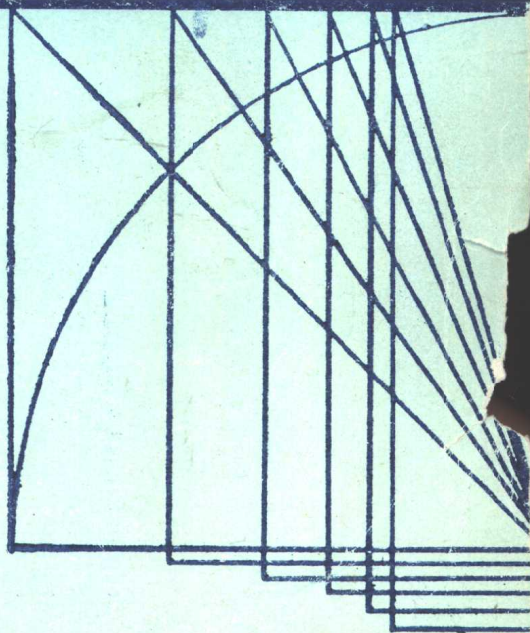


习题集

高等数学导论

GAODENG
SHUXUE DAOLUN

中国科学技术大学 编
高等数学教研室



中国科学技术大学出版社

高等数学导论习题集

中国科学技术大学高等数学教研室 编

责任编辑：刘卫东 封面设计：盛琴琴

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路 96 号)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32 印张：9.875 字数：254千

1988 年 9 月第 1 版 1988 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7-312-00043-6/O·16

书号：13474·16 定价：2.15元

内 容 提 要

本书是与《高等数学导论》(下简称“导论”)配套使用的。本书与“导论”均是中国科学技术大学三十年来高等数学教学实践的结晶,深受广大同学的喜爱。本书的章节编排与“导论”完全一致,选题题目从兼重计算技巧和推理论证出发,力图使同学在巩固所学基本理论的同时,锻炼提高计算能力和逻辑推理能力。此外,在概念多的章节中,本书编有复习思考题,帮助同学加深对其的理解和掌握。

本书可作理工院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或数学参考书,也可供具有一定数学基础的读者自学。

目 录

第一章 函数的极限	(1)
第一节 数列极限	(1)
第二节 函数极限	(11)
第三节 函数的连续性	(20)
第二章 单变量函数的微分学	(28)
第一节 函数的微商	(28)
第二节 函数的微分	(37)
第三节 高阶微商与高阶微分	(40)
第四节 微分学的基本定理	(41)
第五节 泰勒公式	(45)
第六节 未定式的极限	(47)
第七节 函数的增减性与极值	(49)
第八节 函数图形的描绘	(53)
第九节 平面曲线的曲率	(53)
第三章 单变量函数的积分学	(58)
第一节 不定积分	(58)
第二节 定积分的概念与可积函数	(66)
第三节 定积分的性质及其计算	(68)
第四节 定积分的近似计算	(68)
第五节 定积分的应用	(77)
第六节 广义积分	(81)
第四章 可积微分方程	(83)
第一节 微分方程的基本概念	(83)
第二节 一阶微分方程	(83)

第三节	可降阶的二阶微分方程	(87)
第五章	空间解析几何	(89)
第一节	空间直角坐标系	(89)
第二节	向量代数	(90)
第三节	平面与直线	(93)
第四节	常见曲面	(101)
第五节	空间的坐标变换	(103)
第六章	多变量函数的微分学	(105)
第一节	多变量函数的极限与连续	(105)
第二节	多变量函数的微商与微分	(109)
第三节	复合函数的微分法	(113)
第四节	隐函数的微分法	(118)
第五节	多变量函数的泰勒公式与极值	(122)
第六节	空间曲线与曲面	(125)
第七章	多变量函数的积分学	(128)
第一节	二重积分	(128)
第二节	三重积分	(134)
第三节	重积分的应用	(140)
第四节	第一型曲线积分与曲面积分	(143)
第八章	场	(147)
第一节	数量场的方向微商与梯度	(147)
第二节	向量场的通量与散度	(148)
第三节	向量场的环量与旋度	(153)
第四节	保守场与无源场	(158)
第五节	哈密顿算符及运算公式	(162)
第六节	外微分形式	(163)
第七节	梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系下的 表达式	(164)
第九章	无穷级数	(165)

第一节	数项级数	(165)
第二节	函数项级数	(169)
第三节	幂级数与泰勒展开式	(172)
第四节	级数的应用	(174)
第十章	含参变量的积分	(176)
第一节	广义积分收敛性的判别	(176)
第二节	含参变量的常义积分	(178)
第三节	含参变量的广义积分	(179)
第四节	欧拉积分	(183)
第十一章	富里叶分析	(185)
第一节	周期函数的富里叶级数	(185)
第二节	广义富里叶级数	(189)
第三节	富里叶变换	(189)
第十二章	线性微分方程	(191)
第一节	微分方程解的存在唯一性定理	(191)
第二节	二阶线性微分方程的一般理论	(191)
第三节	二阶常系数线性微分方程	(193)
第四节	质点的振动	(193)
第五节	n 阶线性微分方程	(195)
第六节	线性微分方程组	(195)
答	案	(197)
附	录	(296)
1.	希腊字母表	(296)
2.	常用曲线图	(297)
3.	简明积分表	(301)

第一章 函数的极限

第一节 数列极限

复习思考题

1. 试述数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的定义, 并作出几何解释.
2. 若对于某几个或无穷多个正数 ε , 存在自然数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 那么能否说 $\{a_n\}$ 以 a 为极限? 为什么?
3. 若对于任意正数 ε , 存在自然数 $N(\varepsilon)$ 使 a_n 后有无穷多项满足不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$, 那么能否说 $\{a_n\}$ 以 a 为极限? 为什么?
4. 对于每一个自然数 k , 有自然数 N_k . 当 $n > N_k$ 时, 有 $|a_n - a| < \frac{1}{k}$, 问是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 成立?
5. 对于每一个区间 $(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$ ($k = 1, 2, \dots$), $\{a_n\}$ 中只有有限多项位于区间之外, 问是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?
6. 设 $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), 今把 $\{a_n\}$ 的有限多项换成新的数, 问新的数列是否收敛? 是否仍以 a 为极限?
7. 试用“ $\varepsilon - N$ ”语言完整地表达: $\{a_n\}$ 不以 a 为极限.
8. 数列极限有哪些基本性质? 并指出其成立的条件.
9. 收敛数列是否一定有界? 有界数列是否一定收敛? 无界数列是否有可能收敛?

10. 若 $\{a_n\}$ 收敛, $\{b_n\}$ 发散, 则 $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 皆发散则情况又如何?

11. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$, 又是否能断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1?$$

12. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 是否能由此推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$?

若再设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 上结论又如何?

13. 已知单调有界数列必收敛, 那么收敛的数列是否一定是单调的? 举例说明.

14. 若对于任意正数 ε , 存在 N , 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, 则是否能断定 $\{a_n\}$ 收敛? 举例说明.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1$, 这个等式的错

误何在?

$$\begin{aligned} 16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ = \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \text{ 个}} = 0, \end{aligned}$$

这里有没有错误, 原因何在?

17. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = a (q > 1)$, 由于 $q^{n+1} = q \cdot q^n$, 两边取极限得 $a = q \cdot a$, 从而 $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, (q > 1)$. 这里有没有错误, 原因何在?

习 题

1. 证明: 若 a 为一定点, δ 为一正数, 则不等式 $|x - a| < \delta$ 与 $a - \delta < x < a + \delta$ 等价. 并说明其几何意义.

2. 解下列绝对值不等式:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & |\sqrt{x} - 1| < 1/2; & (2) \quad |x+1| > 2; \\
 (3) \quad & |2x+1| < 1; & (4) \quad |x-1| < |x+1|; \\
 (5) \quad & |x^2 - 2| \leq 1; & (6) \quad |5 - x^{-1}| < 1.
 \end{aligned}$$

3. 试写出下列数列的一般项,

$$(1) \quad \frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$(3) \quad \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \dots$$

$$(4) \quad \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

$$(5) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$$

$$(6) \quad 0, \frac{1}{2} \cos \pi, \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2}, \frac{1}{4} \cos 2\pi, \dots$$

4. 试用“ $\varepsilon - N$ ”方法, 证明下列各题.

$$(1) \quad \text{证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \text{ 并填下表:}$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	...
N						

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \text{证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot (0.1)^n = 0, \text{ 并问 } n \text{ 从何值开始,} \\
 & \text{使得数列 } a_n = (-1)^n \cdot (0.1)^n \text{ 与其极限之差的绝对值不超过 } 10^{-5};
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3};$$

(4) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;

(5) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{3n^2 + 4n + 5} = \frac{1}{3}$;

(6) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0$;

(7) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;

(8) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, (a 为任意实常数).

5. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = 0$.

6. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 的奇数项及偶数项都收敛于同一极限 a , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

7. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. 但反之不一定成立, 试举例说明之. 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 试证之.

8. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leq M$ ($n=1, 2, \dots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

9. 从数列 $\{a_n\}$ 中任意挑出无限多项, 按照原来序号的大小排成一个数列:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

称为原数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列.

试证明: 若 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则任一子数列 $\{a_{n_k}\}$ 也必收敛于 a ; 若 $\{a_n\}$ 有一个子数列发散, 则 $\{a_n\}$ 必发散. 又若 $\{a_n\}$ 有某个子数列收敛, 则 $\{a_n\}$ 不一定收敛, 试举例说明.

10. 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^5 \cdot n}{n^2 + 1}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n}{n+1}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - 5n}}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right);$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

11. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n+a)(n+b)} - n];$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + 4} - n^2);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{n + \frac{1}{2}};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt[3]{n-1} - \sqrt[3]{n});$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} \right);$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n});$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

12. 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2};$$

$$(2) a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3};$$

$$(3) a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3};$$

$$(4) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n},$$

$$(5) a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$(6) a_n = \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{n^4},$$

(提示: $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = [1 + 2 + \cdots + (n-1)]^2$.)

$$(7) a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$(8) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$(9) a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right),$$

$$(10) a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^{n-1}}),$$

($|q| < 1$).

13. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right),$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right],$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^k - n^k], \text{ 其中 } 0 < k < 1,$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[4]{2}),$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

(提示: $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}})$

14. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n}}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2},$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + \cos^2 n},$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n},$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

15. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \quad (\text{其中 } k \text{ 为正整数}).$$

16. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg a_n = \lg a.$$

17. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \cdots, a_m),$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 均为正数.

18. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

19. 利用18题结果, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}.$

20. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$

21. 已知 $\left\{ s_n = \sum_{k=1}^n a_k \right\}$ 收敛, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = 0.$

22. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

23. 证明: 若 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

24. 求证: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

25. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| > 1; \\ 0, & \text{当 } |x| = 1; \\ -1, & \text{当 } |x| < 1. \end{cases}$$

求证: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2^n} - 1}{x^{2^n} + 1}$.

26. 证明下列数列收敛:

(1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right);$

(2) $a_n = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$, 其中 $0 < x_n < 1$,
 $n = 1, 2, \dots$;

(3) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right);$

(4) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdots \frac{n+9}{2n-1};$

(5) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1};$

(6) $a_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+1}.$

27. 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots,$

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}};$$

(2) $a_n = \frac{n}{c^n} (c > 1);$ (3) $a_n = \frac{c^n}{n!} (c \text{ 为任意实数});$

$$(4) a_n = \underbrace{\sin \sin \sin \cdots \sin x}_{n \text{ 个}};$$

$$(5) a_1 = \frac{c}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}, \quad (0 \leq c \leq 1);$$

$$(6) a_1 > 1, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n};$$

$$(7) a > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right);$$

(提示: 先证明 $a_n^2 \geq a$);

$$(8) a_0 = 1, \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}.$$

28. 证明: 若 $\{a_n\}$ 是单调增数列, $\{b_n\}$ 是单调减数列, 且 $a_n < b_n$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$29. \text{ 设 } x_1 = a > 0, \quad y_1 = b > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},$$

$y_{n+1} = \frac{(x_n + y_n)}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$, 证明 x_n 和 y_n 有相同的极限.

(这极限叫做数 a 和 b 的“算术——几何平均数.”)

30. 设 $0 < a_n < 1$, 且适合 $(1 - a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$, 证明 $\{a_n\}$ 是

单调增数列, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

31. 证明下列等式:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \left(\begin{array}{l} a > 1, \\ k \text{ 为正整数} \end{array} \right),$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \quad (k > 0);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad (a > 1, k > 0)$$

32. 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

$$(2) a_n = 5\left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

33. 证明不等式:

$$(1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$(2) \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$(3) \left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

34. 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}, \quad (2) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n};$$

$$(3) a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad (4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n-4}\right)^n;$$

$$(5) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1}, \quad (6) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$(7) a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n, \quad (8) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}.$$

35. 试利用柯西收敛准则判别下列数列的收敛性:

$$(1) a_n = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2},$$

$$(2) a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)},$$

$$(3) a_n = \frac{a \cos 2 + b \sin 2}{2(2 + \sin 2)} + \frac{a \cos 3 + b \sin 3}{3(3 + \sin 3)} + \dots$$

$$+ \frac{a \cos n + b \sin n}{n(n + \sin n)};$$

$$(4) a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \cdots + \alpha_n q^n,$$

其中 $|\alpha_k| \leq M (k=1, 2, \cdots)$, 而 $|q| < 1$;

$$(5) a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1};$$

$$(6) a_n = \sin 1 + \sin \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \sin \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$(7) a_n = \sin \sin 1 + \sin \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \sin \frac{1}{n}.$$

36. 求数列 $\{a_n\}$ 的下确界和上确界:

$$(1) a_n = 1 - \frac{1}{n};$$

$$(2) a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2};$$

$$(3) a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

$$(4) a_n = \frac{1}{n-1 \cdot 2^n}.$$

第二节 函数极限

复习思考题

1. 用严格的数学语言叙述下列极限的定义, 并作出几何说明.

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L; \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L;$$