习题集

# 高等数学导论

GAODENG SHUXUE DAOLUN

中国科学技术大学
高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

**高等数学导论习题集**

中国科学技术大学高等数学教研室 编

责任编辑：刘卫东　　封面设计：盛琴琴

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路 96 号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32 印张：9.875 字数：254千

1988 年 9 月第 1 版 1988 年 9 月第1 次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7-312-00043-6/O·16

书号：13474·16 定价：2.15元

## 内 容 提 要

本书是与《高等数学导论》(下简称“导论”)配套使用的。本书与“导论”均是中国科学技术大学三十年来高等数学教学实践的结晶，深受广大同学的喜爱。本书的章节编排与“导论”完全一致，选辑题目从兼重计算技巧和推理论证出发，力图使同学在巩固所学基本理论的同时，锻炼提高计算能力和逻辑推理能力。其外，在概念多的章节中，本书编有复习思考题，帮助同学加深对其的理解和掌握。

本书可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或数学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

# 目　　录

# 第一章　函数的极限

## 第一节　数　列　极　限

**复习思考题**

1. 试述数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义，并作出几何解释。

2. 若对于某几个或无穷多个正数$\varepsilon$，存在自然数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，$|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否说$\{a_n\}$以$a$为极限？为什么？

3. 若对于任意正数$\varepsilon$，存在自然数$N(\varepsilon)$使$a_N$后有无穷多项满足不等式$|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否说$\{a_n\}$以$a$为极限？为什么？

4. 对于每一个自然数$k$，有自然数$N_k$。当$n>N_k$时，有$|a_n-a|<\dfrac{1}{k}$，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$成立？

5. 对于每一个区间$\left(a-\dfrac{1}{k},\ a+\dfrac{1}{k}\right)$ $(k=1,2,\cdots)$，$\{a_n\}$中只有有限多项位于区间之外，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$？

6. 设$a_n\to a(n\to\infty)$，今把$\{a_n\}$的有限多项换成新的数，问新的数列是否收敛？是否仍以$a$为极限？

7. 试用“$\varepsilon-N$”语言完整地表达：$\{a_n\}$不以$a$为极限。

8. 数列极限有哪些基本性质？并指出其成立的条件。

9. 收敛数列是否一定有界？有界数列是否一定收敛？无界数列是否有可能收敛？

10. 若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n \pm b_n\}$，$\{a_n b_n\}$的收敛性如何？举例说明。若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$皆发散则情况又如何？

11. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，是否有$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$，又是否能断定

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$？

12. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$，是否能由此推出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$或$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$？若再设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，上结论又如何？

13. 已知单调有界数列必收敛，那么收敛的数列是否一定是单调的？举例说明。

14. 若对于任意正数$\varepsilon$，存在$N$，使当$n>N$时，有$|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$，则是否能断定$\{a_n\}$收敛？举例说明。

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1$，这个等式的错误何在？

16.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}}=0,$$

这里有没有错误，原因何在？

17. 设$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a\ (q>1)$，由于$q^{n+1}=q\cdot q^n$，两边取极限得$a=q\cdot a$，从而$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ (q>1)$。这里有没有错误，原因何在？

## 习　题

1. 证明：若$a$为一定点，$\delta$为一正数，则不等式$|x-a|<\delta$与$a-\delta<x<a+\delta$等价。并说明其几何意义。

2. 解下列绝对值不等式：

（1）$|\sqrt{x}-1|<1/2$；（2）$|x+1|>2$；

（3）$|2x+1|<1$；（4）$|x-1|<|x+1|$；

（5）$|x^2-2|\leqslant 1$；（6）$|5-x^{-1}|<1$.

3．试写出下列数列的一般项：

（1）$\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \cdots$

（2）$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

（3）$\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \cdots$

（4）$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$

（5）$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \cdots$

（6）$0, \frac{1}{2}\cos\pi, \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{4}\cos 2\pi, \cdots$

4．试用“$\varepsilon-N$”方法，证明下列各题．

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，并填下表：

| $\varepsilon$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | | | | | | |

（2）证明$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(0.1)^n=0$，并问 $n$ 从何值开始，使得数列 $a_n=(-1)^n(0.1)^n$ 与其极限之差的绝对值不超过 $10^{-5}$？

（3）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5+3n}=\frac{1}{3}$；

（4）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$；

（5）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+4n+5}=\frac{1}{3}$；

（6）证明$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$；

（7）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；

（8）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$，（$a$为任意实常数）。

5. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$。

6. 证明：若数列$\{a_n\}$的奇数项及偶数项都收敛于同一极限$a$，即$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

7. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$。但反之不一定成立，试举例说明之。但若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。试证之。

8. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，又$|b_n|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$。

9. 从数列$\{a_n\}$中任意挑出无限多项，按照原来序号的大小排成一个数列：

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots,\ a_{n_k},\ \cdots$$

称为原数列$\{a_n\}$的一个子数列。

试证明：若$\{a_n\}$收敛于$a$，则任一子数列$\{a_{n_k}\}$也必收敛于$a$；若$\{a_n\}$有一个子数列发散，则$\{a_n\}$必发散。又若$\{a_n\}$有某个子数列收敛，则$\{a_n\}$不一定收敛，试举例说明。

10. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^5\cdot n}{n^2+1}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n!}{n+1}$；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-5n}}$；(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}(|a|<1,\ |b|<1)$。

11. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n+a)(n+b)}-n]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+4}-n^2)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}2(\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}\right)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

12. 求下列数列的极限：

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$；

(2) $a_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}$；

(3) $a_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}$；

(4) $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$;

(5) $a_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(6) $a_n=\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{(n-1)^3}{n^4}$;

(提示：$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3=[1+2+\cdots+(n-1)]^2$)

(7) $a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$;

(8) $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(9) $a_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$;

(10) $a_n=(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})$,
($|q|<1$)。

13．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$，其中 $0<k<1$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$。

(提示：$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$)

14．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2n}}$； （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}+\sin\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$．

15．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>0$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$（其中 $k$ 为正整数）．

16．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>0$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\lg a_n=\lg a$．

17．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，其中 $a_1$，$a_2$，…，$a_m$ 均为正数．

18．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$．

19．利用18题结果，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$．

20．已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$．

21．已知 $\left\{s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$ 收敛，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=0$．

22．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a_n>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

23．证明：若 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

24．求证：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

25．已知函数

$$f(x)=\begin{cases}1，当|x|>1；\\0，当|x|=1；\\-1，当|x|<1.\end{cases}$$

求证：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

26．证明下列数列收敛：

（1）$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$；

（2）$a_n=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$，其中$0<x_n<1$，$n=1,2\cdots$；

（3）$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$；

（4）$a_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{12}{5}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$；

（5）$a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$；

（6）$a_n=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}$.

27．证明下列数列收敛，并求出其极限：

（1）$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots$，

$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$；

（2）$a_n=\frac{n}{c^n}(c>1)$；（3）$a_n=\frac{c^n}{n!}$（$c$为任意实数）；

（4） $a_n=\underbrace{\sin\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}}x$；

（5） $a_1=\dfrac{c}{2}$， $a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$， $(0\leqslant c\leqslant 1)$；

（6） $a_1>1$， $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$；

（7） $a>0$， $a_0>0$， $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$；

（提示：先证明 $a_n^2\geqslant a$）；

（8） $a_0=1$， $a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$。

28. 证明：若 $\{a_n\}$ 是单调增数列，$\{b_n\}$ 是单调减数列，且 $a_n<b_n$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

29. 设 $x_1=a>0$， $y_1=b>0$， $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$， $y_{n+1}=\dfrac{(x_n+y_n)}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明 $x_n$ 和 $y_n$ 有相同的极限。（这极限叫做数 $a$ 和 $b$ 的“算术——几何平均数。”）

30. 设 $0<a_n<1$，且适合 $(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$，证明 $\{a_n\}$ 是单调增数列，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

31. 证明下列等式：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$， （2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$， $\left(\begin{array}{c}a>1,\\ k\text{为正整数}\end{array}\right)$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}=0$，$(k>0)$；

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$，$(a>1,\ k>0)$

32. 证明下列数列不收敛：

(1) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$;

(2) $a_n=5\left(1-\frac{2}{n}\right)+(-1)^n$.

33. 证明不等式：

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n=1,2,\cdots)$;

(3) $\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$.

34. 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，求下列数列的极限：

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$;　(2) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$;

(3) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;　(4) $a_n=\left(1+\frac{1}{n-4}\right)^n$;

(5) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;　(6) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$;

(7) $a_n=\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$;　(8) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

35. 试利用柯西收敛准则判别下列数列的收敛性：

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$;

(2) $a_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3!}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$;

(3) $a_n=\frac{a\cos 2+b\sin 2}{2(2+\sin 2!)}+\frac{a\cos 3+b\sin 3}{3(3+\sin 3!)}+\cdots$

$$+\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)};$$

（4）$a_n=\alpha_0+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\cdots+\alpha_nq^n$，

其中$|\alpha_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots)$，而$|q|<1$；

（5）$a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$；

（6）$a_n=\sin 1+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$；

（7）$a_n=\sin\sin 1+\sin\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\sin\frac{1}{n}$。

36。求数列$\{a_n\}$的下确界和上确界：

（1）$a_n=1-\frac{1}{n}$；

（2）$a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$；

（3）$a_n=1+2\cdot(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

（4）$a_n=\frac{1}{n-1\cdot 2}$。

## 第二节　函数极限

**复习思考题**

1．用严格的数学语言叙述下列极限的定义，并作出几何说明。

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$；　（2）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$；

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$；　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$；