初中学习百例丛书

初中数学思想方法与解题技巧百例

浙江少年儿童出版社

初中数学

思想方法与解题技巧百例

施 储 编著

浙江少年儿童出版社

责任编辑：刘力行
美术编辑：孙达明
封面设计：王大川
插　　图：张　力
责任出版：崔志鹏

图书在版编目（CIP）数据

初中数学思想方法与解题技巧百例/施储编. —杭州：浙江少年儿童出版社，2000.8（2001.2重印）
ISBN 7-5342-2153-6

Ⅰ. 初… Ⅱ. 施… Ⅲ. 数学课-初中-解题
Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第27528号

初中数学思想方法与解题技巧百例　　施　储　编著

浙江少年儿童出版社出版发行
（杭州体育场路347号）
浙江省临安曙光印务有限公司印刷　　全国各地新华书店经销
开本 850×1168　1/32　印张 4.25　字数 80000　印数 6351—10385
2000年8月第1版　　2001年2月第2次印刷

ISBN 7—5342—2153—6/G·1214　定价：5.70元

写在前面

数学是一个有机的整体，各部分之间相互联系，相互依存，相互渗透，从而构成了一个互相交错的立体空间。《中学数学教学大纲》中指出：正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提，而牢固掌握公理、定理、公式、法则以及学会运用数学思想方法，则是学好数学、用好数学的必要条件。

所以，为了培养数学学习中的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力及综合应用数学知识分析解决实际问题的能力，除了在学习中逐步形成各单元知识结构，认真剖析各章节的有关典型例题，仔细分析练习中出现的各类错误这几个重要环节外，从初中开始就逐渐对常用的数学方法和重要的数学思想引起重视，并有意识地运用一些数学思想方法去解决问题，一定可以使自己的数学学习提高到一个新的层次、新的高度。

常用的数学方法，是针对各种不同的数学知识而定的一种策略，是解决数学问题的工具。不同的问题可以用不同的方法，相同的问题也可以有各种不同的方法(即所谓的一题多解)。各种数学方法与数学知识一样，是数学发展过程中积累起来的宝贵精神财富，并且是数学知识所不能代替的。

而数学思想较之于数学基础知识及常用数学方法，又处于更高的层次，具有指导性的地位。如果说数学知识是数学内容，可以用文字和符号来记录和描述，那么数学思想则是数学意识，属于思维的范畴，应该在理解、领会的基础上用以对数学问题的认识、处理和解决。

数学方法与数学思想常常在学习、掌握数学知识的同时获得，

并应不断领会它们在知识形成中的作用，认识它们的本质特征、思维程序和操作方法，逐步做到自觉灵活地应用于所要解决的问题。只有数学知识与数学方法思想并重，知识与思想方法相互促进，才能使我们（包括学生与老师）更深刻地理解数学，从整体上把握数学，以至能灵活地运用数学。目前普遍存在的学生在课堂上听得懂但遇到问题却不会解决的现象，正是数学知识与思想方法脱节的结果。

初中阶段在解决数学问题时最重要的方法有以下几种：配方法、换元法、待定系数法、分析综合法、降幂法、拆项法、割补法、反证法、面积法、构造法，此外还有一些特殊条件下的特殊方法。

中学数学中重要的数学思想有：函数与方程思想、分类讨论思想、数形结合思想、转化的思想。

本书主要围绕以上数学方法与思想举一些典型的例题加以分析，使同学们从初中开始就有意识地以创新的学习态度吸取知识，便于以后进一步学习和提高自己分析、解决数学问题的能力。

目　　录

一　常用数学方法和技巧

1. 配方法

配方法，在数学上特指将代数式通过凑配等手段得到完全平方、完全立方等形式，从而再利用诸如完全平方项是非负数等性质，达到增加题目的条件等目的.配方法主要用在多元代数式求值、无理式的证明或化简及求解方程等方面.

例 1　若实数 x,y,z 满足 $4(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z+9$，求 x,y,z 的值.

分析　从一个等式(方程)中要求三个未知数的值，用常规方法是不可能的，只有采用配方法将其变形为三个代数式的平方和等于零，利用“有限个非负数的和等于零，那么这些非负数都等于零”的性质来求解.

解　移项、整理、配凑得：

$$(x-4\sqrt{x}+4)+[(y-1)-4\sqrt{y-1}+4]+[(z-2)-4\sqrt{z-2}+4]$$
$$=(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{y-1}-2)^2+(\sqrt{z-2}-2)^2$$
$$=4+3+2-9=0,$$

$$\therefore \begin{cases}(\sqrt{x}-2)^2=0,\\(\sqrt{y-1}-2)^2=0,\\(\sqrt{z-2}-2)^2=0,\end{cases}\quad 得\begin{cases}x=4,\\y=5,\\z=6.\end{cases}$$

例 2　已知 a,b,c 均为实数，且 $a^2=bc,b^2=ca,c^2=ab$. 求证：

$a=b=c$.

证明 $\because\ a^2=bc, b^2=ca, c^2=ab$,

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$.

可得 $2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab=0$,

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

$\therefore\ a-b=0, b-c=0, c-a=0$.

$\therefore\ a=b=c$.

说明 等式 $a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$ 很重要,两边乘以 2 就能配成三个完全平方式的和,这个式子在今后的数学学习中还会经常碰到.

例 3 已知 $x-y=m, y-z=n$,试求多项式 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ 的值.

分析 由例 2,形如 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$ 的代数式,可变形为 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ 的形式,故本例的关键是求得 $(z-x)$ 的值.

解 $\because\ x-y=m, y-z=n$,

$\therefore\ (x-y)+(y-z)=x-z=m+n$,

即 $z-x=-(m+n)$.

则 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2$

$$+(z-x)^2]=\frac{1}{2}[m^2+n^2+(m+n)^2]=m^2+n^2+mn.$$

例 4 计算:$\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$.

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}}{2+\sqrt{3^2-2\times 3\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{2+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

说明 化简形如$\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$的双重根式时，必须找到有理数a,b，使$a+b=x$且$ab=y$，则可配方成$\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$来解决. 要注意$\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$，去掉绝对值符号要比较$\sqrt{a}$与$\sqrt{b}$的大小.

例 5 已知关于x的方程$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$有实根，求$a,b$的值.

解 $\because$ 原方程有实根，

$\therefore$ $\Delta=4(a+1)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant 0$，

得 $-2a^2+2a-1-4ab-4b^2\geqslant 0$.

配方得 $(a-1)^2+(a+2b)^2\leqslant 0$.

$\because$ $(a-1)^2\geqslant 0,(a+2b)^2\geqslant 0$，$\therefore$ $a-1=0,a+2b=0$，解得 $a=1,b=-\frac{1}{2}$.

说明 在本例中，判别式是二元二次不等式，且出现两个参数，显然不在初中数学知识范围内，只有通过配方的方法解决.

例 6 解方程：$x^2+4x-16\sqrt{2x}+20=0$.

分析 这一无理方程若实施移项、两边平方后化为整式方程来解，比较复杂.

根据本方程的特点，含有未知数的三项指数的比是 $2:1:\frac{1}{2}$，即 $4:2:1$，启发我们是否可以把中间一项和常数项分别一分为二(拆成两项)，使原方程左端配成两个完全平方式的和，从而找到解此方程的一条途径.

解 原方程可化为：

$(x^2-4x+4)+(8x-8\sqrt{8}x+16)=0$，

即 $(x-2)^2+(\sqrt{8}x-4)^2=0$.

由 $x-2=0$，得 $x=2$，由 $\sqrt{8x}-4=0$，也得 $x=2$.

经检验，$x=2$ 是原方程的解.

说明 只有方程一边为 0，而另一边可以配成几个完全平方式时，才能用这一方法求解，令每一完全平方式为零，从而求出各完全平方式中未知数的值，其中未知数相同的值就可能是原方程的解；如果没有相同的值，则原方程无解.

2. 换元法

数学中的"元"指的是未知数. 用新的未知数去替换原条件中的旧未知数或数字或代数式，从而使较为复杂的多项式结构简化，以达到简化解题过程的目的的方法，称为换元法. 换元法实质上是一种化繁为简、化难为易的数学转化思想的具体体现.

例 7 计算：$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1999}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2000}\right)-\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1999}\right)$.

解 设 $x=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1999}$，$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

$+\frac{1}{1999}$，则原式$=x\left(y+\frac{1}{2000}\right)-\left(x-\frac{1}{2000}\right)y$

$$=xy+\frac{x}{2000}-xy+\frac{y}{2000}=\frac{x+y}{2000}=\frac{1}{2000}.$$

例 8 已知：$M=\frac{9876504321}{9876012345}$，$N=\frac{9876504322}{9876012346}$，试比较 M,N 的大小.

解 设 $x=9876504321$，$y=9876012345$，

则有 $x-y>0$，且 $M=\frac{x}{y}$，$N=\frac{x+1}{y+1}$.

$\because\quad M-N=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}=\frac{x(y+1)-y(x+1)}{y(y+1)}$

$$=\frac{x-y}{y(y+1)}>0,$$

$\therefore\quad M>N.$

说明 例 7、例 8 是两个典型的数字运算方面应用换元法解题的范例，其特点是数字上出现较多的重复之处.

另外，在例 8 的比较大小中，用了不等式的基本性质：若 $A-B>0$，则 $A>B$；若 $A-B=0$，则 $A=B$；若 $A-B<0$，则 $A<B$. 这在比较两数(式)的大小中称为“作差比较法”.

例 9 已知 $a<0,b<0$，且 $3a=2b+\sqrt{ab}$，求 $\frac{2a+\sqrt{ab}+b}{a+\sqrt{ab}-b}$ 的值.

解 由 $a<0,b<0$，令 $x=\sqrt{-a}$，$y=\sqrt{-b}$，则 $a=-x^2$，$b=-y^2$，$\sqrt{ab}=xy$.

由 $3a=2b+\sqrt{ab}$，得 $-3x^2=-2y^2+xy$.

即 $3x^2+xy-2y^2=0$，$(x+y)(3x-2y)=0$.

$\because\quad x>0,y>0$，$\therefore\quad x+y>0$，只有 $3x=2y$.

$\therefore\quad 9x^2=4y^2$，$y^2=\frac{9}{4}x^2$. 于是

$$原式=\frac{-2x^2+xy-y^2}{-x^2+xy+y^2}=\frac{2x^2-xy+y^2}{x^2-xy-y^2}$$

$$=\frac{2x^2-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x^2}{x^2-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x^2}=\frac{(8-6+9)x^2}{(4-6-9)x^2}=-1.$$

说明 在已知 a,b 关系式的条件下，要求关于 a,b 的分式的值时，只须用 a 表示 b 或以 b 表示 a 代入即可. 此例的困难是从 $3a=2b+\sqrt{ab}$ 中不易直接得到 a,b 的关系. 通过换元，得到关于 x,y 的二次三项式，就很顺利地解决了.

例 10 分解因式：$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)$.

解 设 $x-y=a,y-z=b$，则 $x-z=a+b$.

故 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

$=[(x-y)-(y-z)]^2=(x-2y+z)^2$.

说明 若将 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)$ 展开再分组分解也可得出上述结果，但这不如应用换元法解简捷.

例 11 已知：$x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy$，求证：$x=y=z$ 或 $x+y+z=0$.

证明 设 $x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy=m$，则

$$\begin{cases} x^2y-y^2z=ym, & ① \\ y^2z-z^2x=zm, & ② \\ z^2x-x^2y=xm. & ③ \end{cases}$$

①+②+③得 $ym+zm+xm=0$，即 $m(x+y+z)=0$.

∴ $m=0$，或 $x+y+z=0$.

若 $m=0$，则 $x^2-yz=0,y^2-zx=0,z^2-xy=0$. 三式相加，得 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$.

即 $(x-y)^2+(y-x)^2+(z-x)^2=0$，∴ $x=y=z$.

综上所述，有 $x=y=z$，或 $x+y+z=0$.

说明 本例采用了设参数的方法，实际上是换元法的一种. 一般地，在题设中出现连等式或等比式时，常常引入比值等作为参数. 引入参数作代换后，使原式中字母之间的关系由"隐蔽"而变得明显.

例 12 解方程组：$\begin{cases}\sqrt{2x+y+\dfrac{1}{y}}-8=0,\\ \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}-3=0.\end{cases}$

分析 仔细观察两个方程的结构特征，可以发现 $2x+y+\dfrac{1}{y}-3=\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{x+y-3}\right)^2$，所以通过换元，可以化为有理方程组，从而求其解.

解 设 $\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=A$，$\sqrt{x+y-3}=B$，则原方程组可化为 $\begin{cases}A^2+B^2=5,\\ A+B=3,\end{cases}$ 进而求得原方程组的解是 $\begin{cases}x_1=4+\sqrt{10},\\ y_1=3-\sqrt{10};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4-\sqrt{10},\\ y_2=3+\sqrt{10};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=5,\\ y_4=-1.\end{cases}$

说明 换元法在解可化为二元二次方程组的分式方程组和无理方程组时经常被采用. 利用适当的换元，可把分式或无理方程组转化为较简单的方程组来求解.

思考题（一）

1. 求满足条件 $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$ 的实数 x,y.

2. 已知 a,b,c,d 为非零实数，且$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0$. 求证：$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=d$.

3. 已知 a,b,c 为整数，$a^2+b^2+c^2+48<4a+6b+12c$，求 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{abc}$的值.

4. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$，求$\frac{x^2+1}{x}$的值.

5. 分解因式：

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$;

(2) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$.

6. 解高次方程：

(1) $(x^2+2x)^2-14x^2-28x=15$;

(2) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$.

7. 解分式方程：

(1) $x^2+x=\frac{6}{x^2+x-1}$;

(2) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}\quad(a>0)$.

8. 解无理方程：

(1) $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$;

(2) $\sqrt{2x^2-4x+3}=x^2-2x$.

9. 解方程组：$\begin{cases}y-x=4,\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y+3}=4.\end{cases}$

10. 设 x,y,z 都是不超过 1 的非负实数. 如果 $k=x+y(1-x)+z(1-x)(1-y)$，试求 k 的取值范围.

3. 待定系数法

关于多项式恒等，有下列性质：

(1) 若 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 对一切实数 x 恒成立，则有 $a_n=b_n$，$a_{n-1}=b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1=b_1$，$a_0=b_0$.

(2) 若 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 等式恒成立，则可取 x 在允许值范围内的任一值 x_0，使其左右两边的值恒相等.

待定系数法就是根据多项式恒等的性质，先设定若干待定的系数，通过比较等式两边的对应项，列出若干含有待于确定的系数的方程组，解此方程组求出各待定系数的值，从而使问题获得解决的一种方法.

例 13 已知多项式 x^3-3x^2+5x+a 能被多项式 x^2-x+3 整除，求常数 a 的值.

解 设 $x^3-3x^2+5x+a=(x^2-x+3)(x+m)$

$=x^3+(m-1)x^2+(3-m)x+3m$

$$\begin{cases}m-1=-3,\\3-m=5,\\3m=a.\end{cases}$$

解得 $m=-2$，故 $a=-6$.

说明 这类问题当然可以直接用多项式竖式除法来解决. 在进行多项式除法中，要注意余数定理、因式定理的应用. 例如：已知多项式 x^3+kx+6 能被 $x+2$ 整除，求常数 k 的值. 只需将 $x=-2$ 代入多项式，即可得 $k=-1$.

例 14 分解因式：$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$.

解 由 $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$，

设 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$

$=(x+4y+m)(x-2y+n)$

$$=x^2+2xy-8y^2+(m+n)x+(-2m+4n)y+mn.$$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases} m+n=2, \\ -2m+4n=14, \\ mn=-3. \end{cases}$$

解得 $m=-1, n=3$.

$$\therefore \quad x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$$
$$=(x+4y-1)(x-2y+3).$$

说明 本例除了用待定系数法分解外，还可以将 x(或 y)作为主元，整理成关于 x(或 y)的一元二次式进行分解，也可将以上的待定系数法简化为“双十字相乘”.

例 15 若 $-\dfrac{11}{(x+3)(2x-5)} \equiv \dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{2x-5}$，求 A, B 的值.

分析 符号“$\equiv$”读作“恒等于”. 要使本例等号两边的式子的值永远相等，可把右式通分，因为两边的分母相同，因此只要比较两边的分子，根据两个多项式恒等，通过比较对应项的系数而求得 A, B 的值.

这一过程在数学中称为化一分式为“部分分式”，它在今后的高中数学学习以至“微积分”学习中都有很大的作用.

解 $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{2x-5}=\dfrac{A(2x-5)+B(x+3)}{(x+3)(2x-5)}$

$$=\frac{(2A+B)x-5A+3B}{(x+3)(2x-5)}.$$

要使原式成立，即

$$-\frac{11}{(x+3)(2x-5)} \equiv \frac{(2A+B)x-5A+3B}{(x+3)(2x-5)},$$

则 $\begin{cases} 2A+B=0, \\ -5A+3B=-11. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=1, \\ B=-2. \end{cases}$