高考冲关丛书

江苏科学技术出版社

附2001年高考题型分析

3+X 数学大综合

主编 徐延觉

新大纲
新标准
新思路

大综合
大演练
大冲关

高考冲关丛书

江苏科学技术出版社

3+X 大综合

数学

主编 徐延党

编者 兰松斌 张跃红 李小飞
曾素樵 江卫兵 徐延党

图书在版编目(CIP)数据

3+X 大综合. 数学 / 徐延觉主编；兰松斌等编写.
南京：江苏科学技术出版社,2001.8

(高考冲关丛书)

ISBN 7-5345-3411-9

Ⅰ.3… Ⅱ.①徐…②兰… Ⅲ.数学课—高中—
升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 048537 号

高考冲关丛书

3+X 大综合·数学

主　　编	徐延觉
责任编辑	葛庆文
出版发行	江苏科学技术出版社 (南京市湖南路 47 号,邮编：210009)
经　　销	江苏省新华书店
照　　排	南京展望照排印刷有限公司
印　　刷	丹阳兴华印刷厂
开　　本	787 mm×1092 mm　1/16
印　　张	17.75
字　　数	432 000
版　　次	2001 年 8 月第 1 版
印　　次	2001 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	1—15 000 册
标准书号	ISBN　7—5345—3411—9/G·683
定　　价	20.60 元

前　言

2002年高考，国家将采用新的3+X大综合的考试方式，高考的主要方向已越来越强调综合能力，越来越强调理论联系实际，越来越强调学以致用。为了帮助考生们复习迎考，我们特聘南师附中等名校的多位特级教师，精心编撰了这套《高考冲关丛书》。

“丛书”内容涉及高考新标准中要求的基本点和重点，既有各学科内的小综合、大综合，又有跨学科的大综合。“丛书”着重训练考生们分析、理解、解决问题的能力，通过分析、破解100多道有代表性的例题，使考生们在有限的时间内就能将中学要求掌握的各学科的核心知识、核心思想、典型题型以及主要的解题方法等作一重点回顾，以起到温故知新、使思维能力与综合能力更上一层楼的作用，发挥以一当十、以一当百的功用，达到举一反三、熟练应用的效果。

本书作者均为长期从事高三年级教学、具有丰富迎考复习经验的特级和高级骨干教师，经他们培养出来的学生步入清华、北大等名校的数量之多令人们惊叹不已！“丛书”倾注了他们多年教学研究的心血，他们把成功的经验毫无保留地传播出来，为广大考生提供实实在在的帮助。考生们通过剖析、领悟“丛书”100多道具有代表性的典型例题的精妙解答，认真演练“丛书”提供的综合习题、模拟试卷，必能坦然走进考场，并一举冲关成功！

由于编写时间仓促，错误不当之处恳请读者提出宝贵意见。

编者

2001年7月

在古城南京，有一所校龄近百年的历史名校，该校毕业的学生中产生了38位院士；每年的高考升学率接近100%；名牌大学的录取率在70%以上，这就是全国知名的中学——南京师范大学附属中学（简称南师附中）。常言道：名师出高徒，以南师附中特级教师、高级骨干教师为主精心编撰的《高考冲关丛书》，必能使更多像您这样的学子得到名师的指导，最终助您冲关成功！

目　录

第一单元　函数与方程

一、集　合

● 例题研讨

【例 1】 已知集合 $A \subset \{2,3,7\}$，且 A 中至多有一个奇数，则这样的集合共有(　　).

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

【思路分析】 含有 n 个元素的子集合共有 2^n 个.故问题中是含有 3 个元素集合的真子集且不同时包括 3、7 两个元素的集合个数.故有 $2^3-1-1=6$个. 若采取全部元素列举办法(特别是对集合中元素数目较小时适用)解本题也可.

【解】 方法 1: 共有 $2^3-1-1=6$ 个，

方法 2: 这样的 A 可以是: $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{7\}$, $\{2,3\}$, $\{2,7\}$,共有 6 个.

【例 2】 若集合 $M=\{x \mid 2x^2-5x-3=0\}$, $N=\{x \mid mx=1\}$,且 $N \subset M$, 则实数 m 的取值集合为____.

【思路分析】 $M=\left\{-\frac{1}{2},3\right\}$,要 $N \subset M$, 则 N 中的元素可以是 $-\frac{1}{2}$,也可以是 3,还可以是$\varnothing$.

【解】 若 $m=0$,则 $N=\varnothing$, $N \subset M$.

若 $m \neq 0$,则 $x=\frac{1}{m}$,而 $N \subset M$.所以$\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{m}=3$.故 $m=-2$或 $m=\frac{1}{3}$, 从而 m 取值集合为$\left\{0,-2,\frac{1}{3}\right\}$.

【评注】 对于满足 $N \subset M$,及 $A \cap B=A$, $A \cap B=\varnothing$ 等中的 N 及A,容易遗忘 $N=\varnothing$ 及 $A=\varnothing$ 的情况,应特别加以注意.如已知集合 $A=\{x \mid x^2+(m+2)x+1=0. x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+=\varnothing$,则实数 m 的取值范围是____.答案是$(-4,+\infty)$, 请读者自行思考.

【例 3】 设全集 $I=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M=\left\{(x,y) \middle| \frac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x,y) \mid y \neq x+1\}$,那么$\overline{M \cup N}$ 等于____.

【思路分析】 集合 $M=\{(x,y) \mid y=x+1, x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 2\}$,

$\overline{M}$ 是平面上除$y=x+1$上的点再加上点(2,3). $\overline{N}$是直线 $y=x+1$上所有点的集合,由德摩根律$\overline{M \cup N}=\overline{M} \cap \overline{N}$,得 $\overline{M} \cap \overline{N}=\{(2,3)\}$.

【解】 $M=\{(x,y) \mid y=x+1, x \neq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $N=\{(x,y) \mid y \neq x+1\}$, $\overline{M}$是图中阴影部分及点(2,3), $\overline{N}$是直线 $y=x+1$,由$\overline{M \cup N}=\overline{M} \cap \overline{N}$和图 1-1 可知, $\overline{M} \cap \overline{N}=\{(2,3)\}$.

$\therefore \overline{M} \cap \overline{N}=\{(2,3)\}$.

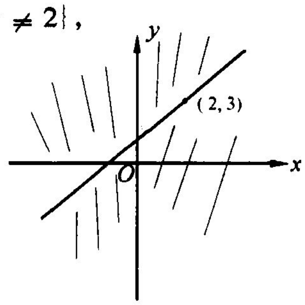

图 1-1

【评注】 集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$,当$\dfrac{y-3}{x-2}=1$化为 $y=x+1$ 时,要注意 $x\neq 2$ 这个限制,否则将得到错误答案.

【例 4】 在 1~200 这 200 个自然数中,求能被 5 整除而不能被 7 整除的所有数的和.

【思路分析】 设 $A=\{$从 1~200 的自然数中能被 5 整除的数$\}$,$B=\{$从 1~200 的自然数中能被 7 整除的数$\}$,则问题转化为:$A\cap\overline{B}$ 的所有元素的和.这可借助韦恩图解决.

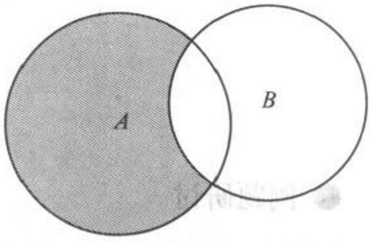

图 1-2

【解】 设集合 $A=\{$从 1~200 的自然数中能被 5 整除的数$\}$,集合 $B=\{$从 1~200 的自然数中能被 7 整除的数$\}$.由图 1-2 可知:$A\cap\overline{B}$ 的各元素之和 = A 的元素之和减去 $A\cap B$ 的元素之和所得的差.

A 中的元素为 5,10,…,200.构成以 5 为首项、200 为末项的等差数列,其和为 $S_1=\dfrac{(5+200)}{2}\times 40=4\,100$,而 $A\cap B$ 中的元素为:35,70,105,140,175.其和 $S_2=\dfrac{(35+175)}{2}\times 5=525$.故所求的和为 $S=S_1-S_2=4\,100-525=3\,575$.

【拓展】 ① 由排列、组合知识,n 个元素组成的集合的子集共有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个;

② $A\cap B=\varnothing$ 或 $A\cap B=A(B\neq\varnothing)$,需注意 A 为空集的情形.

● 能力测试

(一) 选择题

1. 设全集为 $\mathbf{R}$,若集合 $M=\{x\mid x\geqslant 1\}$,$N=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$,则$\overline{M}\cup\overline{N}$是(　　).

A. $\{x\mid x\geqslant 0\}$　　B. $\{x\mid x<1$ 或 $x\geqslant 5\}$

C. $\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x>5\}$　　D. $\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$

2. 已知集合 $M=\{x\mid x-a=0\}$,$N=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $M\cap N=M$,则实数 a 等于(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 1 或 -1 或 0

3. 已知 $M=\{x\mid x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,$N=\{y\mid y=\sin x,x\in\mathbf{R}\}$,则(　　).

A. $M\subset M\cup N$　　B. $M\subset M\cap N$　　C. $M\subseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

4. 设 I 为全集,P、Q 是非空集合,且 $P\subset Q\subset I$,则下列结论中不正确的是(　　).

A. $\overline{P}\cup Q=I$　　B. $\overline{P}\cap Q=Q$　　C. $P\cup Q=Q$　　D. $P\cap\overline{Q}=\varnothing$

5. 满足 $M\cup\{a,b\}=\{a,b,c,d\}$ 的集合 M 的个数共有(　　).

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

6. 设全集 $I=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid f(x)<0\}$,$B=\{x\mid g(x)>0\}$,且 $\varnothing\subset A\subset B\subset\mathbf{R}$,则集合 $M=\{x\mid f(x)\geqslant 0$ 且 $g(x)\leqslant 0\}$ 等于(　　).

A. $\overline{A}$　　B. $\overline{B}$　　C. $\varnothing$　　D. $\overline{A}\cup\overline{B}$

7. 已知全集 $I=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid |x-a|<2\}$,$B=\{x\mid |x-1|\geqslant 3\}$,且 $A\cap B=\varnothing$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $[0,2]$　　B. $(-2,2)$　　C. $(0,2]$　　D. $(0,2)$

8. 已知集合 $M=\{x \mid x=a^2-3a+2, a\in \mathbf{R}\}$，$N=\{x \mid x=b^2-b, b\in\mathbf{R}\}$，那么 M、N 的关系应该是(　　).

A. $M\subset N$　　B. $M\supset N$　　C. $M=N$　　D. 不确定

(二) 填空题

9. 集合 $A=\{x \mid x^2-3x-10\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid 2x^2-x-6>0, x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 的子集的个数为________.

10. 若 $P=\{x \mid y^2=-2(x-3)\}$，$Q=\{y \mid y=x^2-1\}$，则 $P\cap Q=$ ________.

11. 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. $\overline{A}\cap B=\{3,7\}$，$A\cap\overline{B}=\{2,8\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,4,5,6,7,8\}$，则 $\overline{A}\cap\overline{B}=$ ________.

12. 已知集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的值为________.

(三) 解答题

13. 设集合 $A=\{x \mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x \mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，$A\cap B=B$，求实数 m 的范围.

14. 设集合 $A_n=\{x \mid 2^n<x<2^{n+1}$，且 $x=7m+1, m,n\in\mathbf{N}\}$，求 A_6 中各元素的和.

15. 已知集合 $A=\{(x,y) \mid y=-x^2+mx-1\}$，$B=\{(x,y) \mid x+y=3, 0\leqslant x\leqslant 3\}$，若 $A\cap B$ 是单元素集，求实数 m 的取值范围.

二、映射与函数

● 例题研讨

【例 1】 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$，映射 $f: A\to B$ 把集合 A 中的元素 n，映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，像 20 的原象是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【思路分析】 问题即为求 $2^n+n=20$ 的自然数解. 解方程是相当困难的. 针对选择题特点，可进行数值代入验证.

【解】 将 2,3,4 分别代入 $2^n+n=20$ 中，发现 $n=4$ 符合，故选 C.

【例 2】 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 $B=\{5,6,7\}$，那么从 A 到 B 的映射的个数为________________；又从 A 到 B 的映射满足 B 中每个元素都有原象，这样的映射个数为________________.

【思路分析】 从 A 到 B 的映射要求 A 中的每个元素惟一对应 B 中的一个元素，这样(依乘法原理)共有 $3\times3\times3\times3=81$ 个. 第二个问题，若满足条件，则集合 A 中必有两个元素对应于集合 B 中的一个元素，集合 A 中余下的两个元素与集合 B 中余下的两个元素分别对应. 这样映射共有：$C_4^2\cdot C_3^1\cdot P_2^2=36$ 个或 $C_4^2\cdot P_3^3=36$ 个.

解答从略.

【例 3】 若函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{Z}$，且满足：

$$f(x)=\begin{cases}x-8 & x\geqslant 2\,005,\\ f[f(x+12)] & x<2\,005,\end{cases}\quad 求\ f(2\,002).$$

【思路分析】 因 $2\,002<2\,005$，故 $f(2\,002)=f[f(2\,002+12)]=f[f(2\,014)]$，而

$2014>2005$,故 $f(2014)=2014-8=2006$,由此,即可算出 $f(2002)$的值.

【解】 $f(2002)=f[f(2002+12)]=f[f(2014)]=f(2014-8)$

$=f(2006)=2006-8=1998.$

【例 4】 函数 $f(x)$对于 $x>0$ 有意义,且满足条件: $f(2)=1, f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(x)$ 在$(0,+\infty)$为增函数.

(1) 证明 $f(1)=0$;

(2) 求 $f(4)$ 的值;

(3) 如果 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$, 求 x 的取值范围.

【思路分析】 (1) 因 $x>0$时,原式均成立,故对 x, y 赋值即可求出$f(1)$. $(x=1, y=1)$

(2) $f(4)=f(2\times 2)=f(2)+f(2)$ 也可求出.

(3) 需考虑定义域 $x>0, x-3>0$, 再利用已知等式及(2)的结论(把 2 写成 $f(4)$),由 $f(x)$单调递增即可求出 x 的范围.

【解】 (1) 证明: $\because f(xy)=f(x)+f(y)$,对 $x>0, y>0$均成立,故令 $x=1, y=1$,得 $f(1\times 1)=f(1)+f(1)$,即 $f(1)=2f(1)$. $\therefore f(1)=0$.

(2) $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=1+1=2$.

(3) $\begin{cases}x>0,\\ x-3>0.\end{cases}\Rightarrow x>3.$ ①

又 $f(x)+f(x-3)=f(x(x-3))\leqslant 2=f(4)$,

由 $f(x)$ 的递增性,可知

$x(x-3)\leqslant 4, \therefore -1\leqslant x\leqslant 4.$ ②

由 ①② 可知 $3<x\leqslant 4$.

【拓展】 (1) 判断两个函数(图像)相同的方法是: 定义域相同,表达式一致(或可化为一致).

(2) 分段函数,应注意定义域 x 的取值,看运用哪一段表示式,求分段函数最值是分别求出每一段中的最值(或范围),再取最大或最小的,从而得出分段函数最值.

● 能力测试

(一) 选择题

1. 设 $M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}, N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$, 给出下列 4 个图形(见图 1-3),其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有( ).

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

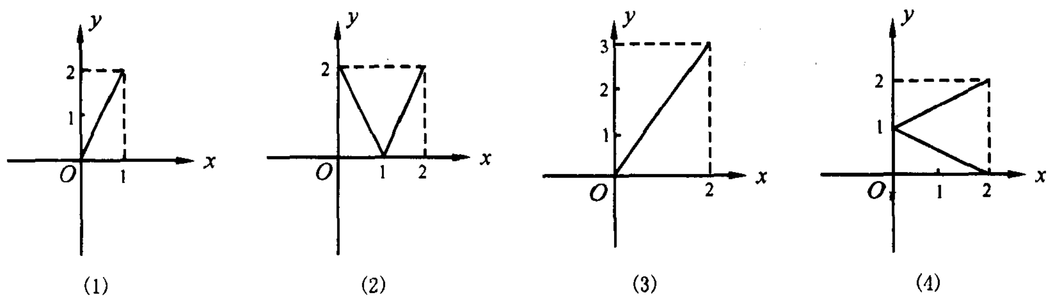

图 1-3

2. 下列各组函数表示同一个函数的组是(　　).

A. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$　　B. $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$

C. $y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$　　D. $y=x$ 与 $y=\log_a a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

3. 如果 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$,且当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x^2+3$,则当 $x\in[2n-1,2n+1)$ $(n\in\mathbf{Z})$ 时,函数的表达式是(　　).

A. $x^2-4nx+4n^2+3$　　B. $x^2+4nx+4n^2+3$

C. $x^2-4nx+4n^2+1$　　D. $x^2+4nx+4n^2+1$

4. 若函数 $f(x)=(x+a)^3$,对任意的 $t\in\mathbf{R}$,总有:$f(1+t)=-f(1-t)$,则 $f(2)+f(-2)$ 的值是(　　).

A. 0　　B. 26　　C. -26　　D. 28

5. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{2,3,4,5,6\}$,映射 f: $M\rightarrow N$,使对任意的 $x\in M$,都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数,这样的映射 f 的个数是(　　).

A. 22　　B. 15　　C. 50　　D. 27

6. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$,集合 $B=\{-1,-2\}$,设映射 f: $A\rightarrow B$,如果集合 B 中的元素都是 A 中元素在 f 下的象,那么这样的映射 f 有(　　).

A. 16个　　B. 14个　　C. 12个　　D. 8个

7. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+b^2-b+1$ $(a,b\in\mathbf{R})$ 对任意实数 x 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立,若当 $x\in[-1,1]$ 时,$f(x)>0$ 恒成立,则 b 的取值范围是(　　).

A. $-1<b<0$　　B. $b>2$　　C. $b<-1$ 或 $b>2$　　D. $b<-1$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (x\leqslant 0),\\ \sqrt{x} & (x>0),\end{cases}$ 已知 $f(a)>1$,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

(二) 填空题

9. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (x\leqslant 0),\\ x+3 & (0<x\leqslant 1),\\ -x+5 & (x>1)\end{cases}$ 的最大值是________.

10. 若 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,则满足 $F(-2-x)=M-F(x)$ 的 M 的值为________.

11. 设函数 $f(x)$ 定义在整数集上,且 $f(x)=\begin{cases}x-3 & (x\geqslant 1\,000),\\ f[f(x+5)] & (x<1\,000),\end{cases}$ 则 $f(999)=$________.

12. 设 $f(x)$ 为偶函数,对于任意 $x\in\mathbf{R}^+$ 都有 $f(2+x)=-2f(2-x)$.已知 $f(-1)=4$,那么 $f(-3)=$________.

(三) 解答题

13. (1) 已知 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ $(x,y\in\mathbf{R})$,且 $f(1)=2$,求 $\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\cdots+\frac{f(2\,002)}{f(2\,001)}$.

(2) 已知 $f(xy)=f(x)+f(y)\ (x,y\in\mathbf{R})$，求证：$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,001}{2\,002}\right)=f\left(\frac{1}{2\,002}\right)$.

14. 某商品在近 30 天内每件的销售价格 P(元)与时间 t(天)的函数关系是

$$P=\begin{cases}t+20 & (0<t<25,\ t\in\mathbf{N}),\\ -t+100 & (25\leqslant t\leqslant 30,\ t\in\mathbf{N}).\end{cases}$$

该商品的日销售量 Q(件) 与时间 t(天) 的函数关系是 $Q=-t+40\ (0<t\leqslant 30, t\in\mathbf{N})$，求这种商品的日销售金额的最大值，并指出日销售金额最大的一天是 30 天中的第几天.

15. 已知 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$的减函数，且满足

① $f(x)\geqslant\frac{1}{x^2}$； ② $f^2(x)f\left(f(x)-\frac{1}{x^2}\right)=f^3(1)$.

(1) 求 $f(1)$；

(2) 给出一个满足题设条件的函数 $f(x)$，并加以证明.

三、函数的定义域、值域与最值

● 例题研讨

【例 1】 已知函数 $f(x)$的定义域为$(0,2]$，则 $f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域为________.

【思路分析】 因 $f(x)$定义域为$(0,2]$，故 $\sqrt{x}-2\in(0,2]$，解不等式即可.

【解】 $\because f(x)$定义域为$(0,2]$，$\therefore f(\sqrt{x}-2)$ 定义域中的 x 满足：$0<\sqrt{x}-2\leqslant 2$，即 $4<x\leqslant 16$.

$\therefore f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域为$(4,16]$.

【例 2】 (1) 已知函数 $f(x)=\lg(mx^2-6mx+m+8)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围；

(2) 对上述函数，若它的值域为 $\mathbf{R}$，求 m 的范围.

【思路分析】 (1) 即 $mx^2-6mx+m+8>0$ 恒成立，求 m 的范围；

(2) 由图像($y=mx^2-6mx+m+8$) 知，$f(x)$值域为一切实数，则 y 必与 x 轴相交(切).

【解】 (1) $f(x)$定义域为一切实数，则 $mx^2-6mx+m+8>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 均成立. 显然 $m=0$ 时，$8>0$ 恒成立，又 $m\neq 0$ 时，则$\begin{cases}m>0,\\ \Delta=36m^2-4m(m+8)<0.\end{cases}$得$0<m<1$. 故满足条件的 m 的范围是$m\in[0,1)$.

(2) 使 $f(x)$值域为 $\mathbf{R}$，则 $mx^2-6mx+m+8=0$ 有实数解，显然 $m\neq 0$，故 $\Delta=36m^2-4m(m+8)\geqslant 0$，$\therefore m\geqslant 1$ 或 $m\leqslant 0$，又 $m\neq 0$，$\therefore m\geqslant 1$ 或 $m<0$.

【评注】 对(1)，易漏 $m=0$ 的讨论，对(2) 会误认为 $\Delta<0$.

【例 3】 求函数 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$ 的值域.

【思路分析】 将 y 变形为一个常数加上$\frac{k}{2x-3}$的形式，观察可得值域.

【解】 $y=\frac{3x+2}{2x-3}=\frac{\frac{3}{2}(2x-3)+\frac{13}{2}}{2x-3}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{13}{2}}{2x-3}$,

$\because \frac{\frac{13}{2}}{2x-3}$ 值域是不为 0 的一切实数，$\therefore\ y\neq\frac{3}{2}$. 故 y 的值域为 $y\neq\frac{3}{2}$ 的一切实数.

【评注】 形如 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的值域问题都可采用此种办法即“变形”加“观察”.

【例 4】 求函数 $y=\frac{x-1}{x^2-2x+3}$ 的值域.

【思路分析】 这是形如 $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+d}$ 型的函数值域问题. 若将其整理成 x 的一元二次方程，则可通过 $x\in\mathbf{R}$ 得不等式 $\Delta\geqslant0$，求出 y 的范围.

【解】 由 $y=\frac{x-1}{x^2-2x+3}$，得

$$yx^2-(2y+1)x+(3y+1)=0.\qquad ⊛$$

若 $y=0$，则 $x=1$，$\therefore\ y=0\in$ 值域.

若 $y\neq0$，则⊛ 是关于 x 的一元二次方程，从而 $\Delta\geqslant0$ 即 $(2y+1)^2-4y(3y+1)\geqslant0$.

解得 $-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y\neq0$.

综上，$y\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

【评注】 形如 $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+d}$ 函数（分子分母至少有一个是二次，且分子分母不能约去一个一次式），均可采用例 4 的方法求值域，即判别式法求值域.

【例 5】 求 $y=|x+1|+|x+5|$ 的值域.

【思路分析】 去绝对值符号后，当然可求，若注意此题特点，它的几何意义是 x 轴上一点到 -1 与 -5 的距离之和，从而可利用几何意义解决.

【解】 $|x+1|+|x+5|$ 意即 x 轴上一点到 -1 与 -5 的距离之和，显然，该距离 $\geqslant|-1-(-5)|=4$，$\therefore\ y\geqslant4$，故值域为 $[4,+\infty)$.

【评注】 带有绝对值符号的值域问题，一般情况下考虑去绝对值符号后转化为求分段函数的值域，特殊情况可用几何方法解决.

【例 6】 求函数 $y=2x+4\sqrt{1-x}$ 的值域.

【思路分析】 可将原式 $2x$ 移至等式左边后，再两边平方，用“Δ 法”求. 但这样，值域范围有可能扩大. 若令 $t=\sqrt{1-x}\geqslant0$，则 $x=1-t^2$. 从而将原式转化为在限制条件下（$t\geqslant0$）二次函数的值域问题.

【解】 令 $t=\sqrt{1-x}\geqslant0$，则 $x=1-t^2$. 故原式为

$$y=2(1-t^2)+4t=-2(t-1)^2+4\leqslant4,$$

即　值域为 $(-\infty,4]$.

【评注】 如 $y=mx+\sqrt{n-k^2x}$ 的值域问题，均可令 $t=\sqrt{n-k^2x}\geqslant0$，将问题转化为在 $t\geqslant0$ 下求二次函数的值域.

【例 7】 已知 $4x^2-24x+y^2-4y+24=0$，求 $3x-4y$ 的最值.

【思路分析】 这是一个在二次曲线限制下的代数式变化范围问题.限制条件的几何意义通常是圆、椭圆、双曲线.可采用三角代换(或参数方程)求代数式的范围.

【解】 条件可化为$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$.

令 $\begin{cases}x=3+2\cos\theta,\\ y=2+4\sin\theta,\end{cases}$

则 $3x-4y=1+6\cos\theta-16\sin\theta$

$=1+\sqrt{6^2+16^2}\cos(\theta+\varphi)$,

$\therefore\ 1-2\sqrt{73}\leqslant 3x-4y\leqslant 1+2\sqrt{73}$.

即 y的最小值为$1-2\sqrt{73}$,最大值为$1+2\sqrt{73}$.

【例8】 求函数$f(x)=x(5-2x)^2\ \left(0<x<\frac{5}{2}\right)$的最大值.

【思路分析】 $\because x(5-2x)^2=x\cdot(5-2x)(5-2x)$,

而 $a,b,c>0$有$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

但$x+(5-2x)+(5-2x)=10-3x$不为定值,故不能直接运用基本不等式求最值.考虑$5-2x+5-2x=10-4x$,故只需将x变成$\frac{1}{4}\cdot 4x$,则$4x+(5-2x)+(5-2x)=10$为定值,再运用基本不等式求最值.

【解】 $\because x(5-2x)^2=\frac{1}{4}(4x)(5-2x)(5-2x)$

$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4x+5-2x+5-2x}{3}\right)^3$

$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^3=\frac{250}{27}$, $\left(\because 0<x<\frac{5}{2},\therefore 5-2x>0\right)$

等号当且仅当 $4x=5-2x$,即 $x=\frac{5}{6}$时取.

$\therefore f(x)$最大值为$\frac{250}{27}$.

【评注】 运用基本不等式求最值时,当和不为定值时,要想办法"凑"成定值,再运用基本不等式解决.

【例9】 若$x>1$,则函数$f(x)=4^x+\log_3 x+x^2$的值域是________.

【思路分析】 注意到$4^x,\log_3 x,x^2$均为$(1,+\infty)$上的单调增函数,问题即获解决.

【解】 $\because 4^x$、$\log_3 x$、x^2在$(1,+\infty)$上单调递增,故它们的和也在$(1,+\infty)$上单调递增.

$\because f(x)>f(1)$,即$f(x)>4+\log_3 1+1^2=5$,$\therefore f(x)$值域为$(5,+\infty)$.

【评注】 求函数值域时,有时也要通过观察式子的特点(如单调性等),从而快捷地得到答案.

【例10】 甲、乙两地相距S km,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过c km/h.已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度v(km/h)的平方成正比,且比例系数为b;固定部分为a元.

(1) 把全程运输成本y(元)表示为速度v(km/h)的函数,并指出这个函数的定义域;

(2) 为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

【思路分析】 易知 $y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}=S\left(\frac{a}{v}+bv\right)$ $(0<v\leqslant c)$. 问题是求 y 的最小值,这就是解例 8 的方法.

【解】 (1) 依题意,汽车从甲地匀速地驶到乙地所用时间为$\frac{S}{v}$,全程运输成本为

$$y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}=S\left(\frac{a}{v}+bv\right).$$

故所求函数及其定义域为: $y=S\left(\frac{a}{v}+bv\right),v\in(0,c]$.

(2) $\because$ S,a,b,v 都是正数,故有 $S\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2S\sqrt{ab}$. 当且仅当$\frac{a}{v}=bv$,

即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时,上式中取等号. 若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$,则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时,全程运输成本 y 最小.

若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,则 $y=S\left(\frac{a}{v}+bv\right)=S\left[\left(\sqrt{\frac{a}{v}}-\sqrt{bv}\right)^2+2\sqrt{ab}\right]$.

而 $v\leqslant c<\sqrt{\frac{a}{b}}$,故$\sqrt{\frac{a}{v}}>\sqrt{bv}$,即$\sqrt{\frac{a}{v}}-\sqrt{bv}>0$.

又 $\sqrt{\frac{a}{v}}-\sqrt{bv}$ 为 v 的减函数,$\therefore$ y 为 v 的减函数,$\therefore$ $v=c$ 时,y 最小.

综上可知,为使全程运输成本 y 最小,当$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时,行驶速度为 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$;

当$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时,行驶速度为 $v=c$.

● 能力测试

(一) 选择题

1. 函数 $f(x)=4^x-3\cdot 2^x+3$ 的值域为$[1,7]$,则 $f(x)$的定义域为(　　).

A. $(0,1)\cup[2,4]$　　B. $(-1,1)\cup[2,4]$

C. $(-\infty,0]\cup[1,2]$　　D. $[2,4]$

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 A,函数 $y=f[f(x)]$ 的定义域为 B,则(　　).

A. $A\cup B=B$　　B. $A\subset B$　　C. $A=B$　　D. $A\cap B=B$

3. 若函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$ 的定义域和值域都是区间$[2,2b]$,则 b 的值是(　　).

A. $b=1$ 或 $b=2$　　B. $b=2$　　C. $b\in(1,2)$　　D. $b\in[1,2)$

4. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-4}}{ax^2+4ax+3}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　D. $\left[0,\frac{3}{4}\right)$

5. 已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2kx+k)$ 的值域是 $\mathbf{R}$,则 k 的取值范围是(　　).

A. $0<k<1$　　B. $0\leqslant k<1$

C. $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 1$　　D. $k=0$ 或 $k\geqslant 1$

6. 函数 $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ $(x>-1)$ 的图像的最低点的坐标是(　　).