$$x+2y=5$$
$$y+2z=8$$
$$z+2x=5$$

中学生课外读物

方程组的解法和应用

王得福　朱维纶

方程组的解法和应用

吉林人民出版社

中学生课外读物

方程组的解法和应用

王得福　朱维纶

吉林人民出版社

中学生课外读物

方程组的解法和应用

王得福　朱维纶

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　$6\frac{3}{8}$印张　140,000字

1963年11月第1版第1次印刷

1978年9月第2版　1978年11月第2次印刷

500,001—1,000,000册

书号：7091·435　　　　定价：0.51元

编 者 的 话

方程式的解法是中学代数科的主要内容之一。

这本小册子是以提高学生解题能力为目的的，它的内容共分三部分：第一部分是解方程组的初步理论和几种主要方法；第二部分是系统介绍各种方程组在各种不同情况下的解法；第三部分例举方程组在解答代数、几何、三角各科问题的运用。为了使学生能够得到充分的训练，各部分每一段内容之后都附有“类似练习”；第二部分每一大段内容之后又附有“总练习题”。这样使同学在学过教科书有关方程组的材料的基础上，概括了解和初步掌握解方程组的几种主要方法，比较系统地掌握各种方程组的解题经验，并能运用这些解法、经验与技巧去解答代数、几何、三角方面的习题和较难的方程组，从而提高解题能力。为此所选例题和练习题，力求全面、系统，有一定深度，尽量使其内容多样，不单调，便于学生发挥创造性，提高分析问题、灵活处理问题的能力，逐步丰富解题经验。

在看这本小册子的时候，给同学们提出下面几点建议：

1．多看看每一段内容的前后说明部分，以便正确地领会解题方向和各种解法的精神．看过例题之后再反过来阅读这说明部分，以加深体会。方程组的同解定理是解方程组的理论根据，必须掌握。但是它的证明比较复杂，因此，第一次阅读时也可以先不读，等学完了方程组的各种解法之后回头再读。

2．仔细钻研每个例题，学习怎样按解题方向寻求解法，

怎样根据特点确定具体解法，并从中吸取具体地解题技巧和经验。

3．要独立地解答“练习题”，首先解答“类似练习题”，以便学会运用已获得的解题方法、经验与技巧。要用充分时间去解答每一部分的“总练习题”，不要怕困难，不要套用例题之解法，耐心地具体分析每一题的特点，创造最佳解法。当实在解答不出时，再看后面的略解，仔细钻研，吸取经验教训。

编者为了邦助同学们打好学习数学的基础，于一九六三年写出这本小册子，但由于编者经验与水平所限，即使这次修订再版仍难免有缺点或错误，希望读者批评指正。

编　者

一九七八年三月

目　次

第　一　章

方程组解法总论

除一次方程组外，其他方程组都没有统一的求根公式。所以为了能够很好地解各种方程组，必须具备下述四个条件：

掌握解方程组的基本理论；

明确解各种方程组的基本方向；

熟练地掌握几种常用的解方程组的方法；

积累丰富地解方程组的经验和技巧。

一、关于方程组的基本理论

1. 方程组和方程组的解

把几个方程并列在一起，叫做方程组。

例如：$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$ ………………………………（1）

是一个方程组。

在变数 x，y 允许值的范围内，找到 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 可使（1）中每一个方程两边的值相等，则把 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 叫做方程组（1）的一组解。

如果任何值都不能同时使方程组中每个方程两边的值相等，则把这样的方程组叫做是无解的方程组。

例如：方程组 $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ 就是无解的。

2． 解方程组的意义

解方程组就是要求我们对给定的方程组确切地回答下列两个问题：

（1）这个方程组在指定的数的范围里有解无解；

（2）如果有解，有多少组解，并求出这些组解来。

例 1　方程组 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-xy+y^2=19 \end{cases}$ 有解，并且有两组解。

这两组解是 $\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=3 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-5 \end{cases}$。

例 2　方程组 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$ 在实数范围内有解，并且有两组解，这两组解是：$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$。在复数范围内有解，并且有六组解。这六组解是：

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i) \\ y_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}i \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{5,6}=-1\pm\sqrt{3}i \\ y_{5,6}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i) \end{cases}。$$

在实系数代数方程组中，如无特殊声明，都指在复数范围内求解。

3. 同解方程组

如果两个方程组的解完全相同，也就是第一个方程组的所有解都是第二个方程组的解，而第二个方程组的所有解也都是第一个方程组的解，这样的两个方程组叫做同解方程组。

解方程组的时候，需要逐步用同解方程组来代替原方程组，原方程组如果有解，最后的与之同解的方程组如：$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 便是原方程组的解。

以后详细讨论的各种方程组的解法都要符合上述要求，因此方程组经过怎样的变形才能产生与之同解的方程组应首先加以明确的。以下提出四条方程组同解变形的定理，作为解方程组的理论根据。（这四个定理都用二元方程组为例加以说明）

同解定理一：如果方程组里的任何一个方程用和它同解的方程来代替，则所得的新方程组与原方程组同解。

已知在方程组：$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ \psi(x, y)=0 \end{cases}$ …………………（1）

与 $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ \psi(x, y)=0 \end{cases}$ …………………（2）

中，方程 $F(x, y)=0$ 与方程 $f(x, y)=0$ 同解，

则：方程组（1）与方程组（2）同解。

i）设 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ ……………………………………（3）

为方程组（1）的任意一组解，由于 $F(x, y)=0$ 与 $f(x, y)=0$ 同解，所以（3）也是 $F(x, y)=0$ 的解。

所以 $\begin{cases} F(a, b)=0 \\ \psi(a, b)=0 \end{cases}$. 所以（3）是方程组（2）的解。

ii）用同样方法可说明方程组（2）的任意一组解也是方程组（1）的解。

故方程组（2）与方程组（1）同解。

例如：方程组$\begin{cases}x+y=7\\(x-1)^2+(y-2)^2=28\end{cases}$中，方程$x+y=7$用和它同解的方程$(x-1)+(y-2)=4$来代替得新方程组$\begin{cases}(x-1)+(y-2)=4\\(x-1)^2+(y-2)^2=28\end{cases}$，这两个方程组同解。

同解定理二：如果方程组中的一个方程是一个未知数用另一个（或另一些）未知数的代数式来表示的等式，在这方程组里的另一个（或另一些）方程把这个未知数用这个代数式代替，则所得的新方程组与原方程组同解。

已知方程组 $\begin{cases}f(x,\ y)=0\\y=F(x)\end{cases}$ ………………………（1）

与 $\begin{cases}f[x,\ F(x)]=0\\y=F(x)\end{cases}$ ………………………（2）

则：方程组（1）与方程组（2）同解。

i）设$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$为方程组（1）的任意一组解，

则：$\begin{cases}f(a,\ b)\equiv 0\\b\equiv F(a)\end{cases}$ ………………………………（3）

所以$f[a,\ F(a)]\equiv 0$ ……………………………（4）

由（3）（4）按方程组解的定义知$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$是方程组（2）的解。

ii）设 $\begin{cases}x=c\\y=d\end{cases}$ 为方程组（2）的任意一组解，

则：$\begin{cases}f\,[c,\ F\ (c)\ ]\equiv 0\\d\equiv F\ (c)\end{cases}$ ……………………（5）

所以 $f\ [c,\ d]\equiv 0$ ……………………………（6）

由（5）（6）按方程组解的定义知 $\begin{cases}x=c\\y=d\end{cases}$ 是方程组（1）的解。

故方程组（1）与方程组（2）同解。

例如：方程组 $\begin{cases}2x^2-xy-y^2=0\\x=3-2y\end{cases}$

与 $\begin{cases}2(3-2y)^2-(3-2y)y-y^2=0\\x=3-2y\end{cases}$ 同解

本定理是用代入法解方程组的根据。

同解定理三：如果把方程组里的一些方程的两边分别相加（或相减）得出一个新方程，并且把原方程组里的任意一个方程换成这个新方程，则所得的新方程组与原方程组同解。

已知方程组 $\begin{cases}f_1\ (x,\ y)\ =0\\f_2\ (x,\ y)\ =0\end{cases}$ ……………………（1）

与 $\begin{cases}f_1\ (x,\ y)\ \pm f_2(x,\ y)=0\\f_1\ (x,\ y)\ =0\end{cases}$ …………（2）

则：方程组（2）与（1）同解。

i）设 $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ 是方程组（1）的任意一组解，

则 $\begin{cases}f_1\ (a,\ b)\equiv 0\\f_2\ (a,\ b)\equiv 0\end{cases}$

所以 $\begin{cases} f_1(a, b) \pm f_2(a, b) \equiv 0 \\ f_1(a, b) \equiv 0 \end{cases}$.

所以 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$是方程组（2）的解。

ii）设 $\begin{cases} x = c \\ y = d \end{cases}$是方程组（2）的任意一组解，

则 $\begin{cases} f_1(c, d) \pm f_2(c, d) \equiv 0 \\ f_1(c, d) \equiv 0 \end{cases}$.

所以 $\begin{cases} f_1(c, d) \equiv 0 \\ f_2(c, d) \equiv 0 \end{cases}$.

所以 $\begin{cases} x = c \\ y = d \end{cases}$是方程组（1）的解。

故方程组（2）与方程组（1）同解。

例如：

方程组（A）$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2x = 5 \end{cases}$

（B）$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ 3(x + y + z) = 18 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ 和

（D）$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ -y + z = 1 \end{cases}$

则方程组（A）、（B）、（C）和（D）都同解。

因为 (B) 中方程 $3(x+y+z)=18$ 是由 (A) 中三个方程相加得到的，即由 $(x+2y)+(y+2z)+(z+2x)=5+8+5$ 得来；(D) 中方程 $-y+z=1$ 是由 (C) 中第三方程减第一方程得到的，即由 $(x+y+z)-(x+2y)=6-5$ 得来。

定理一与定理三联合运用，是加减法解方程组的根据。

同解定理四：如果方程组中的一个方程可以变成一边为二因式之积，另一边为零的形式，令这二因式每一个等于零所成的两个新方程分别与原方程组中的其余方程组成两个新方程组，则这两个新方程组与原方程组同解。

已知方程组 $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ \phi(x, y)=0 \end{cases}$ ……………………（1）

且 $F(x, y)=f_1(x, y)\cdot f_2(x, y)$。

方程组：$\begin{cases} f_1(x, y)=0 \\ \phi(x, y)=0 \end{cases}$ ……………………（2）

$\begin{cases} f_2(x, y)=0 \\ \phi(x, y)=0 \end{cases}$ ……………………（3）

则方程组（1）与方程组（2）（3）同解。

i）设 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 是方程组（1）的任意一组解，

则 $\begin{cases} F(a, b)\equiv 0 \\ \phi(a, b)\equiv 0 \end{cases}$.

所以 $\begin{cases} f_1(a, b)\equiv 0 \\ \phi(a, b)\equiv 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f_2(a, b)\equiv 0 \\ \phi(a, b)\equiv 0 \end{cases}$.

所以 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 是方程组（2）或（3）的解。

ii）设 $\begin{cases}x=c\\y=d\end{cases}$ 是方程组（2）或（3）的任意一组解，

则 $\begin{cases}f_1(c, d)\equiv 0\\\phi(c, d)\equiv 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f_2(c, d)\equiv 0\\\phi(c, d)\equiv 0\end{cases}$。

所以 $\begin{cases}F(c, d)\equiv 0\\\phi(c, d)\equiv 0\end{cases}$。

所以 $\begin{cases}x=c\\y=d\end{cases}$ 是方程组（1）的根。

故方程组（2）（3）与方程组（1）同解。

例如：方程组：$\begin{cases}xy+y^2+x+y=0\\x^2+y=0\end{cases}$ ……………（1）

与 $\begin{cases}x+y=0\\x^2+y=0\end{cases}$ ………（2）、$\begin{cases}y+1=0\\x^2+y=0\end{cases}$ ………（3）

方程组（1）与方程组（2）（3）同解。

因为 $xy+y^2+x+y=y(x+y)+(x+y)$

$=(x+y)(y+1)$。

本定理是用分解法解方程组的根据。

应当指明，解方程组时，如果仅使用了恒等变形和同解变形而得到的解是原方程组的解，如果还使用了其他的等式变形而得到的解，由于运用了非同解变形，就不一定是原方程组的解，这时在解完后应予以验算。

例如：对分式方程组中的分式方程去分母；对无理方程组中的无理方程的两边同次乘方来代替原方程所得的方程组就不一定与原方程组同解。

二、明确解方程组的方向

总方向——化复杂的方程组为简单的方程组，化未知的方