图书在版编目(CIP)数据

高等代数/唐忠明,戴桂生编．—南京：南京大学出版社,2000.1

ISBN 7－305－03479－7

Ⅰ．高...　Ⅱ．①唐...　②戴...　Ⅲ．高等代数-高等学校-教材　Ⅳ．015

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第57963号

丛书名　高等学校小学教育专业教材

书　名　高等代数

主　编　唐忠明　戴桂生

责任编辑　秦　涛

装帧设计　赵　庆

责任校对　任玉清

出版发行　南京大学出版社

(南京汉口路22号南京大学校内　邮编210093)

印刷　南京人民印刷厂

经销　全国各地新华书店

开本　850×1168　1/32　印张6.25　字数160千

2000年3月第1版　2000年3月第1次印刷

印数　1—4000

定价　9.50元

ISBN　7－305－03479－7/O·244

课题组，江苏省教委和南京师范大学承担了其中一系列的子课题研究任务，编写教材纳入了课题组的预期研究成果，这为教材建设提供了理论和实践上的准备。为了着力解决培养本专科程度小学教师学校教材紧缺的燃眉之急，进一步规范和完善教学管理，切实保证教学质量，江苏省教委组织编写了这套高等学校小学教育专业教材。

这套教材以全面贯彻党的教育方针，全面提高教育质量为宗旨，以教育要“面向现代化、面向世界、面向未来”为指针，以《方案》为依据，体现素质教育思想和改革创新精神，体现大学文化程度和为小学教育服务的内在要求，遵循小学教师成长的规律和学科教学特点，加强通识教育，注重文理渗透，强化职业能力培养，合理安排教材结构，科学构建教材体系。在教材编写过程中，充分汲取了省内外试验院校的教学经验，并注意借鉴国际师范教育教学改革的先进成果，在确保科学性的前提下，进一步突出教材内容的时代性、针对性和系统性，坚持师范性和学术性统一，基础性和发展性并重，使教材体系更加符合培养面向 21 世纪本专科学历小学教师的需要。

全套教材按照“整体规划、分步实施、逐步到位”的教材建设目标进行编写。第一批主要编写《方案》中规定的学科专业必修课、教育专业必修课和部分选修课的教材，共计 38 本。

学科专业课教材有：《文学理论》、《中国古代文学》、《中国现当代文学》、《外国文学》、《汉语》、《写作》、《普通逻辑概要》、《儿童文学》、《人文社会科学基础》、《高等代数》、《数学分析》、《空间解析几何》、《概率与统计》、《算术基本理论与数论初步》、《微机辅助教学软件设计》、《普通物理》、《现代科技概论》等 17 本。

教育专业课教材有：《教育基本原理》、《教育技术教程》、《教育技艺原理与训练》、《教育科研方法》、《儿童心理学》、《班队管理》、《小学语文教材概说》、《小学数学教材概说》、《小学语文教学概论》、《小学数学教学概论》等 10 本。

选修课（必选）教材有：《大学语文》、《高等数学》、《中国文化概说》、《教育思想史》、《素质教育论》、《教育现代化》、《家庭社区教育》、《教育伦理学》、《现代教育思潮》、《小学教育个案研究》、《小学教育比较研究》等11本。

本套教材由国内学养深厚的知名专家学者担任主编，一大批具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人集体参与编写，确保了教材质量。

本套教材适用于培养大学本、专科学历小学教师的全日制学校，也可以作为在职小学教师本专科学历进修、继续教育和自学考试的指定教学用书。

培养本专科学历小学教师是一项面向未来的探索，小学教育专业建设尤其是教材建设尚处在起步阶段。由于缺乏经验，加上编写时间仓促，难免存在一些不足之处，各地在具体使用过程中有什么问题或建议，请及时与江苏省教委师范教育处联系，以便修订完善。

高等学校小学教育专业
教材编写委员会
1999年8月

选修课(必选)教材有:《大学语文》、《高等数学》、《中国文化概说》、《教育思想史》、《素质教育论》、《教育现代化》、《家庭社区教育》、《教育伦理学》、《现代教育思潮》、《小学教育个案研究》、《小学教育比较研究》等11本。

本套教材由国内学养深厚的知名专家学者担任主编,一大批具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人集体参与编写,确保了教材质量。

本套教材适用于培养大学本、专科学历小学教师的全日制学校,也可以作为在职小学教师本专科学历进修、继续教育和自学考试的指定教学用书。

培养本专科学历小学教师是一项面向未来的探索,小学教育专业建设尤其是教材建设尚处在起步阶段。由于缺乏经验,加上编写时间仓促,难免存在一些不足之处,各地在具体使用过程中有什么问题或建议,请及时与江苏省教委师范教育处联系,以便修订完善。

高等学校小学教育专业

教材编写委员会

1999年8月

第1章 线性方程组的消元解法

讨论数学问题，必须明确数的范围，也就是说要给定一个数集．范围太狭窄，会引起很多麻烦．怎样的范围比较合适？我们引进数域的概念．矩阵是线性代数的重要工具．我们介绍矩阵和矩阵的初等变换．讨论解线性方程组的计算方法．

§1 数 域

我们过去熟悉的数集有自然数集 **N**，整数集 **Z**，有理数集 **Q**，实数集 **R**，复数集 **C**.

同一个问题，在不同的数集中，会有不同的答案．小学低年级学生说 2 不能除 3，意思是在 **N** 中，$2x=3$ 无解，也就是说 2 除 3 的结果不在 **N** 中．但是，在 **Q** 中，$2x=3$ 有唯一解，也就是说 2 除 3 的结果在 **Q** 中．

在给定的数集中，我们常关心两个数的运算结果是否仍然在这个数集中．任何两个 **Q** 中的数加、减、乘、除（除数不为零）的结果都在 **Q** 中．**R**，**C** 也有这个性质．但是在 **Z** 中，设 $a, b\in \mathbf{Z}$，$\frac{a}{b}$ 不一定在 **Z** 中．我们把 **Q**，**R**，**C** 的共同点抽象出来，得到数域的定义．

定义 1.1 设 F 是复数集 **C** 的一个子集．如果它满足：

1）$0, 1\in F$；

2）任何两个 F 中的数加、减、乘、除（除数不为零）的结果都在 F 中；那么我们称 F 为一个**数域**.

条件 2）也称为对加、减、乘、除封闭．

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 是数域. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ 不是数域.

定理 1.1 任何数域包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明 设 F 是一个数域. 因为 $0, 1\in F$,设 $n\in \mathbf{N}$, $n=1+1+\cdots+1$(n 个 1 相加),故 $n\in F$. $-n=0-n\in F$. 设 $m, n\in \mathbf{Z}$(m 不为零),$\frac{n}{m}\in F$. 故 F 包含 $\mathbf{Q}$. □

以后,我们总是固定一个数域 F,所有的数都取自于 F,除非另加声明.

习题 1.1

1. 证明两个数域之交是一个数域.

2*. 证明:$F=\{a+b\mathrm{i} \mid a, b\in \mathbf{Q}\}$(i 是虚数单位)是一个数域.

§2 线性方程组

2.1 线性方程组

我们已经熟悉二元一次方程组,三元一次方程组. 一般地

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{1.1}$$

称为一个(n 元)线性方程组. 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量. s 是方程的个数. $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, s, j=1, 2, \cdots,n)$称为方程组的系数,其中第一个足标 i 表示它在第 i 个方程,第二个足标 j 表示它是 x_j 的系数. $b_i(i=1, 2, \cdots, s)$称为常数项.

设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 n 个数,如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 代入后,(1.1)中每一个式子都变成恒等式,则称

$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$是(1.1)的一个解.(1.1)的解是一个由 n 个数组成的有序数组.(1.1)的解的集合称为(1.1)的解集合.解集合是空集则称无解.解线性方程组就是找出解集合.两个线性方程组有相同的解集合,就称它们是同解的.

2.2 矩阵的定义

回忆二元一次方程组的加减消元法:

例 1.

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-7 , \\ 2x_1+3x_2=21 . \end{cases}$$

解 第一个方程乘以(-2)加到第二个方程,得

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-7 , \\ \qquad 7x_2=35 , \end{cases}$$

第二个方程乘以 7^{-1},得

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-7 , \\ \qquad x_2=5 , \end{cases}$$

第二个方程乘以 2 加到第一个方程,得

$$\begin{cases} x_1=3 , \\ x_2=5 . \end{cases}$$

书写上述过程时,我们可以略去“x_1”,“x_2”,“$=$”,而保留它们的位置(消失的项写零),写成

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 21 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & 35 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

我们给这种对象一个名字.

定义 1.2 设 s, n 是正整数,由 $s\times n$ 个数排成 s 行(横的),n 列(纵的)的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵**.

矩阵中的数叫矩阵的**元素**. 常用大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 等表示一个矩阵. 有时为了表达矩阵的形状是 $s\times n$ 的,我们写 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$,也可写$(a_{ij})_{s\times n}$,它的第 i 行的第 j 列的元素是 a_{ij}.

2.3 术语

定义 1.3 两个矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$,如果 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数(也称形状相同),$\boldsymbol{A}$ 的每一个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的相应位置的元素都相等,我们就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1×1 矩阵(a)可以粗糙地等同于一个数,在不致引起混淆的时候,也写成 a. $s\times 1$ 矩阵,有时也用小写希腊字母 α, β 等表示.

$n\times n$ 矩阵叫方矩阵. n 称为它的阶. 方矩阵的从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**. 主对角线以下(上)的元素都是零的方矩阵称为上(下)三角的矩阵. 主对角线元素都是 1,其余都是零的 $n\times n$ 矩阵,叫(n 阶)**单位矩阵**,记为 $\boldsymbol{E}_n$(或简记为 $\boldsymbol{E}$)

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{而 } \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

元素都是零的 $s\times n$ 矩阵,称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}_{s\times n}$(或 $\boldsymbol{O}$). $(-a_{ij})_{s\times n}$称为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$的**负矩阵**,记为$-\boldsymbol{A}$.

定义 1.4 把矩阵(1.2)的行列互换所成的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为原矩阵的**转置**. 矩阵 A 的转置记为 A^{T}.

如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是对称的. 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的(它们必是方矩阵).

在 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相邻的某两行之间画一条横线,相邻的某两列之间画一条竖线,$\boldsymbol{A}$ 就分成 4 块,每一块都构成了一个小矩阵,分别是 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$,则 $\boldsymbol{A}$ 表示成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix}.$$

仅在相邻的某两列间画一条竖线,$\boldsymbol{A}$ 表示成$(\boldsymbol{A}_1 \,\vdots\, \boldsymbol{A}_2)$. 在每两列之间画竖线,$\boldsymbol{A}$ 表示成$(\alpha_1 \,\vdots\, \alpha_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \alpha_n)$,(有时也记为$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$),$\alpha_j$ 就是 A 的第 j 列(组成的 $s\times 1$ 矩阵). 这些写法有时比较简明.

(1.2)称作线性方程组(1.1)的系数矩阵,而

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right]$$

称作(1.1)的增广矩阵.

2.4 初等变换

解二元、三元一次方程组时,我们熟悉下述变形.

定义 1.5 线性方程组的下述变形之一,称为线性方程组的**初等变换**.

1) 用一个非零的数乘某一个方程.

2) 将一个方程的倍数加到另一个方程上.

3）交换两个方程的位置.

定理 1.2 线性方程组经初等变换后，得到的线性方程组与原线性方程组同解.

第 6 章中，我们将用矩阵的语言，来证明它.

定理 1.2 不用矩阵的证明 其实只要对作一次初等变换来证明. 以初等变换 2)为例：在线性方程组(1.1)中，把第 j 个方程的 c 倍加到第 i 个上去，得到线性方程组(*). (*)的第 i 个方程是

$$(a_{i1}+ca_{j1})x_1+(a_{i2}+ca_{j2})x_2+\cdots+(a_{in}+ca_{jn})x_n=b_i+cb_j,$$

其余方程不变. 设$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$是(1.1)的一个解，则

$$a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{in}k_n=b_i,$$
$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n=b_j,$$

我们有

$$(a_{i1}+ca_{j1})k_1+(a_{i2}+ca_{j2})k_2+\cdots+(a_{in}+ca_{jn})k_n$$
$$=(a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{in}k_n)+c(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)=b_i+cb_j.$$

因此$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$也是(*)的解. (1.1)也可以由(*)的第 j 个方程的$(-c)$倍加到第 i 个方程得到. □

线性方程组的初等变换，相应于增广矩阵的变换如下.

定义 1.6 矩阵的下列 3 类变换，称为矩阵的行的初等变换.

第一类，用一个非零的数乘某一行；

第二类，把一行的倍数加到另一行上；

第三类，交换两行的位置.

相仿地，可以定义矩阵的列的初等变换. 行与列的初等变换总称初等变换.

用初等变换的语言，定理 1.2 写成：

定理 1.2' 线性方程组的增广矩阵，经过行的初等变换后，相应的线性方程组与原方程组同解.

代数学的一个特点是：不满足于研究个别的具体的问题，而是要研究一般的问题. 对于线性方程组来说，就是要研究一般的

线性方程组(方程的个数 s,未知量的个数 n,都是任意的自然数,系数 a_{ij}和常数项 b_i 都是任意的数.)的解法.

研究一般的问题,常常考虑,第一步,可以进行什么样的变换;第二步,变换后的与原来的有什么联系;第三步,确定尽可能简单的一种或者几种形式;第四步,经过上述变换是否都能变成这些形式;第五步,给出上述形式的问题的答案.

定义 1.5 做的就是上述第一步. 定理 1.2'就是第二步,其联系是解集合不变,就是说是等价变换. 现在来做第三步. 显然,线性方程组中,每一个方程所含的未知量越少越好. 对应的增广矩阵具有下述形式.

形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的矩阵,称为**阶梯形的矩阵**.

形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的矩阵,称为行最简形的矩阵.

行最简形的矩阵的特点是:首先它是一个阶梯形的矩阵,其次在每一个上台阶的地方的元素都是 1,在每一个这种元素的正上方的各元素都是零.

2.5 化行最简形

现在来做第四步.

定理 1.3 任何矩阵都可以经过行的初等变换变成(阶梯形)行最简形.

先看一个例子.

例 7 用行的初等变换将 $\boldsymbol{B}$ 变成行最简形,

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & -6 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

它的第一列的第一行的元素是零,适当交换行使其不为零.

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -6 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -8 \end{bmatrix},$$

它的第一列的第一行元素不是零,第一行的适当的倍加到其余各行,就可以把其余各行的第一列元素变成零.

$$\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

这时,前两列构成的矩阵已经是行最简形了. 再化右边一块,第三列的第二行元素不为零,第二行的适当的倍加到其余各行,可以把第三列的其余元素变成零.

$$\xrightarrow{\substack{r_1+5r_2 \\ r_3+(-2)r_2 \\ r_4+6r_2}}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

现在，前三列构成的矩阵已经是行最简形了. 再继续上述过程，有限步后，可以得到行最简形的矩阵了.

$$\xrightarrow[r_2+(1/5)r_3]{r_1+(-4/5)r_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow{(-1/10)r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

这个例子具有一般性，将其一般化，就可以得定理 1.3.

定理 1.3 的证明：设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 A_1 是行最简形，是形为 $(i-1)\times(j-1)$ 的矩阵，它的下面是零矩阵. 不妨设 A_4 是一个第一列元素不全为零的矩阵，不妨设它的左上角的元素 a_{ij} 不为零（不然，交换适当的两行可以满足这一点）. 将 A 的第 i 行的 $(-a_{hi}/a_{ij})$ 倍加到第 h 行 $(h=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, s)$，$A$ 变成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix},$$

其中 B_1 是行最简形的，形为 $(p-1)\times(q-1)$ 的矩阵，并且 $p\geqslant i+1$, $q\geqslant j+1$. 继续这个过程，有限步后，得到一个行最简形的矩阵.

$\square$

习题 1.2

1. 用行的初等变换，将下列矩阵化成行最简形：

1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，　　2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

§3　线性方程组的消元解法

3.1　行最简形所对应的解

现在，我们来对行最简形的矩阵进行归类，并且给出以每一类为增广矩阵的线性方程组的解集.

第一类：有某一行，它的最右边的一个元素不为零，该行的其余元素都为零. 例如

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

的第三行，以这个矩阵为增广矩阵的线性方程组中，对应于该行(记为第 i 行)的方程是

$$0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=b_i,\quad 其中\ b_i\neq 0,$$

任何$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$，代入后，都不能使之成为恒等式，所以方程组无解.

如果不属于第一类，则可以分成以下两种情况.

第二类：不属于第一类，并且非零行的个数等于未知量的个数. 这时行最简形必形为

$$\begin{bmatrix} E_n & \vdots & \eta \\ O_{p\times n} & \vdots & O_{p\times 1} \end{bmatrix}.$$

例如

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

写出以它为增广矩阵的线性方程组,可以看出有唯一解,并且解已经被明确地表达了. 后 p 个方程都是恒等式,不起作用,可以不写. 例子中对应的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 & & & & = & 3, \\ & x_2 & & & = & -1, \\ & & x_3 & & = & -5, \\ & & & x_4 & = & 2. \end{cases}$$

第三类: 如果不属于第一类,并且非零行的个数 r,小于未知量个数 n.

例如:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

以它为增广矩阵的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad\quad - 3x_4 = 2, \\ \quad\quad\quad\quad x_3 + x_4 = 5. \end{cases} \tag{1.5}$$

将含 x_2, x_4 的项移到等号另一边,得

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad = 2 - 2x_2 + 3x_4, \\ \quad\quad x_3 = 5 \quad\quad - x_4, \end{cases} \tag{1.6}$$

对于 x_2, x_4 的任何一组值,由(1.6)确定了(1.5)的一个解,x_2, x_4 叫自由变量,用字母表示自由变量的取值,在上例中,令 $x_2 = c_1$,

$x_4=c_2$，由(1.6)得方程组有无穷多组解．解是：

$$\begin{cases} x_1=2-2c_1+3c_2, \\ x_2=\qquad c_1, \\ x_3=5\qquad\quad -c_2, \\ x_4=\qquad\qquad c_2; \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 是任意的数}. \end{cases} \tag{1.7}$$

这个式子完整地表达了解集合，有时也称(1.7)为(1.5)的一般解．

一般地，以第三类行最简形矩阵为增广矩阵的线性方程组有无穷多组解，含有 $n-r$ 个自由变量，例如可以选不上台阶处的变量为自由变量．

以上三类，穷尽了行最简形矩阵的所有的可能情况．

3.2 线性方程组的解法

解线性方程组的一般方法．

(1) 写出线性方程组的增广矩阵．

(2) 用行的初等变换将增广矩阵向行最简形化去．

(3) 化的过程中，如果出现第一类所指的情况．则原方程组无解．

(4) 不然的话，必得到一个行最简形的矩阵．如果它属于第二类，则原方程组有唯一解．如果它属于第三类，则原方程组有无穷多解，选好自由变量，然后用如(1.7)的形式表示原方程组的全部解．

这种方法叫**高斯(Gauss)消元法**．

例 8 解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=1, \\ -x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ -x_1+3x_2+2x_3+x_4=1, \\ \qquad 5x_2+5x_3+2x_4=3. \end{cases}$$

解 它的增广矩阵是 C，用行的初等变换，将它向行最简形化去，

$$
C=\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],
$$

故原方程组无解.

例 9 解线性方程组

$$
\begin{cases} \qquad\qquad 6x_3+2x_4=-8, \\ -x_1+3x_2-6x_3-4x_4=6, \\ 2x_1-6x_2+8x_3=0, \\ x_1-3x_2+5x_3+2x_4=-3. \end{cases}
$$

解 它的增广矩阵是

$$
C=\left[\begin{array}{rrrr:r} 0 & 0 & 6 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & -6 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right],
$$

用行的初等变换,将它化成行最简形(参见例 7)得

$$
\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
$$

故原方程组有无穷多组解(有一个自由变量). 以它为增广矩阵的线性方程组是

$$
\begin{cases} x_1-3x_2=4, \\ x_3=-1, \\ x_4=-1. \end{cases}
$$