中学数学方法与解题能力培养

曾宪梓教育基金一等奖获得者

高中代数51讲

（修订版）

贾士代　主编

首都师范大学出版社

中学数学方法与解题能力培养

高中代数51讲

（修订版）

贾士代　主编

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中代数51讲:中学数学方法与解题能力培养/贾士代主编.
-北京:首都师范大学出版社,2000.6
ISBN 7-81039-029-5

Ⅰ.高… Ⅱ.贾… Ⅲ.代数课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G633.623

中国版本图书馆CIP数据核字(1995)第04346号

GAOZHONG DAISHU 51 JIANG

高中代数51讲

(修订版)

首都师范大学出版社

(北京西三环北路105号 邮政编码 100037)
北京首师大印刷厂印刷 全国新华书店经销
2000年6月第2版 2000年11月第2次印刷
开本850×1168 1/32 印张12.625
字数321千 印数10,501～16,500册
定价14.50元

贾士代先生

作者简介

贾士代，教授，1947年11月生，1969年武汉大学数学系毕业。1983年起，他即从事一整套关于《数学素质教育工程》的理论研究和实践，其实质是通过数学“四法教育”，使每一个学生都能掌握数学的思想与方法，并具有较高的数学素质。为此，他已奋斗了16年，发表论文120篇，出版著作32部。代表作有《中学数学方法与解题能力培养》丛书、《高中数学巧妙解法400例》等。他的论文论著在国内外教育界及读者中产生较大反响，深受广大读者厚爱。1995年被河南省委、省政府命名为优秀专家，1997年荣获曾宪梓教育基金会全国高等师范院校教师奖一等奖。他的业绩曾被《中国教育报》、《组织信息报（上海）》、河南广播电台、河南电视台等多家媒体报道，并已载入《世界优秀华人教育专家名典》等30种名人辞书中。

曾宪梓教育基金会授予:

贾士代 老师一九九七年高等师范院校教师奖一等奖，奖金捌万元人民币。

曾宪梓教育基金会

理事长 曾宪梓

曾宪梓教育基金会

一九九七年十二月

再版前言

贾士代教授主编的《中学教学方法与解题能力培养》丛书(一套五种)自1993年出版以来,在全国各地中学师生中产生了很大的反响,深受广大读者厚爱,收到了良好的社会效益.

这六年来,中学数学的教学内容已有一定变动,许多读者纷纷来信,建议该丛书修订再版.为了满足广大读者的需要,我们对原丛书进行了认真修订.修改时,初中部分我们按照全国九年义务教育数学教材,高中部分依据1998年教育部发布的《关于调整现行普通高中数学、物理学科教学内容和教学要求的意见》.

修订后的丛书有下列三个显著特点:

(一)培养素质　突出“三法”

为了应付高考和中考,学生们在学习中不得不做大量的习题集、练习册.面对茫茫题海,许多学生苦恼,不少教师忧虑.怎样从根本上提高学生的解题能力,使学生早日摆脱题海的束缚,怎样更好地进行素质教育,成了人们议论的焦点.

我们认为,在素质教育中,要想真正提高学生的数学能力,就必须注重发展学生的思维,必须对学生进行以“数学三法”为主要内容的数学方法教育.所谓“数学三法”,就是思维方法、学科方法和类型题解证法.思维方法是处理数学问题的一般方法,如分析法、综合法和数形结合法等.学科方法是每门学科的思想方法,例如,立体几何中有辅助图形法与割补法、转化为平面几何法和体积法等.类型题解证法是数学各学科中每一种类型题的各种解法,是思维方法与学科方法、数学知识在不同类型题中的灵活应用.解题时,思维方法是解题的先导,学科方法与类型题解证法则是解题的具体实施.我们平常所说的解题方法与技巧,往往是在正确的思维

方法引导下，灵活运用学科方法、类型题解证法与数学知识的结果. 因此，“数学三法”是解数学题的思路、方法与技巧的源泉，是数学的“宗”. 只有使学生真正掌握了数学的“宗”，才能达到以不变应万变的目的.

本丛书修订后的每一册都是按照思维方法、学科方法与类型题解证法这三章精心编写的，力求做到层次分明、条理清晰、难易适度.

(二)方法全面　题型新颖

本丛书从几千种书刊中汲取了丰富的营养，把各家之精髓熔为一炉，汇集了中学数学的各种思维方法与解题技巧. 因此，本丛书中的方法具有全面性、系统性、普遍性和灵活性.

另外，在编写过程中，我们特别注意题型的新颖性和典型性. 除从各类书刊中精选有代表性的题目外，我们的重点是从 1994 年以来全国各地各类考试中精选数学题，因为这些题目最为活跃、最富有生命力.

(三)巧解妙证　趣味横生

数学问题的巧妙解法，往往简捷得使人惊叹，巧妙得令人叫绝. 巧妙解法能激发学生的学习兴趣，有利于培养创造思维能力. 因此，本丛书在指导学生掌握解数学题的通法外，还常常向学生展示问题的巧妙解法，使读者得到无穷的乐趣和美的享受.

本书是该丛书的一种. 第一、二章分别讲解立体几何的思维方法和学科方法，可作为高中生全面复习立体几何时使用；第三章是按教材顺序全面讲述各种类型题及其解法，可作为初学者同步学习之用.

本书由贾士代先生主编，参加编写工作的有贾士代、张子莲、贾玲娟、贾迎乐、曹全友、马十成、詹红庆、张伟奇、李济克、李光显等老师.

书中有不足和错误之处，恳请广大读者指正.

编者

目　　录

第一章　思维方法

§1.1　分析法、综合法和分析综合法

我们知道，证明数学命题的推理序列的方向有顺向和逆向之分，顺向者为综合法，逆向者为分析法.

（一）综合法

所谓综合法证明命题，就是从命题的已知条件入手，运用已学过的公式、定理和运算法则进行一步步的推理和计算，直至推出命题的结论为止.

例 1　已知 a、b、$c\in R^+$，且它们都不等于 1，$abc\neq 1$，又 $a^xb^yc^z=a^yb^zc^x=a^zb^xc^y=1$，求证：$x+y+z=0$.

【证明】　由已知可得

$$\lg(a^xb^yc^z)=\lg(a^yb^zc^x)=\lg(a^zb^xc^y)=0,$$

从而　$x\lg a+y\lg b+z\lg c=0$,

$y\lg a+z\lg b+x\lg c=0$,

$z\lg a+x\lg b+y\lg c=0$,

以上三式相加，可得

$$(x+y+z)(\lg a+\lg b+\lg c)=0,$$

即　$(x+y+z)\lg(abc)=0$.

$\because$　$abc\neq 1$，$\therefore$　$\lg(abc)\neq 0$.

故　$x+y+z=0$.

【解说】　本例中的证明方法属于综合法，它从已知条件入手，对已知等式两边取对数，进而利用对数运算法则和对数的性质证得命题的结论.

例 2　已知 x、y、$a\in R^+$，且 $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$，

求证：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

【证明】 把已知等式的根式写成指数式，得：

$$[x^2+(x^4y^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}+[y^2+(x^2y^4)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}=a$$

$$\Rightarrow[x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})]^{\frac{1}{2}}+[y^{\frac{4}{3}}(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}})]^{\frac{1}{2}}=a$$

$$\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a$$

$$\Rightarrow(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\cdot(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=a$$

$$\Rightarrow(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=a$$

$$\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

【解说】 在本例的综合法证明中，除了注意到从已知条件出发进行推理外，还灵活地运用了指数运算律和因式分解的方法，使问题获得简证.

（二）分析法

所谓分析法证明命题，就是从命题的结论入手，利用已学过的公式、定理和运算法则去寻找使命题的结论成立的条件，一直追溯到已知条件为止，它的每一步推理，后一步都是前一步的充分条件.

例 3 已知 a、$b\in R^+$，且 $a\neq\sqrt{2}\,b$，求证：$\sqrt{2}$ 必介于 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间.

【证明】 欲证这个命题的结论成立，只需证

$$\left(\sqrt{2}-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}\right)<0,$$

即证 $$\frac{(\sqrt{2}\,b-a)[\sqrt{2}\,(a-\sqrt{2}\,b)+(\sqrt{2}\,b-a)]}{(a+b)b}<0,$$

从而只需证 $$-\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}\,b-a)^2}{(a+b)b}<0.$$

显然，上式成立的充分条件为 $a、b\in R^{+}$ 且 $a\neq\sqrt{2}b$，这正是已知条件.

故　原命题成立.

例 4　已知 $a>c,b>c>0$，求证：

$$\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)}\leqslant 2\sqrt{ab}.$$

【证明】　原不等式 $\Leftarrow(\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)})^2\leqslant(2\sqrt{ab})^2$

$\Leftarrow(a+c)(b+c)+(a-c)(b-c)+2\sqrt{(a+c)(b+c)(a-c)(b-c)}\leqslant 4ab$

$\Leftarrow\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\leqslant ab-c^2$

$\Leftarrow a^2b^2-(a^2+b^2)c^2+c^4\leqslant a^2b^2-2abc^2+c^4$

$\Leftarrow a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

$\Leftarrow(a-b)^2\geqslant 0.$

【解说】　用分析法证明命题的过程就是“执果索因”，因此可用箭头“$\Leftarrow$”代替文字叙述，使之更醒目.

（三）分析综合法

所谓分析综合法证明命题，就是从命题的两头向中间“挤”，即把分析法与综合法结合起来使用.这种证法往往能较快地缩短“条件”与“结论”之间的距离，使证明的目标更明确，思路更清晰.

例 5　设△ABC 的三边长为 $a、b、c$，求证：

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

【证明】　由已知得 $A+B+C=\pi$.

欲证　$\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\dfrac{\pi}{2}$，

只需证　$\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\dfrac{A+B+C}{2}$，

即证 $\dfrac{aA}{a+b+c}+\dfrac{bB}{a+b+c}+\dfrac{cC}{a+b+c}<\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}$，

于是 只需证 $\dfrac{aA}{a+b+c}<\dfrac{A}{2}$ ①

$\dfrac{bB}{a+b+c}<\dfrac{B}{2}$ ②

$\dfrac{cC}{a+b+c}<\dfrac{C}{2}$ ③

由于 a、b、c、A 都是正数，所以欲证①式成立，只需证 $2a<a+b+c$，即证 $a<b+c$. 这个式子显然成立，于是①式成立. 同理，②、③式都成立.

故 原不等式成立.

习 题 1.1

1. 用综合法证明下列各题：

(1)已知 a、b 是直角三角形 ABC 的两条直角边，c 是斜边，求证：$\log_{(c+b)}a+\log_{(c-b)}a=2\log_{(c+b)}a\cdot\log_{(c-b)}a$.

(2)已知 $x+y=3-\cos4\alpha$，$x-y=4\sin2\alpha$，求证：$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=2$.

(3)在$\triangle ABC$ 中，求证：$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$.

(4)已知 α、$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\beta=\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$，

求证：$\operatorname{tg}\beta\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. 用分析法证明下列各题：

(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，a、b 是直角边，c 是斜边，求证：$\dfrac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{2}$.

(2)已知 a、$b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证：$\dfrac{a^3+b^3}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

(3)已知 a、$b\in R^+$，$0<x<1$，求证：$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x}\geqslant(a+b)^2$.

3. 用分析综合法证明下列各题：

(1)已知 a、b、c、N 都是不等于 1 的正数，且 $2\log_bN=\log_aN+\log_cN$，求证：$c^2=(ac)^{\log_ab}$

(2)已知 z_1、$z_2\in C$，且 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$，求证：$z_1^3=z_2^3$.

(3)已知 a、b、c 都是非负实数,求证:

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

习题 1.1 答案或提示

1. (1)$a^2+b^2=c^2\Rightarrow c^2-b^2=a^2\Rightarrow(c+b)(c-b)=a^2\Rightarrow\log_a(c+b)+\log_a(c-b)=2$,然后利用换底公式即可.

(2)由已知可得 $x^{\frac{1}{2}}=1+\sin2\alpha$,$y^{\frac{1}{2}}=1-\sin2\alpha$.

(3)由正弦定理,得 $b\cos B+c\cos C=R(\sin2B+\sin2C)=2R\sin(B+C)\cos(B-C)=a\cos(B-C)$.

(4)由 $\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$,得 $\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$,将左边展开、整理,可得 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)-\alpha]=\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}$,再利用 $1+\operatorname{tg}^2\alpha\geqslant2\operatorname{tg}\alpha$,可得 $\operatorname{tg}\beta\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. (1)原不等式$\Leftarrow a+b\leqslant\sqrt{2}c\Leftarrow(a+b)^2\leqslant2c^2\Leftarrow a^2+2ab+b^2\leqslant2(a^2+b^2)\Leftarrow(a-b)^2\geqslant0$.

(2)原不等式$\Leftarrow a^3+b^3>ab(a+b)\Leftarrow(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)\Leftarrow$
$\begin{cases}a^2-ab+b^2>ab\Leftarrow(a-b)^2>0\\a+b>0\end{cases}$.

(3)原不等式$\Leftarrow a^2(1-x)+b^2x\geqslant(a+b)^2x(1-x)\Leftarrow[(a+b)x]^2-2a\cdot(a+b)x+a^2\geqslant0\Leftarrow[(a+b)x-a]^2\geqslant0$.

3. (1)$c^2=(ac)^{\log_a b}\Leftarrow\log_a c^2=\log_a b\cdot\log_a(ac)$

$\Leftarrow2\log_a c=\log_a b(1+\log_a c)\Leftarrow\dfrac{2}{\log_a b}=1+\dfrac{1}{\log_a c}$.

已知等式$\Rightarrow\dfrac{2\log_a N}{\log_a b}=\log_a N+\dfrac{\log_a N}{\log_a c}$,又 $\log_a N\neq0$,所以$\dfrac{2}{\log_a b}=1+\dfrac{1}{\log_a c}$.

(2)$z_1^3=z_2^3\Leftarrow(z_1-z_2)(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)=0$. 由于 $z_1\neq z_2$,从而即证 $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$. 由已知可得$\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$,$\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$,$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1+z_2}$,进而由$(z_1+z_2)\cdot\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)=1\Rightarrow z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$.

(3)原不等式$\Leftarrow\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}[(a+b)+(b+c)$

$+(c+a)]$，从而只需证$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$.

§1.2　归纳法与数学归纳法

(一)归纳法的三种形式

我们把从个别到一般的推理方法叫做归纳法.一般地说，归纳法有三种不同形式：(1)不完全归纳法；(2)完全归纳法；(3)数学归纳法.

1. 不完全归纳法

探索事物的规律时，如果没有考察事物的所有情况，而仅仅从它的个别特殊情况中得出一般的结论，那么这种推理方法叫做不完全归纳法.

例 1　设 α 是锐角，试比较$\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$与 $\mathrm{ctg}\alpha$ 的大小.

【解法 1】　当 $\alpha=30°$时，$\frac{1-\sin30°}{1-\cos30°}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=2+\sqrt{3}$，$\mathrm{ctg}30°=\sqrt{3}$，$\therefore\ \frac{1-\sin30°}{1-\cos30°}>\mathrm{ctg}30°$.

当 $\alpha=45°$时，$\frac{1-\sin45°}{1-\cos45°}=1$，$\mathrm{ctg}45°=1$，

$\therefore\ \frac{1-\sin45°}{1-\cos45°}=\mathrm{ctg}45°$.

当 $\alpha=60°$时，$\frac{1-\sin60°}{1-\cos60°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，$\mathrm{ctg}60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$\therefore\ \frac{1-\sin60°}{1-\cos60°}<\mathrm{ctg}60°$.

于是，我们得出：

当 $0°<\alpha<45°$时，$\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}>\operatorname{ctg}\alpha$；

当 $\alpha=45°$时，$\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$；

当 $45°<\alpha<90°$时，$\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}<\operatorname{ctg}\alpha$.

【解说】 本例的上述解法就是不完全归纳法，它是由 α 的三个特殊值(30°、45°、60°)，推得一般结论的. 这时的结论只能称作猜想，还没有经过严格的逻辑论证. 因此，用不完全归纳法得到的结论还不一定正确，还必须进行严密的逻辑论证.

例 1 的通常解法是：

【解法 2】 $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$=\frac{\sin\alpha-\sin^2\alpha-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha-1)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$\because$ $0°<\alpha<90$，$\therefore$ $\sin\alpha>0, 1-\cos\alpha>0, \cos\alpha+\sin\alpha>1$.

于是，当 $0°<\alpha<45°$时，

$\because$ $\cos\alpha>\sin\alpha$，$\therefore$ $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}>\operatorname{ctg}\alpha$；

当 $\alpha=45°$时，$\because$ $\cos\alpha=\sin\alpha$，

$\therefore$ $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$；

当 $45°<\alpha<90°$时，$\because$ $\cos\alpha<\sin\alpha$，

$\therefore$ $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}<\operatorname{ctg}\alpha$.

2. 完全归纳法

探讨事物的规律时，如果考察了它可能存在的所有情况，并从中得出一般性的结论，那么这种推理方法叫做完全归纳法. 用完全归纳法推出的结论是正确的、可靠的.

例 2 已知一个三角形的三边成等比数列，求公比 q 的取值