复旦大学数学系主编

概率论与数理统计

陈开明编

上海科学技术出版社

概率论与数理统计

复旦大学数学系　主编

陈开明　编

上海科学技术出版社

概率论与数理统计
复旦大学数学系　主编
陈开明　编
责任编辑　赵序明
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行　　无锡县人民印刷厂印刷
开本850×1156　1/32　印张4　字数103,000
1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷
印数：1—10,700
ISBN 7-5323-0076-5/O·3
定价：1.30元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革。这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960 年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从 1962 年到 1965 年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验。当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的。

1980 年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲。同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现“统一性与灵活性相结合的原则”。按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革。我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材。

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程。这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端。

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的。其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的。这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据。但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，应当根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑，

使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律。我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学。

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用。在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受。正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系。

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践。一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学。我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版。

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务。由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟。

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢。

复旦大学数学系

1982.4.

编 者 的 话

在多年教学实践并经过多次修改讲义的基础上，我们编写了这套供高等学校中非数学类专业选用的高等数学教材．共包括以下五个分册：

《一元微积分》(陈开明编)；《多元微积分》(魏国华编)；《常微分方程》(尚汉冀编)；《线性代数》(陈开明编)；《概率论与数理统计》(陈开明编)．

根据我们的教学实践，以上各分册依次分别可供60学时、85学时、35学时、40学时、30学时左右教学之用．

随着科学技术的迅速发展及电子计算机的普及使用，在自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域中越来越广泛地应用近代数学和应用数学的成果．与此相适应，高等学校的许多非数学类专业对本专业的学生应具备的数学素质提出新的要求，要求高等学校的数学课程能在不增加或少增加教学时数的前提下，使学生能学到更丰富、更有用的数学知识；学到更强的运用数学工具的能力．我们就是基于这一精神编写这套教材的．

考虑到教材内容现代化的总趋势，这套教材除了在叙述表达方面注意了恰当地运用近代数学的观点和语言外，还注意到了调整教材中各部分内容的比例，协调了各部分内容的深度和广度．总的来说，与传统的高等数学教材相比，微积分部分内容作了合理压缩；而线性代数、常微分方程、概率论与数理统计等部分内容适当加强了．这套教材中还增添了一些与数值方法相联系的内容，以适应推广使用电子计算机的需要．

在本教材的编写风格上，我们力求做到线索清楚、组织科学、叙述准确、详简适当，以便于读者能抓住高等数学的中心内容，提高分析问题和解决问题的能力；有助于读者提高阅读与自学数学

的能力。本教材配备的习题也力求有助于读者通过系统训练而获得较好的分析与解题的能力。

这套教材适合于理工、师范(非数学类专业)、管理、经济等各类专业作教材或参考书用。由于这些专业对数学内容的选择有很大的差异，为了方便于教学的选用，我们将这套教材分为五个分册，各分册之间既有联系又有相对独立性。每分册的编排也尽量采用“分块结构”，尽量设置相对独立的章节。有的独立性较强的或非基本内容的章节和习题，加上了*号，以示醒目。不同专业使用这套教材时，可根据各自情况选用全部或部分；另外，也可供高等学校的一些进修班、培训班选用。

在教材的编写、修改及试教过程中，我们得到复旦大学中许多同事的帮助。其中朱学炎、徐振远、陈惠江、王婉华、郑广平等老师给书稿提出了宝贵的修改意见；陆飞、黄云敏等老师协助做了一些编写工作，在此谨向上述同志表示衷心的感谢。华东师范大学王万中老师给书稿提出了许多具体宝贵的修改建议，在此一并致谢。

编　者

1987年1月

目　录

第一章 概 率

§1 事件与概率

1. 随机现象

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支；数理统计以概率论为工具研究统计资料的收集、整理，并依据随机现象的规律性作出科学的分析与推断。为了说明这一切，我们先通过实例来看什么是随机现象，什么是随机现象的规律性。

例1 考察磁铁的磁性：任取一块磁铁，不论其形状大小如何，必具有磁极N和磁极S。把任取一块磁铁看作一次试验，并将磁铁是否具有两个磁极看作是一次试验结果，那么，随便试验多少次，得到的结果总是相同的：磁铁具有两个磁极。

例2 考察水的状态变化：在标准大气压下将水加热到100℃，这种试验无论做多少次，都会出现沸腾现象。

现在考察另一类型的实例：某个物理量的测量。大家知道，物理量的测量值只是"真值"的某种精确程度下的近似值。为什么会出现这种情况呢？我们把每次测量看作一次试验，并将测量到的值看作试验结果。在同一条件下对同一物理量进行多次测量，不论对测量如何精心设计，也未必会使各次出现相同的测量值(即试验结果)。所以出现这种现象，除了是由于测量仪器的刻度不能过细外，主要的是由于在测量中存在一些无法控制的偶然因素引起了测量值的差异。例如，用天平称量某物时，形成称量误差的原因，可能是天平受温度的微小变化无法控制，也可能是空气中因灰尘降落而无法控制为稳定状态，也可能是称量物或砝码上因极微小的水蒸汽凝结或电荷移动的作用而无法控制，这些无法控制的微小因素我们无法一一枚举。然而，在测量问题中，正是这些无法控制的因素造成了测量值的差异。单个无法控制的因素在指定的一次

测量中影响甚微且带有偶然性，但由于因素众多，这些微小因素的总和，就造成了不可忽视的测量误差。

一般地，对于一些自然现象和社会现象来说，若在一定条件下能重复进行观察或试验，有的是在各次观察或试验中总会得到相同的结果，而有的却不能。为了区别起见，前一种现象称为*决定性现象*；后一种现象称为*随机现象*。对于决定性现象，它在每次试验中会出现什么结果，是能够预言的；随机性现象却不然，在指定一次试验中出现什么结果带有偶然性，是不能预言的，出现什么结果带有*随机性*。磁铁总有磁极N和S是决定性现象；水在标准大气压下加热到100°C 就沸腾，也是决定性现象。而某城市每月乘坐公共车辆的人次；某地区在不变生产条件下各时间周期内的耗电量等等，就属于随机现象。

尽管随机现象在个别试验中出现什么结果带有随机性，但在大量重复试验中却能显示出统计规律性。例如，就人员性别来说，显然男孩出生率与女孩出生率是接近的。但是如果调查的对象只是少数几个家庭，男性与女性的比例并不具有规律，如果调查的对象是一个省市的人，在正常情况下，男性与女性的比例总是接近于一比一的，这就是一种统计规律性。又如，个别气体分子热运动是纷乱无定向的，但作为大量气体分子对器壁不断碰撞的结果，气体的压强是可以确定的，这是大量气体分子运动中的统计规律性的表现。

概率论与数理统计以随机现象的统计规律性为研究对象，其最终目的在于运用随机现象的规律性指导我们的实践。例如，尽管各个地区在各个时期对能源的消耗具有随机性，但对不同地区、不同时期的能源消耗搜集了一定的统计资料后，就可利用随机现象的规律性对能源的需求作出预测。

概率论从数量角度给出随机现象的描述，讨论了随机现象的规律性，为人们认识和利用随机现象的规律性提供了有力的工具。概率论已广泛用于自然科学、现代经济管理、军事运筹方法等一些领域的研究。在军事战略战术中，常常运用概率论这一工具研究

最优策略，制定战术计划。举一个简单的例子来说，假设作战中要用火炮去轰击敌方的某个固定目标。尽管所有火炮在各次射击中的射击水平及射击条件是一样的，但由于无法控制的其他许多偶然因素，每枚发射的炮弹是否命中带有随机性。当摧毁该目标所需命中的炮弹的最低数额按经验为已知时，指挥员应下令发射多少发炮弹为恰当？解决这样的问题，就必须以概率论为工具，根据火炮以往的射击记录，给出炮弹落点分布的数量描述，并按大量试验中的统计规律性，求得摧毁敌方目标所需的最低限度的发射炮弹数。又如，在分子物理学的研究中，正是以概率论为工具建立分子运动模型，推导出有关分子运动速度、分子自由路程和分子能量等有关的分子运动规律。还有，在现代经济管理中的预测方法、统计质量管理方法等也是概率统计的成功的应用。

2. 样本空间与随机事件

对随机现象的观察或试验简称为随机试验。在一次随机试验中，会出现怎样一个试验结果是无法预先知道的，但可能出现什么结果通常是能够明确的。我们将每个可能出现的结果称为试验的一个样本点，一般用 ω 表示。由样本点全体构成的集合，称为样本空间，记为 Ω。

例 1 在一批产品中依次抽两件检查，则可能得到的结果必为以下四种之一：

(1) 两次全为正品，记为 ω_{11}；

(2) 两次全为次品，记为 ω_{00}；

(3) 第一次为正品，第二次为次品，记为 ω_{10}；

(4) 第一次为次品，第二次为正品，记为 ω_{01}。

于是，样本空间 Ω 由四个样本点 ω_{11}，ω_{00}，ω_{10}，ω_{01} 构成，记为 $\Omega=\{\omega_{11}, \omega_{00}, \omega_{10}, \omega_{01}\}$。

例 2 让某射手向某个目标一次次射击，直到命中目标为止，则可能得到的结果必为以下一系列结果之一：

$\omega_n=$ {射击到第 n 次，才首次命中目标} $(n=1, 2, 3, \cdots)$。

于是，样本空间由一系列样本点 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_n，$\cdots$构成，记为 $\Omega=$

$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$.

例 3 对某一物理量进行测量，虽然测量结果无法预言，但对测量值所在的范围能作出估计。譬如说测量值在某一闭区间 $[a, b]$ 中，记 $\omega_x=\{$测量值为 $x\}$，则样本空间 Ω 可记为 $\Omega=\{\omega_x | a\leqslant x\leqslant b\}$.

从以上各例可见，样本空间所含有的样本点可以是有限个，也可以是无限个。在每次随机试验中，这些样本点有一个也只有一个出现。一般地，我们关心的不仅是某一样本点在试验中是否实现，而且还要关心由一部分样本点构成的集合是否实现。如在例 1 中，我们关心是否抽到次品，那么，有次品这件事情，就是由 $\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}$ 这三个样本点构成的集合。在例 2 中，如果我们关心的是能否在不超过 3 次射击的要求下击中目标，那么，所关心的事情是由样本点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 构成的集合。在例 3 中，若所关心的是测量值是否在某值 c 的邻近，则所关心的是某个形如 $\{\omega_x | |x-c|<\varepsilon\}$ 的集合。不过，并不是所有样本空间 Ω 的子集都是我们要考察的对象。我们把要考察的由一些样本点构成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，由一个样本点构成的事件又称**基本事件**。事件一般用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示。如在例 1 中，由 $\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}$ 构成的事件可记为

$$A=\{\text{抽两件查得次品}\}. \tag{1.1}$$

在一次试验中，若事件含有的一个样本点出现，就称这一事件发生。例如，对于(1.1)定义的事件 A，无论是抽得两件次品(ω_{00} 出现)，或第一件抽得正品、第二件抽得次品(ω_{10} 出现)，或第一件抽得次品、第二件抽得正品(ω_{01} 出现)，都称为事件 A 发生。由于事件是由样本空间中一部分样本点组成，所以在一次试验中，这个事件可能发生也可能不发生。

为了讨论方便起见，我们把样本空间 Ω 也作为一个事件。因为每次试验中必然出现 Ω 的某个样本点，Ω 是一个必然要发生的事件，所以称 Ω 为**必然事件**。类似地，我们把不包含任何样本点的空集 ϕ 也作为一个事件，这个事件在每次试验中必然不发生，称

为不可能事件。例如，在例 1 中，把恰好抽到一件次品的事件记为 A，则包含样本点 ω_{10} 和 ω_{01}；若把次品数不超过两件构成的事件记为 B，则 B 包含全部四个样本点，所以 B 就是必然事件 Ω；再把既未抽到正品又未抽到次品构成的事件记为 C，则 C 不包含任何样本点，所以是不可能事件 ϕ。

下面，我们进一步研究事件间的关系及运算。先讨论两个事件 A 和 B 之间的关系。

(1) 若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$，此时 A 包含的样本点也含于 B 中。

(2) 若 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立，则称 A 与 B 等价，记作 $A=B$，此时 A 与 B 包含的样本点相同。

下面引入事件的运算。

(1) 若 A 与 B 是两个事件，则"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"也是一个事件，称它为 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$。$A\cup B$ 包含的样本点由 A 的样本点和 B 的样本点合并而成。

(2) 若 A 与 B 是两个事件，则"事件 A 与事件 B 同时发生"也是一个事件，称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB。$A\cap B$ 包含的样本点是 A 和 B 的公共样本点。

(3) 若两个事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，$AB=\phi$，则称 B 为 A 的逆事件或 A 为 B 的逆事件，逆事件也称对立事件，记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$，此时 $\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生。

(4) 若 A 与 B 是两个事件，则"A 发生但 B 不发生"也是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$，它包含的样本点由包含于 A 但不包含于 B 的样本点组成。

在例 2 中，若记

事件 A——射击次数不超过 10 次；

事件 B——射击次数超过了 3 次。

那么，事件 A 是样本点 ω_1，ω_2，…，ω_{10} 构成的集合；事件 B 是样本点 ω_4，ω_5，…，ω_n，…构成的集合；$\overline{A}$ 是样本点 ω_{11}，ω_{12}，…，ω_n，…构成的集合；事件 $A\cup B$ 包含所有 $\omega_n(n=1, 2, \cdots)$，可记

为 $A\cup B=\Omega$，是必然事件；事件 $A\cap B$ 是由样本点 ω_4，ω_5，…，ω_{10} 构成的集合。

有时形象地用一种称为文氏（Venn）图的图形来示意事件的运算。在图 1.1 中，以正方形示意样本空间 Ω，事件 A 和事件 B 分别用两个圆示意，三个图用阴影线区域依次表示了 $A\cup B$、$A\cap B$ 和 $\overline{A}$。请读者试画 $A-B$ 的文氏图。

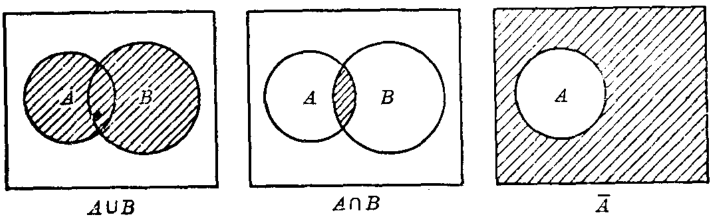

图 1.1

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，就称事件 A 和事件 B 互不相容。例如，A 与 $\overline{A}$ 互不相容。注意，如果 B 与 A 互不相容，B 不一定是 A 的逆事件，因为 B 成为 A 的逆事件的充要条件，按定义应该 $AB=\phi$ 与 $A\cup B=\Omega$ 同时成立。如例 2 中，若令

事件 A——所需射击次数在 8 次到 12 次之间；

事件 B——所需射击次数小于 10 次；

事件 C——所需射击次数小于 8 次；

事件 D——所需射击次数至少 8 次。

那么，A 与 C 是互不相容事件，但 A 不是 C 的逆事件，C 的逆事件是 D。另外，事件 B 可能与事件 A 同时发生，所以事件 A 与事件 B 不是互不相容事件。同样，B 与 C，B 与 D 也不是互不相容事件。

进一步，还可引入无限可列个事件的并和交的运算。设 A_1，A_2，…，A_n，… 是一列事件，那么，“A_1，A_2，…，A_n，… 中至少有一个发生”也构成一个事件，这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n，…的并，记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，它包含的样本点，由 A_1，A_2，…，A_n，… 各

自包含的样本点合并而成。类似地，“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生”这一事件，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的交，记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，它包含的样本点是 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 所包含的公共样本点。

现在研究对随机现象的基本的描述方法：

在确定了包括所有可能的试验结果的样本空间 Ω 之后，进一步要确定选取哪些 Ω 的子集作为所考察的事件。当然，Ω 的子集的选取原则上取决于所研究问题的实际需要，但同时必须考虑到数学处理方面的需要。具体地说，一旦让某些 Ω 的子集确定为事件后，这些事件经有限次或无限可列次运算的结果也应考虑为事件。这样，当 Ω 确定以后，若把所考虑的全体事件记为 $\mathscr{F}$，它必须满足以下三条假设：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F} (n=1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

我们把满足以上三条假设的 $\mathscr{F}$ 称为事件域。可以证明（证明在此略），设我们所考虑的事件的全体构成事件域 $\mathscr{F}$，则 $\mathscr{F}$ 中的事件经有限次或可列无限次事件运算后，得到的仍是事件域 $\mathscr{F}$ 中的事件。这样，作为对随机现象的基本描述，在确定了样本空间 Ω 和事件域 $\mathscr{F}$ 后，余下的问题便是如何度量事件发生可能性的大小。

3. 事件的概率

为了把对随机现象的研究建立在可靠的数学基础上，我们已依次引进了样本空间 Ω 和事件域 $\mathscr{F}$ 的概念，下面的工作，是对事件发生可能性大小的度量给出合理的数学描述。

先对事件发生可能性大小作一直观的考察。设在一个袋中装着 9 只白球和 1 只红球，若从袋中任取一球，我们应怎样度量事件

$$A = \{\text{任取一球，得到红球}\} \tag{1.2}$$

发生的可能性大小呢？由于在袋中任取一球时，可能出现10种结果，这些结果的出现具有相同的可能，A是当10种结果中的一个出现时才发生，所以我们可以用$\frac{1}{10}$或10%来度量A发生的可能性的大小。

当然，并非在任何情况下都可确定出这种度量值。例如，设某种产品在稳定生产中不断地生产出来，若考虑事件B：

$$B=\{\text{任取一件检验，得次品}\},$$

则B发生可能性的大小是反映产品生产质量好坏的一个重要的指标，当然，想要"精确地"确定B发生可能性的大小(即产品的次品率)，是徒劳的。然而，通过作适当数量的产品检验，用科学方法对检验结果作一定的分析，还是可对次品率的可能范围作出具有一定准确度的判断的。

一般地说，对于一个随机事件，如果对它作n次试验，记在n次试验中该事件发生的次数为ν，我们称ν为该事件在这n次试验中发生的频数，$\frac{\nu}{n}$为该事件在这n次试验中发生的频率。当试验次数n很小时，频率$\frac{\nu}{n}$呈现很大的随机性，但当试验次数增多时，由于随机性相互抵消，频率$\frac{\nu}{n}$的波动总体上愈来愈小，出现$\frac{\nu}{n}$向某个定数接近的趋向。例如，有人作了"抛一枚钱币"的随机试验，以A表示"出现正面"这一事件，将这一试验重复5次，50次，500次各十遍，数据如表1.1. 从表中数据可以看出，重复试验次数较少时，事件A在试验中发生的频率有较大的差异，但是随着重复试验的次数的增多，A在试验中发生的频率出现了与0.5接近的稳定性。历史上有人对A作了$n=10000$次重复试验，得到$\nu=4979$，即$\frac{\nu}{n}=0.4979$；又有人对A作了$n=80640$次重复试验，得到$\nu=39699$，即$\frac{\nu}{n}=0.4928$。这里，由于重复试验次数较大，A在试验中发生的频率已很接近于0.5。