大学文科数学教程

上 册

姚孟臣 徐信之

清华大学出版社

内 容 提 要

本书是一本针对文科各专业通用性较强的教材，是作者在多年为北京大学等院校文科专业讲授高等数学课的基础上编写而成．全书分上、下两册．上册五章，内容包括函数与极限；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分与定积分；多元微积分．书中有适量的习题，书后附有答案．

本书采用"模块式"结构，便于不同专业灵活选用，是一本较新颖的文科高等数学教程．可作为大学文科及大专的教材，也可作为社会科学工作者的数学参考书．

大学文科数学教程

上　册

姚孟臣　徐信之

★

清华大学出版社出版

北京　清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

★

开本：850×1168 1/32　印张：11.5　字数：298千字

1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷

印数：00001～20000

统一书号：15235·318　　定价：1.85元

前　言

目前，许多高等院校的文科都先后开设了高等数学课. 这种现象反映了文科需要数学的专业越来越多. 因此需要一本针对文科各专业的通用性较强的教材.

多年来我们在北京大学等院校为文科一些专业讲授高等数学课，并于1979年编写了一本文科用的《高等数学讲义》. 在这本讲义的基础上，根据文科的特点与需要，按照有关的教学大纲现将教材的内容又作了取舍与更新，编成了《大学文科数学教程》上下册.

本书力图在学时不多的情况下，让读者了解高等数学中若干重要的概念、理论和方法及其实际背景，从而建立正确的数学概念，学会用数学的方法分析、描述，进而定量地解决社会科学中的一些实际问题. 为此，我们在内容上作了如下的尝试.

在极限部分首先用“ε-δ”及“ε-N”的语言给出极限的严格定义，并用这种语言证明了一些简单的极限式. 另外，为了便于文科学生形象地理解极限定义，我们对变量极限给出了一种直观形象的描述，还用这种方式讨论了极限的一些基本性质，并引入了无穷小及无穷大. 在多元微积分中，着重讨论了二元的情形. 对空间解析几何的内容作了较多的删减，在不引进向量概念的情况下，通过例题引出平面、球面的概念，随后直接用代数形式给出了平面及二次曲面的定义. 对平面区域着重讲述联立不等式的表示方法，为二重积分化为累次积分作准备.

几年来我们的教学实践表明对上述这些内容的处理不仅使得全书叙述简明、篇幅减少，有利于学生掌握数学概念的实质，而且

能够提高学生运用数学方法分析问题和解决问题的能力.

考虑到目前国内文科各专业在研究对象及研究方法上发生的变化，下册还增加了矩阵、概率论与数理统计方面的基本内容；在回归分析的基础上又介绍了数量化方法I；并给出了一个用FORTRAN-77 语言写成的数量化方法I的程序及其使用说明. 为读者运用数量化方法解决实际问题提供了方便.

《大学文科数学教程》分上下册出版. 上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分与定积分、多元微积分等五章. 下册包括常微分方程与无穷级数、矩阵、初等概率论、数理统计初步、回归分析与数量化方法简介等五章. 书中配有适量的习题，书后附有答案.

为了适应文科各专业的不同需要，本书吸收了国外一些教材的组织方式，采用了"模块式"结构. 使用本书时可以灵活地进行选择或组合. 根据我们的经验列出如下各章节讲授时数分配表，以供参考.

章与学时分配表

内容	1—4，6 章	1—6 章	1—9 章	1—10 章	1—4，8—9 章	6—10 章	7—10 章
学时	60—80	100—120	140—160	160—180	120—130	80—100	60—80

例如，讲授一学期总共为 80 学时，使用 1—4,6 章；讲授两学期总共为 120 学时，使用 1—6 章；讲授两学期总共为 160 学时，使用 1—9 章；对学过微积分的文科研究生可以考虑讲授 60—80 学时，使用 7—10 章.

由于我们水平有限，书中的错误和不当之处在所难免，恳切希望批评指正. 北京大学数学系周芝英副教授对本书提出了许多宝贵的意见，并仔细地审校了全书. 在讲授和编写本教材的过程中

得到北京大学数学系方企勤副教授，胡德焜副教授以及北京大学数学系副系主任应隆安教授的支持．在此一并致谢．

姚孟臣　徐信之

一九八五年八月于北京大学

第一章　函数与极限

微积分是研究变量的一门科学. 它的主要研究对象是函数. 本章以初等数学为基础讨论有关函数与极限的问题.

§1　集合·映射

在近代数学中，集合是一个很重要的概念. 这不仅因为集合论已经发展成为一个独立的数学分支，而且是因为集合论的基本概念与方法已渗透到各个数学领域. 本书将从集合出发，引入微积分与概率论中的一些基本概念. 为此，我们有必要把集合的基本知识简单地介绍一下.

1.1　集合与子集合

集合是一个很难给出数学定义的概念，就我们的实用范围来说,只给它一种定性的描述就足够了. 例如,一个班的学生是由一些学生构成的集合；一个线性方程组解的全体构成一个集合叫做解集合. 又如,变量 x 的取值范围构成一个集合叫做变化域,记作 X. 由数组成的集合叫做数集. 全体自然数构成一个自然数集,记作 N；全体有理数构成一个有理数集，记作 Q；全体实数构成一个实数集,记作 R. 总之,**集合**就是按照某种规定能够识别的一些具体对象或事物的总体. 构成集合的这些对象或事物叫做集合的**元素**.

集合通常用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 等来表示；组

成集合的元素一般用小写字母 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 来表示. 我们用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素; 用 $a \bar{\in} A$ 表示 a 不是集合 A 的元素. 例如 $3 \in \mathrm{N}$, $\sqrt{2} \bar{\in} \mathrm{N}$.

集合一般有两种表示法: **列举法**和**示性法**. 所谓列举法就是把集合的元素都列举出来. 例如, A 是由 1, 3, 5, 7, 9 这五个数组成的集合,记为

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

也就是说{ }中将 A 的元素都一一列举出来了. 所谓示性法就是给出集合元素的特性. 一般用

$$A = \{a | a \text{ 具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合. 如上述的集合 A 也可以记为

$$A = \{a | 2n - 1 < 10, \ n \in \mathrm{N}\}.$$

例 1 $X = \{x \,\big|\, |x - 1| < 3\}$ 表示大于 -2, 小于 4 的全体实数的集合.

例 2 $D = \{\text{点}(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$ 表示在 xOy 平面上不包括圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆内一切点所构成的集合.

例 3 $Y = \{y | y \geqslant 0\}$ 或 $Y = \{y | y = x^2, x \in \mathrm{R}\}$ 表示全体非负实数所构成的集合.

由此可见同一个集合可以有不同的表示法, 也就是说一个集合的表示法不是唯一的.

一元微积分是在实数集 R 的范围内讨论问题的. 设 $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$ 且 $a < b$, 我们把集合 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b); 把集合 $\{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a, b]$; 把集合 $\{x | a < x \leqslant b\}$ 和 $\{x | a \leqslant x < b\}$ 称为半开半闭区间, 分别记作 $(a, b]$ 和 $[a, b)$. 以上各种区间都称为有限区间, 在数轴

上都可以用一条线段来表示它们. 除此之外还有无限区间，例如 $\{x|x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；$\{x|x<a\}$，记作 $(-\infty,a)$；$\{a|a\in\mathrm{R}\}$，记作 $(-\infty,+\infty)$. 类似地，还有 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$（注意，这里的 $+\infty$，$-\infty$ 以及 ∞ 只是一种符号，既不能把它们视为实数，也不能对它们进行运算）.

只含有有限多个元素的集合叫做**有限集**；含有无限多个元素的集合叫做**无限集**，无限集又可以分为可列集（此定义将在 1.3 中给出）和不可列集.

只含有一个元素 a 的集合叫做**单元集合**，记为 $\{a\}$. 例如常数 c 的变化域就是单元集合 $\{c\}$. 换句话说，若变量 x 的变化域是单元集合，则 x 是常量.

不含有任何元素的集合叫做**空集**，记为 $\varnothing$. 例如方程 $x^2+1=0$ 的实数解的解集合就是空集. 把空集合也视为集合，正如我们把 0 也看作数一样，在数学上是方便的. 但要注意空集 $\varnothing$ 与单元集合 $\{0\}$ 不是一回事.

由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**，记为 Ω. 例如当讨论一元线性方程

$$ax+b=0\ (a\neq 0\ \text{且}\ a\in\mathrm{N},\ b\in\mathrm{Q})$$

的解集合时，有理数集 Q 是一个全集. 需要指出的是全集是相对的. 在一种条件下是全集的集合，在另一种条件下可能就不是全集. 前例中，如果在实数范围内讨论一元线性方程 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的解集合时，那么 Q 就不是全集了.

设 A,B 是两个集合. 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即 $a\in A$ 必有 $a\in B$，那么称 A 为 B 的**子集合**，记

$$A\subset B\ \text{或}\ B\supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$. 这说明了包含具有传递性，例如 $\mathrm{N}\subset\mathrm{Q}$，$\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}$，于是有 $\mathrm{N}\subset\mathrm{R}$. 容

易看出，对于任意的集合 A，总有 $A \subset A$，$\varnothing \subset A$，$A \subset \Omega$ 成立.

例 4 设 $A = \{2, 4, 8\}$，则集合 A 的所有子集是 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{8\}$，$\{2, 4\}$，$\{2, 8\}$，$\{4, 8\}$，$\{2, 4, 8\}$. 注意，在考虑集合 A 的所有子集时，不要把空集 $\varnothing$ 和它本身忘掉.

设 A, B 是两个集合. 如果 $A \subset B$，$B \subset A$，那么称集合 A 与 B 相等，记作

$$A = B.$$

很明显，含有相同元素的两个集合相等.

例 5 设 $A = \{0, 2, 3\}$，$B = \{x | x$ 为方程 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ 的解$\}$，则 $A = B$.

1.2 集合的运算

设 A, B 是两个集合. 称集合 $\{x | x \in A$ 或 $x \in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**，即由 A 与 B 的全体元素构成的集合（见图 1.1），记作 $A \cup B$.

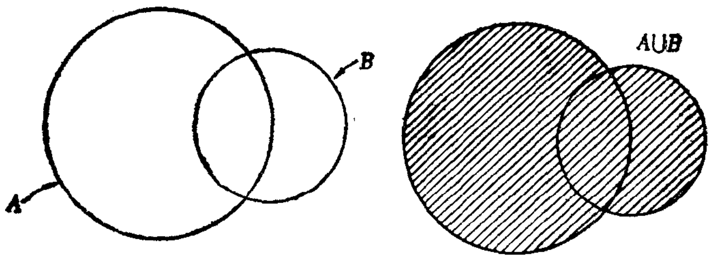

图 1.1

例 6 $\{1,2,3,4,5\} \cup \{1,3,5,7,9\}$

$$= \{1,2,3,4,5,7,9\};$$

$$[-1,2) \cup (0,3] = [-1,3].$$

并集具有以下的简单性质：

(1) $(A \cup B) \supset A$;

(2) $(A\cup B)\supset B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合(见图 1.2)，记作 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 互不相交.

例 7 $\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}$;

$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$;

$[-1,2)\cap(0,3]=(0,2)$.

交集具有以下的简单性质:

(1) $(A\cap B)\subset A$;

(2) $(A\cap B)\subset B$.

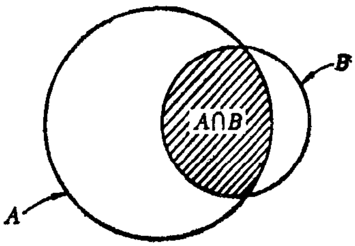

图 1.2

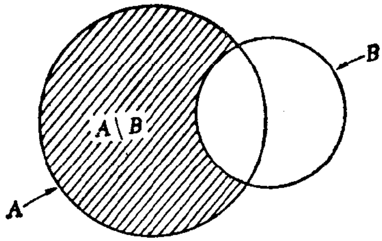

图 1.3

设 A,B 是两个集合. 称 $\{x\mid x\in A,\ x\bar{\in}B\}$ 为 A 与 B 的**差集**，即在集合 A 中而不在集合 B 中的一切元素构成的集合(见图 1.3)，记为 $A\setminus B$，读作 A 减 B. 注意，在差集的定义中并不要求 $B\subset A$. 特别，当 $A\setminus B=\varnothing$ 时，也不一定有 $A=B$ 成立.

例 8 $\{1,2,3,4,5\}\setminus\{1,3,5,7,9\}=\{2,4\}$;

$\{1,2\}\setminus\{1,2,3,4\}=\varnothing$;

$[-1,2)\setminus(0,3]=[-1,0]$.

1.3 映射

映射是指两个集合元素之间的一种对应关系. 下面我们仅就

这一概念作一简单的介绍.

例如在数轴上的点与实数之间具有一定的对应关系. 从集合的角度来看,数轴上的所有点组成一个点集,记作 I. 这个集合 I 中的每一个元素就对应于实数集合 R 中的一个确定的元素. 这样一来,就在 I 与 R 之间建立了对应关系.

一般地说,设 A, B 为两个已知集合. 如果建立了一种对应关系 f,使得对于每一个元素 $x\in A$, 通过 f 都有一个唯一确定的元素 $y\in B$ 与之对应, 那么我们就说 f 是一个从 A 到 B 的映射,记为

$$f:\ A\to B \quad 或 \quad f(x)=y,$$

其中 y 叫做 x 在 f 下的象,而 x 叫做 y 在 f 下的原象.

这里需要注意两点: 第一点, f 表示的是由 x 产生 y 的对应关系, 而 $f(x)$ 表示在映射 f 下 x 的象 y, 即 $f(x)=y$, 这说明记号"f"与"$f(x)$"是有区别的;第二点,当 x 取遍 A 中的元素时, y 不一定能够取遍 B 中的元素. 如果 y 能取遍 B 中的元素, 我们就说映射 f 是从 A 到 B **上**的映射,否则,就说 f 是从 A 到 B **内**的映射.

例 9 设 A, B 分别表示某图书馆所有的藏书与这些书的登录号所构成的集合. f 表示对 A 中的每一个元素(书)与 B 中的元素(它的登录号)的对应关系,则 f 就是一个从 A 到 B 上的映射.

例 10 设 R_+ 表示所有正实数集合. 对于每一个 $x\in R$, 映射

$$f_1:\ R\to R_+ \qquad 或 \quad f_1(x)=10^x=y$$

是一个从 R 到 R_+ 上的映射. 而映射

$$f_2:\ R\to R \qquad 或 \quad f_2(x)=10^x=y$$

是一个从 R 到 R 内的映射.

最后我们简单地介绍一下一对一的映射. 对于映射 $f:\ A\to B$

或 $f(x)=y$，如果 B 中的每一个元素 y 都有元素 x，而且只有一个元素 x 与之对应(即 A 中的不同元素对应 B 中的不同元素，而且 B 中没有不与 A 中的元素相对应的元素)，这时我们就说 A 与 B 之间建立了一对一的映射，简称为一一映射或一一对应.

例 11 设 M 是全体自然数的两倍组成的集合. 对于每一个 $n\in \mathrm{N}$，映射

$$f:\ \mathrm{N}\to M \quad \text{或} \quad f(n)=2n$$

是一个从 N 到 M 上的一一映射.

例 12 设 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，B 是由 A 中的元素平方所组成的集合，即 $B=\{0,1,4\}$. 对于 A 中的每一个元素 x，映射

$$f:\ A\to B \quad \text{或} \quad f(x)=x^2$$

就不是一个一一映射. 因为这时两个不同的整数 -2 与 2 不是对应不同的平方数，而是对应着同一个数 4. 今后我们会常常遇到这种映射.

有了一一对应的概念，我们就可以给出可列集的定义. 所谓**可列集**就是一个其元素与自然数一一对应的集合. 我们常称这类集合中元素的个数为可列个（或可数个），今后我们把有限个或可列个统称为至多可列个(或至多可数个).

习题 1-1

1. 各举三个无限集，有限集及空集的例子.
2. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有的子集.
3. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{2,4,6\}$，求：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$；

(3) $A\setminus B$；　　(4) $A\cup B\cup C$；

(5) $A\cap B\cap C$;　　　　(6) $A\backslash B\backslash C$.

4. 求下列各题中集合的并、交与差:

(1) $A=[0,1]$,　$B=[1,3]$;

(2) $A=[-1,4]$, $B=[2,4]$.

5. 在下列从R到R的映射中指出哪些是一一映射.

(1) $f(x)=2x+5$;　　　　(2) $f(x)=x^2$;

(3) $f(x)=x^3$;　　　　(4) $f(x)=2^x$.

6. 映射 $\sin x=y$ 是一个从R到R的映射,求下列R中的各个集合的原象:

(1) $B_1=\{0\}$;　　　　(2) $B_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

(3) $B_3=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$;　　　　(4) $B_4=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

§2 函　　数

在微积分中，函数是一个十分重要的基本概念. 函数关系描述的是在客观的运动和变化的过程中量与量之间的确定的依赖关系. 本节我们将在初等数学的基础上进一步来研究它.

2.1 函数的概念

在上节中,我们引入了映射的概念. 有了映射的概念,我们便可以直接利用它来定义函数.

所谓**函数**就是从数集到实数集的一个映射.

设X是一个给定的数集,f是一个确定的对应关系. 如果对于X中的每一个元素 x, 通过 f 都有R内的唯一确定的一个元素 y 与之对应,那么这个关系 f 就叫做从X到R的**函数关系**,简称为

函数，记为

$$f: X \to \mathrm{R} \quad \text{或} \quad f(x) = y.$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in \mathrm{R}$ 叫做 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y = f(x)$. 并把 X 叫做函数 f 的**定义域**，而 f 的全体函数值的集合

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

叫做函数 f 的**值域**，通常用 Y 来表示，即

$$Y = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

不难看出，Y 是 f 的值域时，y 必定取遍 Y 中的所有元素，因此我们又可以称函数 f 是从 X 到 Y 上的映射.

例如，我们称映射

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad \text{或} \quad ax + b = y \ (a \neq 0)$$

为一次函数. 有时我们也说 y 是 x 的一次函数. 用

$$y = ax + b \ (x \in \mathrm{R})$$

来表示. 一般地，我们把函数 $f: X \to \mathrm{R}$ 用

$$y = f(x) \ (x \in X)$$

来表示. 并说 y 是 x 的函数，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量. 由于在我们讨论的范围内，函数 f 和函数值 $f(x)$ (即 y)没有区分的必要，因此通常把 y 叫做 x 的函数.

通过上面的讨论可以看出，一个函数主要是由函数关系和其定义域 X 所确定的，而与其自变量和因变量所选用的符号没有关系.

例 1 圆的面积 S 是半径 $r(r \geqslant 0)$ 的函数. 用 $S = f(r) = \pi r^2 \ (0 \leqslant r < +\infty)$ 来表示，其中

$$X = \{r \mid 0 \leqslant r < +\infty\}$$

是 f 的定义域. 如果不考虑这个问题的具体内容，则函数 $S = \pi r^2$ 的定义域为

$$X = \{r \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

一般地，当 $f(x)$ 是用 x 的表达式给出时，如果不特别声明，那么函数的定义域就是使 $f(x)$ 有意义的全体 x 的集合，通常称它为**自然定义域**. 例 1 中的自然定义域为

$$X = \{r \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

除了用字母"f"表示函数以外，当然也可以用其它的字母，例如，用"F"，"φ"等等来表示函数，甚至可以用 $y = y(x)$ 来表示一个函数. 但在同一个问题中不同的函数一定要用不同的符号来表示.

在定义中，我们用"唯一确定"来表明所讨论的函数都是单值的. 所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个值 x，都有一个而且只有一个 y 的值与之对应的函数. 对于 X 中的某个 x 值有多于一个 y 的值与之对应的函数，叫做**多值函数**. 本书我们只讨论单值函数.

2.2 函数的性质

研究函数的目的是为了了解函数所具有的特性，以便掌握它的变化规律. 虽然不同的函数具有不同的特性，但是我们可以以基本初等函数① 为例，列出函数的几个简单性质（对于其它的性质，例如连续性，极值问题等，以后要作专门的讨论），为本书以下的讨论作些准备.

1. 奇偶性

对于函数 $y = f(x)$ ($x \in X$，X 是一个对称数集)，若把自变量 x 换成它的相反数 $-x$ ($x, -x \in X$) 时，函数值不变，即 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；此时，若函数的绝对值不变，而符号相反，即 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

① 基本初等函数详见附录 I.