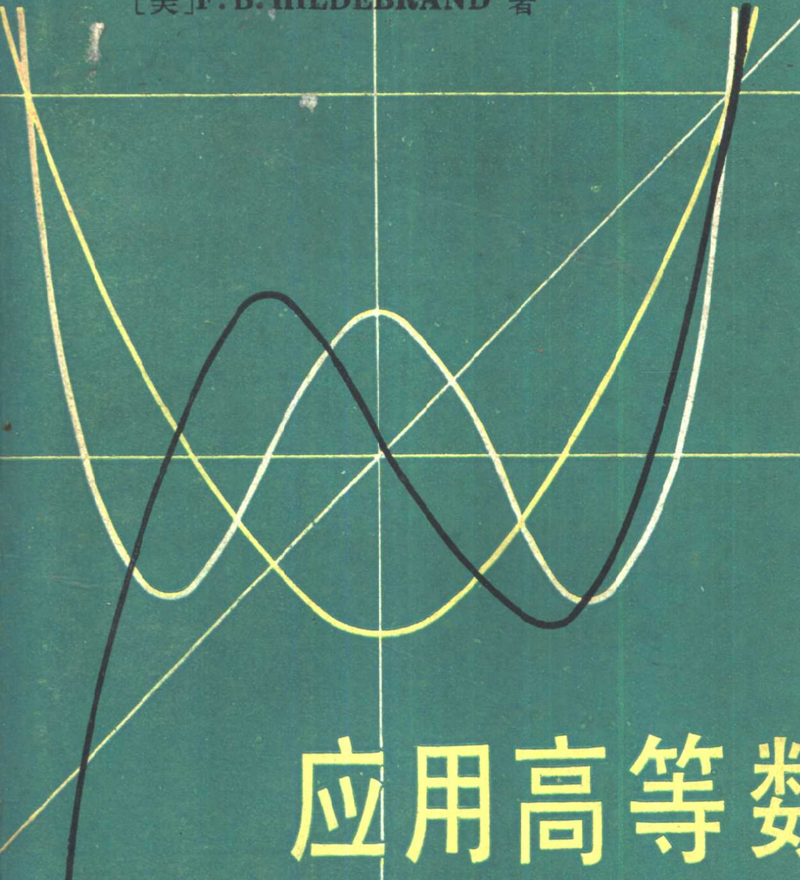
[美]F. B. HILDEBRAND 著



应用高等数学

上 册

陈绶章 张志强译

刘 文校

人民教育出版社

本书曾多次作为美国麻省理工学院教科书。全书共有十一章，中译本分上、中、下三册出版。上册(1—5章)内容以常微分方程为中心，包括常微分方程，拉普拉斯变换，常微分方程的数值解法，常微分方程的级数解(特殊函数)，边值问题及特征函数表示等。书中有大量例题和习题，书末附有习题答案。

本书可供工科院校有关专业及有关工程技术人员作参考用书。

应用高等数学

上　册

〔美〕F.B.Hildebrand 著

陈绥章　张志强译　刘　文校

*

人民教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

武汉市江汉印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32　印张12　字数280,000

1979年9月第1版　1980年8月湖北第1次印刷

印数1—18,500

书号 13012·0388　定价1.05元

译者的话

本书为美国麻省理工学院数学教授 F.B.Hildebrand 所著的“Advanced Calculus for Applications”1976年增订版(第二版). 此书曾多次作为该院的教科书,其内容包括常微分方程、向量分析、偏微分方程和复变函数等,它以微分方程为其中心课题,取材广泛而紧凑. 书中各章在应用方面的深度均较六十年代同类教科书要深, 并附有大量例题和习题, 可为工科院校有关专业及有关工程技术人员提供较多的数学工具.

我们本着“洋为中用”的原则, 在潘承孝教授的大力支持和热情关怀下,将原书译出,以供有关工科院校师生和工程技术人员参考.

鉴于译者水平有限,译文中难免有不妥之处,请读者不吝批评指正.

陈绶章　张志强

于 1978.10.

序　言

本书旨在介绍许多数学课题的完整的处理方法，这些方法在很多应用领域中都具有普遍重要意义，且只需在学好初等微积分的基础上便可掌握.

在论述各种课题时，本书试图对在数学方面不打算深造的读者可获得许多有用的数学方法的智能，以及和这些方法有关的基础、内在联系与应用范围方面的适当知识；同时，对在数学分析方面打算深造的读者也能有进一步启示和推动. 鉴于上述两个目的，书中偶而用到"可以证明"一语，是表示所建立的某一结论的一般性，或某一有用的相关事实的普遍性，而且也是为导出必要的基本结果，但要严格论证这些结果，要求过分的详尽分析或过多的必要预备知识，看来这对本书是不适宜的.

本修订版作了许多次要的变动，其目的或是增强叙述的简洁与严谨，或是增补上版所省略的证明，增添有价值的适量的正文内容(特别是在后几章中)和大约 250 个习题.

本书前四章主要是论述常微分方程，包括求解的解析法、算子法和数值法，以及作为这些方程的解而引出的特殊函数. 特别是，第一章的内容可看作是系统复习，或可认为是后几章关于线性方程和特殊可解型非线性方程所必需的基本概念和方法的初步介绍. 第五章则讨论了常微分方程的边值问题及其有关的特征函数，并介绍了任意函数用特征函数表示的级数表达式和积分表达式.

第六章申述了向量分析的有用的概念和方法；第七章简介了在应用中常用的多元函数的微分和积分的某些专题. 这里的论述有时在实质上包括了说明某一结果的似真性和实际意义，并指出

一些条件，而在这些条件下该结果的正确性已在所列参考文献中予以严格论证.

第八章介绍了较简单类型的偏微分方程的某些基本概念，此后，在第九章中为建立和求解由数学物理偏微分方程表述的各种典型问题，充分应用了前几章中所讨论的大多数方法. 新增的一节则论述了所谓参数变易法在上述问题的应用.

第十章论述了单复变数的解析函数理论中的基本课题，包括围道积分和残数计算. 若是提前介绍这种解析复变函数的方法，并按此法论述前几章的某些内容的话，虽可使其更加精致完美，但在某些情况下，用这方面的初步知识来有效地独立地论述另一些课题则显得不够充实. 然而这些知识却能较好地说明后面提出的其他课题. 由于第十章和第六、七章的大部分内容与前几章无关，故可在教师的判断下，将这几章材料在一定的学程中确实可以提前介绍. 尽管像方程 $x^4+1=0$ 的解这样的知识，需读者自己查阅有关书籍，但设想前几章中关于复数某些基本性质作为已知的知识还是合理的.

新增的第十一章研究了解析函数理论在其他领域中的一些应用，包括拉普拉斯变换的反演方法的推导(即上版在注释性习题中提出的材料的扩充)、保角变换的性质及用途(上版是放在第十章内)、以及与偏微分方程有关的一种新的简明的格林函数方法.

在每章末尾都附有内容广泛的习题，分门别类地按有关节的顺序编排. 除有一些通常的习题外，尚有许多注释性的习题，其中有的是一些特别困难的应用题，有的是用来引导读者进一步引申某些结果和方法，而后者是教材中所讨论的一些内容的延伸和补充. 这些习题可作为进一步探讨的重点，或作为该章的补充材料(或其他材料)，以使本书能稍灵活地作为各种类型的教材. 本书中这类新问题包括诸如一元格林函数、椭圆积分的应用，付里叶变

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

换的应用以及有关勒让德函数的应用等. 所有的习题答案或编入该题的说明中, 或列于书末.

作者特别感谢 E. Reissner 教授, 他在筹备原版初期进行了可贵的合作, 并提供了许多有益而新颖的意见, G. B. Thomas 教授给予指点和帮助, 许多其他同事、学生对本书也提出了不少批评与建议, 使本版得到很多改进, 作者在此一并表示谢意.

F. B. Hildebrand

目　　录

译者的话 …… i

序言 …… iii

第一章　常微分方程 …… 1

1.1　引言 …… 1

1.2　线性相关 …… 3

1.3　线性方程的全解 …… 5

1.4　一阶线性微分方程 …… 7

1.5　常系数线性微分方程 …… 9

1.6　等量纲线性微分方程 …… 14

1.7　线性算子的性质 …… 18

1.8　线性微分方程组 …… 22

1.9　参数变易法求特解 …… 28

1.10　降阶法 …… 34

1.11　常数的确定 …… 37

1.12　特殊可解型非线性方程 …… 38

第二章　拉普拉斯变换 …… 67

2.1　引例 …… 67

2.2　拉普拉斯变换的定义及其存在性 …… 69

2.3　拉普拉斯变换的性质 …… 73

2.4　逆变换 …… 78

2.5　卷积 …… 80

2.6　奇异函数 …… 82

2.7　变换表的应用 …… 84

2.8　在常系数线性微分方程中的应用 …… 90

2.9　Γ 函数 …… 96

第三章　常微分方程的数值解法 …… 117

3.1　引言 …… 117

3.2 泰勒级数的应用……118
3.3 阿达姆斯法……121
3.4 改进的阿达姆斯法……125
3.5 龙格-库塔法……128
3.6 皮卡法……133
3.7 外推法……135

第四章 微分方程的级数解：特殊函数……148

4.1 幂级数的性质……148
4.2 例题……154
4.3 二阶线性微分方程的奇异点……159
4.4 弗罗比纽斯法……161
4.5 例外情况的处理方法……169
4.6 例外情况的示例……172
4.7 特殊的一类方程……175
4.8 贝塞尔函数……178
4.9 贝塞尔函数的性质……187
4.10 贝塞尔方程……192
4.11 Ber 函数和 Bei 函数……194
4.12 勒让德函数……198
4.13 超几何函数……206
4.14 对 x 取大值时有效的级数解……208

第五章 边值问题与特征函数表达式……236

5.1 引论……236
5.2 转动弦……238
5.3 转动轴……243
5.4 长柱在轴向载荷下的屈曲……247
5.5 史脱多拉-维尼罗法……250
5.6 特征函数的正交性……256
5.7 任意函数按正交函数的级数展开……261
5.8 非齐次微分方程的边值问题……267
5.9 史脱多拉-维尼罗法的收敛性……269

5.10 付里叶正弦级数与余弦级数……272
5.11 完全付里叶级数……277
5.12 付里叶级数的逐项微分……283
5.13 付里叶-贝塞尔级数……287
5.14 勒让德级数……293
5.15 付里叶积分……298

上册习题答案……339

上册索引……356

第一章　常微分方程

1.1　引言

微分方程就是通过导数或微分将二个或二个以上的变量连接起来的方程. 因此, 最简单的微分方程具有如下形式:

$$\frac{dy}{dx}=h(x) \tag{1}$$

其中 $h(x)$ 是自变量 x 的给定函数. 积分后, 立即可求得其解为

$$y=\int h(x)dx+C \tag{2}$$

式中 C 为任意常数. 我们认为, 所谓微分方程的解, 就是满足微分方程的不包含未知函数的导数或积分的任何函数关系. 在这个意义上, 积分(2)能否用已命名的函数或列表函数来表示是无关紧要的. 类似地, 对如下形式的方程

$$F(x)G(y)dx+f(x)g(y)dy=0 \tag{3}$$

可以分离变量, 用积分求得其解为

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx+\int\frac{g(y)}{G(y)}dy=C \tag{4}$$

这里假定对上式中分母可能为零的情况已作适当考虑.

通常, 我们希望求出微分方程的最一般的解; 这就是说, 我们要求蕴含该方程的全部函数关系. 在一般情况下, 要判定确已得出全部这样的函数关系, 可能是困难的. 幸而, 在应用中常遇到的所谓线性微分方程中并不存在这种困难. 这种线性微分方程就是下文中主要关心的内容.

如下形式的微分方程

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \quad (5)$$

称为 n 阶线性微分方程，其明显的特征是没有因变量（未知函数）y 及其导数的乘积或它们的非线性函数，且其最高阶导数为 n 阶导数．其系数 $a_0(x),\cdots,a_n(x)$ 可以是自变量 x 的任意特定函数．

对一阶线性方程

$$a_0(x)\frac{dy}{dx}+a_1(x)y=f(x)$$

将在 §1.4 中证明，当在上述方程的两边均乘以 x 的某一可确定的函数（"积分因子"）时，该方程总能表示为如下等价形式：

$$\frac{d}{dx}[p(x)y]=F(x)$$

其中 $p(x)$ 和 $F(x)$ 均可用 a_0, a_1 和 f 表出，故方程的解可用积分直接解出．

虽然，对解高阶线性方程不存在如此简单的普遍方法，但在应用中有特别重要的两类方程，它们完全可直接解出，这两种情况将在 §1.5 和 §1.6 中予以讨论．另外，本章还介绍适用于处理较一般的线性方程的某些方法．

非线性方程，如

$$\frac{dy}{dx}=x+y^2,\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\sin y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=e^x$$

不具有线性微分方程的许多有用的基本性质．

§1.12 中将简介几种特殊类型的可解非线性方程．

本章中所讨论的这些方程即所谓常微分方程，它与偏微分方程有所区别，后者包含了对二个或二个以上自变量的偏导数．偏微分方程将在后几章中予以论述．

在研究线性常微分方程之前，下面先简介线性相关的概念，它

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

是本书中的一个基本概念.

1.2 线性相关

形如

$$c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_nu_n(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_ku_k(x) \qquad (6)$$

的式子,其中诸 c 均为常数, 称为 n 个函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 的线性组合. 当至少有一个 c 不为零时, 则该线性组合称为非平凡的. 若在给定区间上 (如 $a\leqslant x\leqslant b$), 没有一个函数能表示为其他函数的线性组合,或等价地,在所讨论的区间上, 函数的任何非平凡的线性组合均不恒等于零,则称函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 在给定区间上是线性独立的. 否则,称这些函数在该区间上是线性相关的.

例如, 函数 $\cos 2x$, $\cos^2 x$ 和 1 在任何区间上都是线性相关的,因为下式恒成立:

$$\cos 2x-2\cos^2 x+1\equiv 0$$

由定义可知,当且仅当在某区间上,一个函数为另一函数的常数倍时, 这两个函数在该区间上是线性相关的. 现用下列两个函数 x 和 $|x|$ 来阐明在一般情况下限定区间的必要性. 在区间 $x>0$ 内,有 $x-|x|\equiv 0$,而在区间 $x<0$ 内,则有 $x+|x|\equiv 0$, 因此,上述两个函数在不包含 $x=0$ 点的任何区间上均为线性相关;但在包含 $x=0$ 在内的任何区间上, 由于这两个函数的任何线性组合均不恒等于零,故它们在该区间上是线性独立的.

虽然在实践中, 一组函数的线性相关或线性独立一般能通过观察来确定, 但下述结果在理论探讨上则是相当重要的. 今设一组 n 个函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 中每一个函数在区间 I 上处处都有 n 阶有限导数. 那末,若存在一组常数 c, 对 I 中所有的 x, 有

$$c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n=0$$

同是这些常数也满足下列恒等式

$$c_1\frac{du_1}{dx}+c_2\frac{du_2}{dx}+\cdots+c_n\frac{du_n}{dx}=0$$

$$c_1\frac{d^2u_1}{dx^2}+c_2\frac{d^2u_2}{dx^2}+\cdots+c_n\frac{d^2u_n}{dx^2}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}+c_2\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}}+\cdots+c_n\frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}}=0$$

于是，这 n 个常数必满足 n 个齐次线性方程. 然而，这样一组方程仅当其系数的行列式为零时，才能有非平凡解. 由此得出，若函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 在区间 I 上为线性相关的，则行列式

$$W(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \dfrac{du_1}{dx} & \dfrac{du_2}{dx} & \cdots & \dfrac{du_n}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \tag{7}$$

在 I 上恒等于零. 这个行列式常在理论性问题中出现，我们称它为函数组的朗斯基(Wronsky)式(或朗斯基行列式). 于是，可看出若 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的朗斯基式在 I 上不恒等于零，则函数 u_1, u_2, $\cdots, u_n$ 在 I 上为线性独立.

举例说明，由于下列行列式

$$W(1,x,x^2,\cdots,x^n)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ 0 & 1! & 2x & 3x^2 & \cdots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & 6x & \cdots & n(n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3! & \cdots & n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{vmatrix}$$

的值等于其主对角线中各非零常数的乘积，故不可能为零. 因此

其第一行中那些函数线性独立(在任何区间上).

遗憾的是上述定理的逆定理不成立,因为,在例外情况下,一组线性独立的函数的朗斯基式也可能为零.这就是说,朗斯基式的值为零是一组函数线性相关的必要条件,而不是其充分条件(作为确定其不充分性的例子,可参阅习题5).

1.3 线性方程的全解

最一般的 n 阶线性微分方程可写成如下形式:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=h(x) \tag{8}$$

此处假设方程的两端均被最高阶导数的系数除过,我们称此式为 n 阶线性微分方程的标准形式.这种方程常写成下列简式

$$Ly=h(x) \tag{9}$$

其中 L 在此表示线性微分算子,即

$$L=\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+a_n(x) \tag{10}$$

求解方程(8)的问题在于确定 y 的最一般表达式,若将此表达式代入(8)的左端或用(10)对它进行运算,就会给出方程(8)右端给定的 $h(x)$.当关系式 $y=u(x)$ 满足方程(8)时,通常就把关系式 $y=u(x)$ 或函数 $u(x)$ 称为该方程的一个解.[†]

假设所有系数 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ 都为零,则方程(8)的解可通过 n 次逐次积分直接求出,每次积分将引入一个独立的积分常数.因此可以预料到方程(8)的通解也将包括 n 个独立的任意常数.事实上,已经知道,在系数连续的任一区间 I 中,方程(8)存在着一个正好含有 n 个独立任意常数的连续解;此外,在区间 I

[†] 其实,隐式关系式 $\varphi(x,y)=0$ 同样也可看作是它的一个解,但当该方程为线性时,就不需要这种推广.

内，方程(8)再也没有解是不能由限定任何这种解的常数来求得的.

应当注意，这是线性微分方程所特有的性质. 以例来说明，如一阶非线性微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\ \frac{dy}{dx}+4y=4x-1 \tag{11}$$

用直接代入法可以证明，下式是其包含一个任意常数的一个解，

$$y=x-(x-c)^2 \tag{12}$$

然而，这不是最一般的解，因为函数 $y=x$ 也满足上述微分方程，但它不能由限定所给解中的任意常数来求得. 这种额外的解 $y=x$ 称为奇解. 而这种解只能在非线性微分方程的解中出现.

下面先讨论一下在方程(8)中用零取代函数 $h(x)$ 后的结果. 所得的微分方程 $Ly=0$ 称为齐次微分方程，因为该方程中每一项都包含 y 或其任何阶导数的一次幂. 在此情况下，由方程的线性性质，不难看出单个解的任何线性组合同样是它的一个解. 因此，若已知齐次方程

$$Ly_H=0 \tag{13}$$

的 n 个线性独立的解为 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$，则其通解为

$$y_H(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_nu_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_ku_k(x) \tag{14}$$

其中 c 是 n 个所需的任意常数. 这就是说，当适当限定方程(14)中的这些常数时，就可得出相应于(8)的齐次方程的全部的解.

关于这一点，应该说明，当且仅当某函数在给定区间 I 的所有点处都满足某微分方程时，我们就称该函数是该微分方程在给定区间 I 中的一个解. 因此，在齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

的情况下，其通解的形式为 $y=c_1+c_2x$. 可能有人会认为，由于函数 $y=|x|$ 在不包含点 $x=0$ 的任一区间上为一线性函数，且其二阶导数为零，所以它是

一个不能由限定 c_1 和 c_2 来求得的一个"解". 然而, 很明显, 该函数在 $x=0$ 处是不可微的. 因此由于此方程的左端在 $x=0$ 处不存在, 即在该点处不满足此方程, 因而就不能说 $y=|x|$ 是在包含 $x=0$ 在内的任一区间上的一个解. 而在不包含 $x=0$ 的任一区间上, 函数 $y=|x|$ 可由 $+x$ 或 $-x$ 代替, 故可从上述通解中令 $c_1=0$ 和 $c_2=1$ 或 $c_2=-1$ 求得.

现设方程(8) 的一个特解为 $y=y_P(x)$, 它可通过观察或其它方法求得, 因而

$$Ly_P=h(x) \tag{15}$$

则方程(8)的全解为

$$y=y_H(x)+y_P(x)=\sum_{k=1}^{n}c_ku_k(x)+y_P(x) \tag{16}$$

因为上式包含 n 个独立的任意常数, 且满足微分方程

$$Ly=L(y_H+y_P)=Ly_H+Ly_P=h(x) \tag{17}$$

于是可见, 求解线性常微分方程的过程通常可分为两部分. 首先求出对应的齐次方程的 n 个线性独立的解; 然后再求出全方程的任一特解; 就可由方程(16)给出其全解.

通常习惯把"$y=y_H(x)$ 是齐次方程 $Ly=0$ 的解"简略地说成"$y_H(x)$ 是 $Ly=h$ 的齐次解", 也有采用"余解"这个名称的.

在 § 1.9 中将证明, 若已知 n 阶线性方程的齐次通解, 则经过 n 次积分后, 总能求出它的一个特解. 在 § 1.5 和 § 1.6 中将探讨一些重要的特殊情况, 在那些情况下将很容易地求得其齐次解.

1.4 一阶线性微分方程

一般地说, 一阶线性微分方程容易求解, 而不必分别确定齐次解和特解. 为此, 设法确定一个积分因子 $p(x)$ 使下列标准形式

$$\frac{dy}{dx}+a_1(x)y=h(x) \tag{18}$$

与方程

$$\frac{d}{dx}(py)=ph \tag{19}$$

等价．由于方程(19)可写成如下形式

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\right)y=h(x)$$

由此可见，若 p 满足下列方程

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}=a_1(x)$$

则方程(18)与方程(19)是等价的．因此积分因子为

$$p=e^{\int a_1(x)dx} \tag{20}$$

用积分得出方程(19)的解为

$$py=\int ph\ dx+C$$

所以，方程(18)的通解为

$$y=\frac{1}{p}\int ph\ dx+\frac{C}{p} \tag{21}$$

其中 p 是由方程(20)所确定的积分因子，C 为一任意常数．

特别是对 $x=x_0$, $y=y_0$ 时的解可表示为

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{p(\xi)}{p(x)}h(\xi)\ d\xi+y_0\frac{p(x_0)}{p(x)} \tag{21'}$$

其中用 ξ 表示被积函数中的哑变量，以与自由变量 x 相区别，后者在求积分时将保持不变．

例 求解下列微分方程

$$x\frac{dy}{dx}+(1-x)y=xe^x$$

首先将该方程改写成标准形式，

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}-1\right)y=e^x$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com