业余大学的学员，准备参加高校自学考试的学员均有一定辅导作用，同时对从事力学课教学的青年教师也有一定参考价值。

本书由丁立祚、张明忠、沈连科、庞德海四同志合编。经集体讨论定稿。编写分工为：理论力学部分由张明忠同志编写，材料力学部分由沈连科、丁立祚同志编写，结构力学部分由庞德海同志编写，弹性力学部分由丁立祚同志编写。在本书编写过程中承蒙北京大学周起钊副教授对理论力学部分，北方交通大学冯荣普副教授对材料力学部分，清华大学龙驭球教授和郝静明讲师对结构力学部分，清华大学徐秉业副教授对弹性力学部分所给予的热情指导，并对主要内容作了较详细的审阅，同时还得到许多同志的大力协助，在此一并表示衷心的谢意。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

1983年 4 月于北京建筑工程学院

目　　录

Ⅰ. 理　论　力　学

一、静力学部分（1.1～1.22）……………………………… 1
二、运动学部分（1.23～1.39）……………………………26
三、动力学部分（1.40～1.81）……………………………50

Ⅱ. 材　料　力　学

一、拉（压）、剪、扭、弯基本部分（2.1～2.13）……106
二、截面的几何性质及弯曲强度计算（2.14～2.24）……123
三、弯曲变形基本部分（2.25～2.34）……………………140
四、应力状态及强度理论（2.35～2.47）…………………157
五、复合抗力的计算（2.48～2.60）………………………173
六、超静定系统及能量法（2.61～2.81）…………………193
七、压杆稳定（2.82～2.103）……………………………231
八、动载荷及其它（2.104～2.117）………………………271

Ⅲ. 结　构　力　学

一、结构在静力作用下的内力和位移计算
（3.1～3.33）……………………………………………295
二、结构矩阵分析（3.34～3.42）…………………………360
三、结构稳定计算（3.43～3.48）…………………………396
四、结构动力学（3.49～3.63）……………………………409
五、结构的极限荷载（3.64～3.69）………………………458
六、能量原理（3.70～3.71）………………………………472

Ⅵ. 弹　性　力　学

一、基本概念及应力、应变分析（4.1～4.18）…………479

二、平面问题的直坐标解（4.19～4.26）……………………503
三、平面问题的极坐标解（4.27～4.33）……………………521
四、差分法及有限单元法（4.34～4.36）……………………534
五、一些二维和三维的特殊问题（4.37～4.44）…………542
六、温度应力和复变函数解（4.45～4.50）………………560
七、等截面柱体的自由扭转问题（4.51～4.58）…………580
八、能量法和薄板及薄壳的计算（4.59～4.75）…………600

Ⅰ. 理 论 力 学

一、静 力 学 部 分

题1.1 一均质重直杆OA能绕其固定铰链 O在铅垂平面内自由转动，一绳系于O点，绳的另一端挂一半径为 a 的球。设杆长是$4a$，绳 OC长 a，球和杆的重量都是W，如 图 1.1(a)所示。求平衡时杆与绳对铅垂线的夹角θ和φ，以及绳的张力。

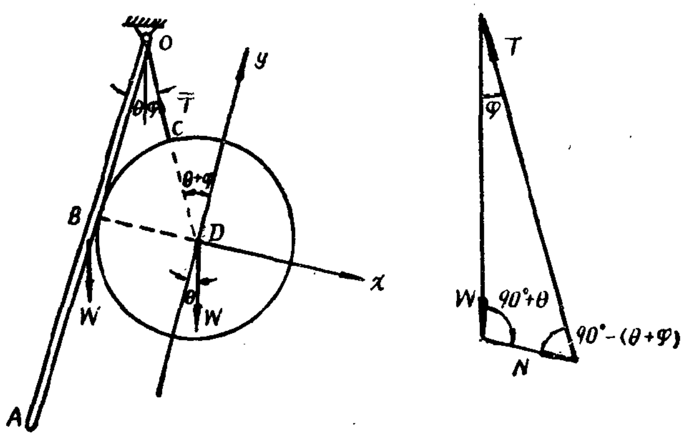

图 1.1 (a)， (b)

解：由于要求夹角θ和φ，选球与杆为平衡对象；未知量有铰链O的约束反力X_0，Y_0，夹角θ，φ；因为此平衡对象是平面一般力系，只有三个独立平衡方程式，欲解上述四个未知量还须建立一个方程，由图1.1(a)所示几何关系可知如果杆与球为光滑接触，OB 垂直于 BD，在直角三角形 OBD 中，$\sin(\theta+\varphi)=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OD}}=$

$\frac{a}{2a}$；所以$\theta+\varphi=30°$ （1）

再列平衡方程

$$\Sigma m_O=0,\ W\cdot 2a\sin\theta-W2a\sin\varphi=0 \qquad (2)$$

由（1）（2）两式解得平衡时杆与绳对铅垂线夹角

$\theta=\varphi=15°$

再以球作为平衡对象：选与杆平行方向为y轴，各力与y轴夹角如图1.1（a）所示，应用平衡方程

$$\Sigma Y=0,\ T\cos(\theta+\varphi)-W\cos\theta=0$$

所以解得绳子张力$T=W\dfrac{\cos\theta}{\cos(\theta+\varphi)}=\dfrac{\cos15°}{\cos30°}W=1.115W$

注：此题也可以应用球上各力满足的闭合力三角形关系（如图1.1(b))得$\dfrac{T}{\sin(90°+\theta)}=\dfrac{N}{\sin\varphi}=\dfrac{W}{\sin[90°-(\theta+\varphi)]}$

解得$T=\dfrac{\cos\theta}{\cos(\theta+\varphi)}W=\dfrac{\cos15°}{\cos30°}W=1.115W$

若杆件与球为非光滑接触，尚应考虑摩擦力，杆件在B点对球的全反力不再通过D，绳OC与球半径CD不在同一直线，当题目给定绳与杆的方位角的情况下，可用平面一般力系平衡条件求解。

题1.2 如图1.2所示平面正方形边长为a，A、B、C点上作用力的大小与方向如图示，D点上作用力偶的大小与转向也如图示。简化中心选为A点。

试求：（1）该平面力系的主矢与主矩；

（2）求出合力的大小、方向、位置。

（要求：将主矢、主矩与合力均画在图上）

解：（1）该平面力系主矢 $\mathbf{R}=\left(P-\sqrt{2}P\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}$

$$+\left(2P-\sqrt{2}P\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}=P\mathbf{j}$$

力系向A点简化的主矩$\mathbf{m}_A=\Sigma\mathbf{m}_A(\mathbf{F})=-(Pa+Pa)\mathbf{k}$

（2）力系合力$\mathbf{R}=P\mathbf{j}$

位于A点左侧$\overline{AE}=\frac{m_A}{R'}=2a$

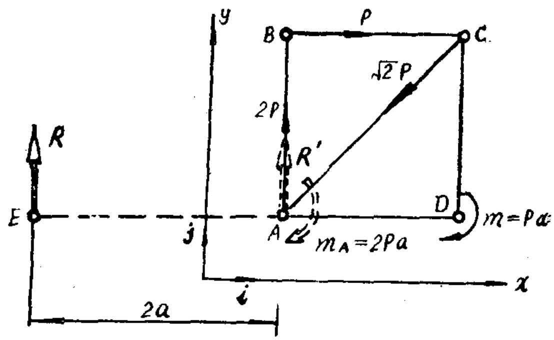

图 1.2

题1.3 如图1.3所示物块重力为$P=50(N)$，置于倾角为$\alpha=30°$的固定斜面上，摩擦系数为$f=0.3$若物块受一力$Q=30(\mathrm{N})$作用，（如图示$\beta=30°$），求作用在物块上的摩擦力的大小。

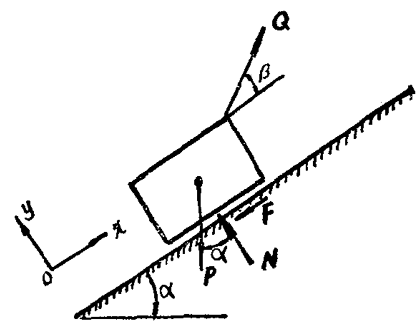

图 1.3

解：以物块为研究对象，选取平行于斜面及垂直于斜面的oxy坐标系。

由$\Sigma Y=0$，求得法向反力$N=P\cos\alpha-Q\sin\beta$。

而最大静摩擦力$F_m=fN=f(P\cos\alpha-Q\sin\beta)$

代入数值　　　$F_m=8.49(\mathrm{N})$。

再由$\Sigma X=0$，求得$F=Q\cos\beta-P\sin\alpha$

代入数值　　　$F=0.98(\mathrm{N})$

由于$F<F_m$，说明物块处于静止，且有沿斜面上滑的趋势，所以作用于物块上的摩擦力$=0.98(\mathrm{N})$，方向沿斜面向下。

若由平衡条件所求摩擦力$F>F_m$，则说明物块不能平衡而在将动未动的临界状态下，物块上的极限摩擦力大小为F_m，方向

沿斜面向下。当物块已经进入运动，则物块上的摩擦力应按动滑动摩擦定律求。

题1.4 如图1.4所示的均质矩形物体$ABCD$，宽$\overline{AB}=10\text{cm}$，高$\overline{BC}=40\text{cm}$，重力为$P=50(\text{N})$，它与斜面间摩擦系数$f=0.4$。设斜面的斜率为$\frac{3}{4}$，绳索的$AE$段是水平的，求能使$ABCD$保持平衡的最小重力$W$。滑轮摩擦不计。

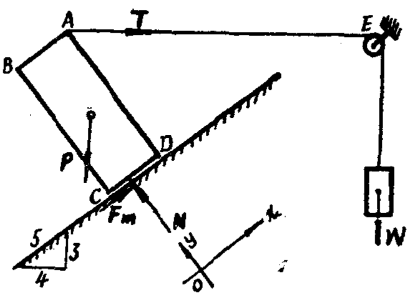

图 1.4

解：依题意求能使$ABCD$保持平衡的最小重力W即求物块沿斜面将要下滑时的W，在物块将下滑的临界状态，沿接触面的摩擦力为极限摩擦力F_m，指向斜上方。又因不计滑轮摩擦，物块上方绳子拉力$T=W$。考虑物块临界状态下的平衡，选平行斜面与垂直斜面的坐标轴应用平衡方程

$$\Sigma Y=0，\quad N-50\cos\alpha-W\sin\alpha=0$$

$$\Sigma X=0，\quad F_m-50\sin\alpha+W\cos\alpha=0$$

$$F_m=fN$$

联立上式可解$W=\dfrac{50(\sin\alpha-f\cos\alpha)}{f\sin\alpha+\cos\alpha}$

将$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$f=0.4$

代入数值可得　　　$W=13.46(\text{N})$

再求物块将绕C点转动时的W_1，此时斜面对物块的约束反力通过C点，应用平衡方程

$\Sigma m_c=0$，

$50\sin\alpha\times20-50\cos\alpha\times5-W_1\cos\alpha\times40-W_1\cdot\sin\alpha\times10=0$

可解 $W_1=\dfrac{50(\sin\alpha\times20-\cos\alpha\times5)}{\cos\alpha\times40+\sin\alpha\times10}=10.53(\text{N})$

说明$W=13.46(\text{N})$是物块不滑动也不转动的最小值。

若此题要求物块平衡时的最大重力W，或求物块平衡时W的

范围值，仍应考虑物块上滑以及绕D点顺时针方向翻转的临界状态下的平衡。

题1.5 图1.5（a）所示静定组合梁，A为固定端约束，C为连接铰链，组合梁尺寸和所受荷载如图。重力为$W=6(\mathrm{kN})$的重物E放在倾角为30°的斜面上，并用绳系住，绳绕过定滑轮O后扣在CB梁的D点。已知重物E与斜面之间的静摩擦系数为$\mu=0.3$；其它各接触处的摩擦不计。系统处在平衡中。试求：

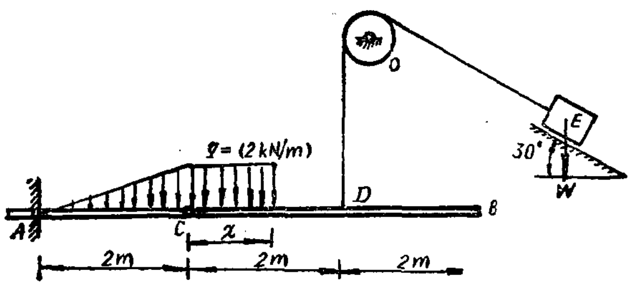

图 1.5（a）

（1）均布荷载q分布长度x的范围；

（2）当$x=2\mathrm{m}$时，固定端的约束反力和斜面上的摩擦力。

解：（1）先以物块E为平衡对象，如图1.5(b)

由平衡条件可求得物块E将要沿斜面上滑时绳子的最大拉力

$$T_{max}=W\sin 30°+\mu W\cos 30°$$
$$=6(0.5+0.3\times 0.866)=4.56(\mathrm{kN})$$

同理可求物块E将沿斜面下滑时，（此时最大静动摩擦力沿斜面指向上方）绳子的最小拉力

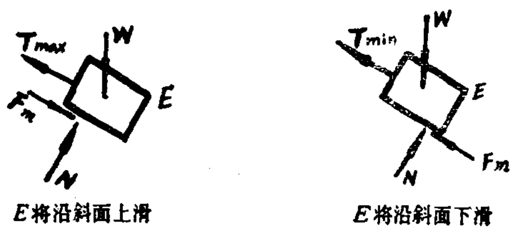

图 1.5（b）

$$T_{min}=W\sin 30°-\mu W\cos 30°$$
$$=6(0.5-0.3\times 0.866)=1.44(\text{kN})$$

再以 CDB 为平衡对象，如图1.5（c）

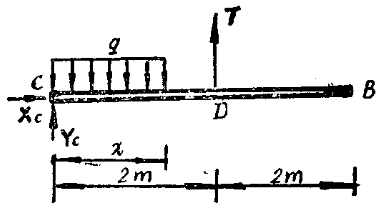

图 1.5（c）

$$\Sigma m_C=0，2T-\frac{1}{2}qx^2=0$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{\frac{4T}{q}}$$

当 $T_{max}=4.56(\text{kN})$ 时，求得 $x_{max}=\sqrt{\frac{4\times 4.56}{2}}\doteq 3.02\text{m}$

当 $T_{min}=1.44(\text{kN})$ 时，求得 $x_{min}=\sqrt{\frac{4\times 1.44}{2}}\doteq 1.70\text{m}$

∴　均布荷载 q 的分布长度 x 为

$$1.70\text{m}\leqslant x\leqslant 3.02\text{m}$$

（2）当 $x=2\text{m}$ 时，由平衡方程 $\Sigma m_c=0$，可解

$$T=\frac{1}{4}qx^2=\frac{1}{4}\times 2\times 2^2=2(\text{kN})$$

考虑 $ACDB$ 平衡；如图1.5(d)

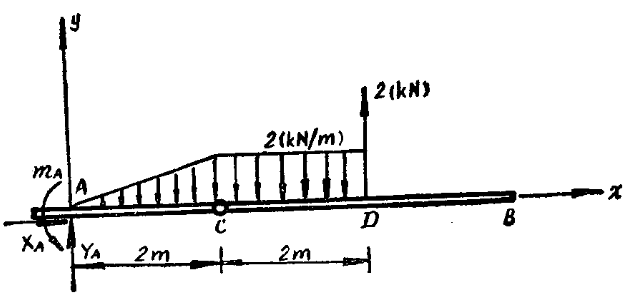

图 1.5（d）

$$\Sigma X=0，X_A=0$$

$$\Sigma Y=0，Y_A-2\times 2\times\frac{1}{2}-2\times 2+2=0$$

∴ $$Y_A = 4(\mathrm{kN})$$

$$\Sigma m_A = 0, \quad m_A - \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{2}{3}\times 2 - 2\times 2\times 3 + 2\times 4 = 0$$

∴ $$m_A = 6.67(\mathrm{kN\cdot m})$$

题1.6 已知图 1.6 所示系统，A块与斜面滑动摩擦系数$f=0.2$，A块重力为$W=1(\mathrm{kN})$，绳与滑轮B重均不计；轮半径$R=10\mathrm{cm}$，轴O的摩擦不计，$\alpha=30°$，求平衡时B滑轮上需加的力偶矩$M=$？

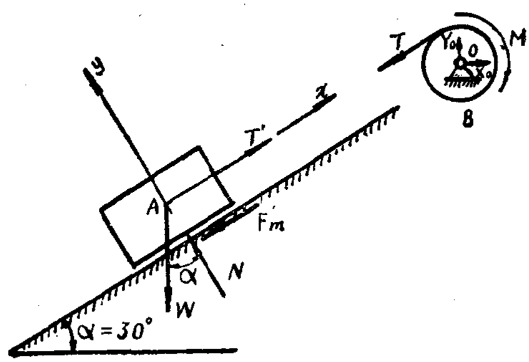

图 1.6

解：先考虑轮子的平衡；应用平衡方程

$$\Sigma m_0 = 0，则绳子拉力\ T = \frac{M}{R}。$$

再考虑物块沿斜面将要上滑时的临界平衡状态，此时最大临界摩擦力F_m沿斜面向下，与此情况对应的绳子拉力T为最大值，B轮上所加力偶矩也为最大值；以物块为平衡对象，选平行于斜面及垂直于斜面Axy坐标轴，应用平衡方程

$$\Sigma X = 0, \quad T' - W\sin\alpha - F_m = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad N - W\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

又 $$F_m = fN \qquad (3)$$

$$T' = T = \frac{M_{max}}{R} \qquad (4)$$

联立上述四式可解$M_{max}=RW(\sin\alpha+f\cos\alpha)$。再考虑物块沿斜面将要下滑时的临界平衡状态，此时最大临界摩擦力F_m沿斜面向上，此时对应的绳子拉力T为最小值，力偶M也为最小值，运用上述方法可解得

$$M_{min}=RW(\sin\alpha-f\cos\alpha)$$

所以平衡时B轮需加的力偶矩值为

$$RW(\sin\alpha-f\cos\alpha)\leqslant M\leqslant RW(\sin\alpha+f\cos\alpha)$$

代入数值$10(0.5-0.2\times0.866)\leqslant M\leqslant 10(0.5+0.2\times0.866)$

$$3.27(\mathrm{kN\cdot m})\leqslant M\leqslant 6.73(\mathrm{kN\cdot m})$$

题1.7 已知三个杆件铰接，尺寸如图1.7(a)所示，尺寸单位为m，$P=2(\mathrm{kN})$，各杆自重均不计，求B销钉对BC杆的作用力。

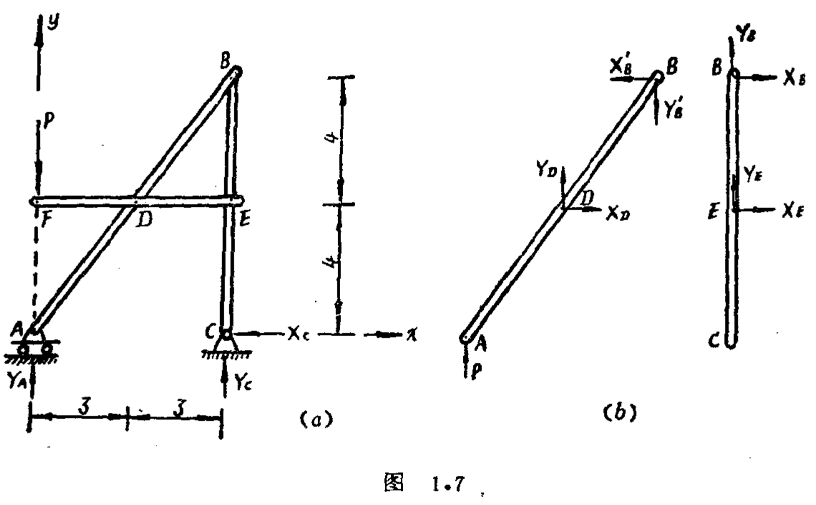

图 1.7

解： 以整体作为平衡对象：如图1.7(a)运用平衡方程

$\Sigma m_A=0$，则$Y_C=0$

$\Sigma x=0$，则$X_C=0$

$\Sigma m_C=0$，则$Y_A=P=2(\mathrm{kN})$

再以BC杆为平衡对象；如图1.7(b)运用平衡方程

$\Sigma m_E=0$，则$X_B=0$

再以AB杆为平衡对象：

$\Sigma m_D = 0$，则$Y'_B = -P = -2(\text{kN})$说明销钉对$BA$杆作用力指向上方。依据作用力与反作用力关系，可得销钉B对BC杆的作用力$Y_B = P = 2(\text{kN})$方向应指向下方（与图1.7(b)原假设方向相反）。

题1.8 结构如图1.8(a)所示。已知$P = 4000(\text{N})$，A为OB中点，$CB \perp OB$，$BC = 100\text{cm}$，$m_1 = 500(\text{N·m})$，$\overline{CD} = \overline{DE} = 120(\text{cm})$，$\overline{FG} = \overline{GH} = 100(\text{cm})$，$m_2 = 3000\sqrt{2}(\text{N·m})$ $q = 50(\text{N/cm})$。求固定端E处的约束反力，设各构件自重不计。

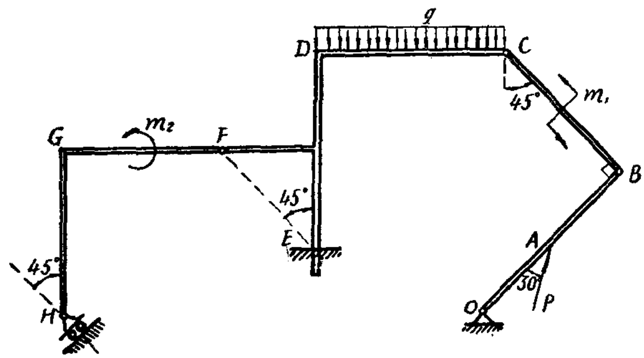

图 1.8 (a)

解：1. 先以HGF为平衡对象，如图1.8（b）由于此部分受力偶m_2作用，所以铰链F处反力与H处反力必定形成力偶，应用平衡条件，可求得R_F

$$\Sigma m_H = 0, \quad m_2 - R_F(HG + GF)\cos 45^\circ = 0$$

代入数值可得 $R_F = \dfrac{3000\sqrt{2}}{2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 3000(\text{N})$

2. 以OB为平衡对象；如图1.8（b）应用平衡方程

$$\Sigma m_0 = 0 \qquad P\sin 30^\circ \times \frac{l}{2} - N_{CB} \times l = 0$$

代入数值可得$N_{CB} = \dfrac{1}{4}P = 1000(\text{N})$

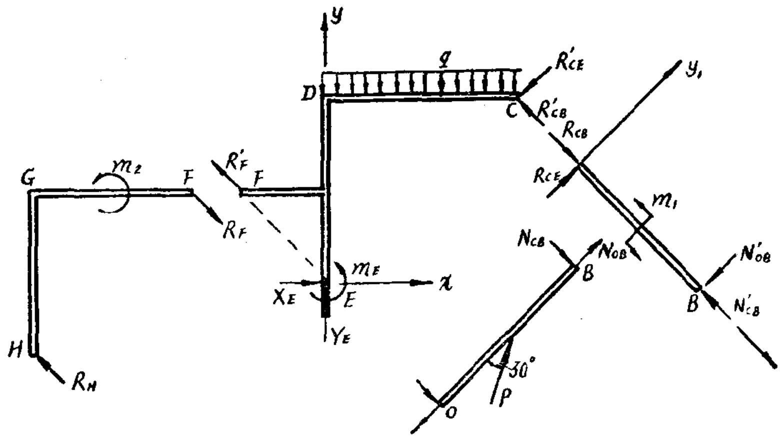

图 1.8 (b)

3. 以CB为平衡对象

$$\Sigma m_c = 0, \quad m_1 - N'_{OB} \times \overline{CB} = 0$$

$$\therefore \quad N'_{OB} = \frac{m_1}{\overline{CB}} = \frac{500}{1} = 500(\mathrm{N})$$

$$\Sigma m_B = 0, \quad R_{CE} = 500(\mathrm{N})$$

$$\Sigma X_1 = 0, \quad R_{CB} = 1000(\mathrm{N})$$

4. 再以$EFDC$为平衡对象

$$\Sigma X = 0, \quad X_E - (R'_{CE} + R'_{CB})\cos 45^\circ - R'_F \cos 45^\circ = 0$$

$$\therefore \quad X_E = 3181.9(\mathrm{N})。$$

$$\Sigma Y = 0, \quad Y_E + (R'_F + R'_{CB} - R'_{CE})\sin 45^\circ - q \times \overline{DC} = 0$$

$$\therefore \quad Y_E = 3525.13(\mathrm{N})$$

$$\Sigma m_E = 0, \quad m_E - q\frac{1}{2}(\overline{CD})^2 + R'_{CB} \times \overline{DE} \times \sqrt{2} = 0$$

$$\therefore m_E = 50 \times 120 \times 0.6 - 1000 \times 1.2 \times \sqrt{2} = 1902.9(\mathrm{N \cdot m})$$

题1.9 平面受力构件的尺寸及角度如图1.9(a)所示。左边丁字形杆ABD的A端插入地下，AD部分受均布荷载作用，单位长度荷载大小为q，B端与斜杆BC铰接，在BC杆中点O安装一滑轮，跨过滑轮用一细绳挂一重物，物体重力为P，绳的

另一端固定于ABD杆的E点。试求：A，C处支反力及反力偶，及B处内力。

解：先选O轮为平衡对象如图1.9（b）；可分析出O轮与BC杆在销钉处的相互作用力。

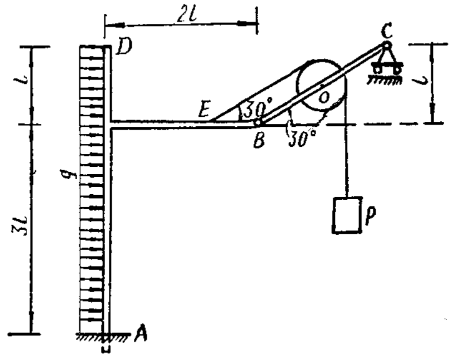

图 1.9（a）

再选BC杆为平衡对象，应用平衡方程

$\Sigma m_B=0$，$-P\times0.5l\times\text{ctg}30^\circ+N_c\times l\times\text{ctg}30^\circ=0$

可解出　　　　　$N_C=0.5P$

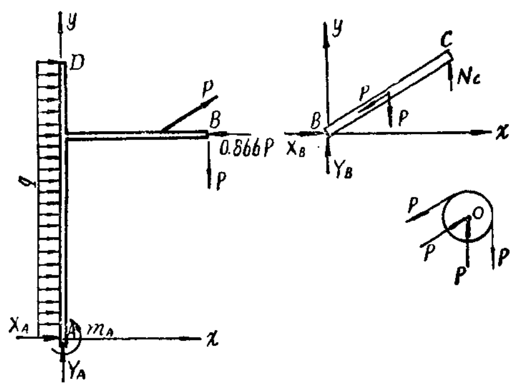

图 1.9（b）

$\Sigma X=0$，得　　$X_B=P\cos30^\circ=0.866P$

$\Sigma Y=0$，得　　$Y_B=P+P\sin30^\circ-0.5P=P$

再选ADB部分为平衡对象，应用平衡方程

$\Sigma X=0$，得　　$X_A=-4ql-P\cos30^\circ+0.866P$

$=-4ql$〈负值说明与图1.9（b）中所画反力指向相反〉

$\Sigma Y=0$，得　　$Y_A=P-P\sin30^\circ=0.5P$

$\Sigma m_A=0$，得 $\quad m_A=4ql\times 2l+P\times 2l-0.866P\times 3l$

$$-P\sin 30^\circ\times\left(2l-\frac{r}{\sin 30^\circ}\right)$$

$$+P\cos 30^\circ\times 3l$$

所以 $\quad m_A=8ql^2+Pl+Pr$

题1.10 如图1.10所示平面构架由AC，BC，DE三部分构成，A处为固定端，B处为可动铰链支座，CD处为铰链连接，G处为光滑接触。已知：$\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{DG}=a$（m），$AC$铅垂，$DE$水平。$DE$杆上作用一力偶，其力偶矩为$M$（N·m），铰链$C$处作用一集中力$P$（N），$AC$杆上作用一线性分布载荷，其最大值为$q_m$（N/m）求$A$、$B$处的反力。

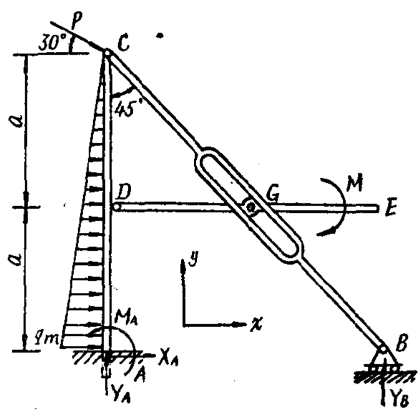

图 1.10（a）

解：以构架整体为平衡对象，应用平衡方程

$\Sigma X=0$，可得 $\quad X_A=-P\cos 30^\circ-\frac{1}{2}q_m\cdot 2a$

$$=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P+q_m\cdot a\right)\ (\mathrm{N})$$

$\Sigma Y=0$，即 $\quad Y_A+Y_B-P\sin 30^\circ=0 \qquad (1)$

$\Sigma m_A=0$，即

$$M_A-P\cos 30^\circ\cdot 2a-\frac{1}{2}q_m\cdot 2a\cdot\frac{2a}{3}-M+Y_B\cdot 2a=0 \qquad (2)$$

再取DE为平衡对象：其受力如图1.10（b）应用平衡方程可得

$$\Sigma m_D=0,\quad N_G\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a-M=0$$