

工程数学 习题课精讲

赵玉环 张 青 倪培溉 编



877

7B11-44

Z48

工程数学学习题课精讲

赵玉环 张 青 倪培澹 编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书分线性代数、概率论与数理统计、积分变换三篇,按目的要求、基本内容、例题分析、习题四项内容讲述,附有习题答案。可作为参考书和复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学习题课精讲/赵玉环等编. —天津:天津大学出版社, 1999. 8

ISBN 7-5618-1227-2

I. 工… I. 赵… II. 工程数学-习题 IV. TB11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 38197 号

出 版 天津大学出版社

出版人 杨风和

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内 (邮编: 300072)

电 话 发行部: 022-27403647 邮购部: 022-27402742

印 刷 河北省昌黎县印刷总厂

发 行 新华书店天津发行所

开 本 850mm×1168mm 1/32

印 张 10.5

字 数 328 千

版 次 1999 年 8 月第 1 版

印 次 1999 年 8 月第 1 次

印 数 1—5 000

定 价 16.00 元

前 言

工程数学的理论和方法在数学及自然科学的其它学科和工程技术中有着广泛的应用. 因此, 工程数学是高等院校理工科普遍开设的基础课.

一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口. 要想较好地掌握数学的基本概念和基本方法, 能对数学基本知识有一个融会贯通的了解, 最好的方法莫过于经常动手解题. 能熟练地解决数学问题并非轻而易举的事情, 这就需要我们掌握数学课程的基本内容、基本原理和基本方法, 需要掌握常用的解题方法和解题技巧.

本书包括线性代数、概率论与数理统计、积分变换三门课程, 分三篇分别叙述. 每部分依次按目的要求、基本内容、例题分析、自我检测练习题四项内容讲述.

例题都是精选的, 其中不乏我们讲课时积累的. 所选例题覆盖课程的基本内容, 旨在阐明常用的解题方法和技巧; 有的例题给出多种解法, 旨在开阔学生的解题思路, 比较不同解题方法的优劣.

第一篇线性代数由张青编写, 第二篇概率论与数理统计由赵玉环编写, 第三篇积分变换由倪培溉编写.

由于我们的水平所限, 时间仓促, 如有错误恳请读者批评指正.

编 者

1999 年 3 月

第一篇 线性代数

第一章 行列式

一、目的要求

理解 n 阶行列式的定义, 记住行列式的性质, 掌握计算行列式的各种方法. 不管用哪一种方法, 在计算行列式的过程中, 灵活应用行列式的性质以简化计算, 这是极为重要的.

二、基本内容

1. n 阶排列及其逆序的定义.

2. n 阶行列式的定义.

3. 由 n 阶行列式的定义知, 对角形行列式及上(下)三角形行列式的值分别为:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}.
 \end{aligned}$$

4. n 阶行列式的性质:

①行列式和它的转置行列式相等;

②行列式的两行(列)互换,行列式改变符号;

③数乘行列式等于用这个数乘该行列式中任意一行(列);

④行列式中若有两行(列)对应成比例,则该行列式为零;

⑤如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同;

⑥将行列式某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,其值不变.

[注]在利用行列式的性质⑥计算行列式时,要防止这样的错误:将行列式的某一行(列)加到另一行(列)的 k 倍上.此时相当于将另一行(列)乘以了 k 倍,整个行列式应乘以 $\frac{1}{k}$ 才能与原行列式相等.

5. 行列式按某一行(列)展开.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

(或 $= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}, j = 1, 2, \cdots, n$)

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

6. 范德蒙行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

7. 克莱姆法则.

n 个方程 n 个未知量的线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组有唯一解: $x_i = \frac{D_i}{D} (i = 1, 2, \cdots, n)$.

克莱姆法则的意义主要在于它能用方程组的系数表出该方程组的解, 形式简明易记. 它的不足之处是计算量大, 很不方便. 且当 $D = 0$ 时, 就不能再用克莱姆法则求解.

三、例题分析

计算行列式的方法小结:

1. 直接应用行列式的定义来计算行列式;
2. 利用行列式的性质, 将行列式化为三角形行列式再进行计算;
3. 按某一行(列)展开;

4. 拆行(列)法计算行列式;
5. 利用范德蒙行列式的结论计算行列式;
6. 用数学归纳法及递推关系证明或计算行列式;
7. 用加边法计算行列式.

[注]以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列, $ar_i(c_i) + r_j(c_j)$ 表示第 i 行(列)的 a 倍与第 j 行(列)相加, $r_i(c_i) \leftrightarrow r_j(c_j)$ 表示第 i 行(列)与第 j 行(列)互换.

下面按方法分别举例说明.

1. 直接应用行列式的定义来计算行列式.

若行列式的非零元素特别少(小于 $2n$ 个),可以用此方法.

例 1.1 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解:由于行列式中不为零的项只有 $1 \cdot 2 \cdots (n-1)n$ 这一项,而把这 n 个元素按行下标自然顺序排列时,列下标的排列为 $(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot n$; 这个排列的逆序数 $\tau[(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot n] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, 所以 $D = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$.

2. 利用行列式的性质,将行列式化为三角形行列式.

例 1.2 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

其中 $c \neq 0, b_i \neq 0 (i=2, 3, \dots, n), a_i$ 为任意实数 $(i=1, 2, \dots, n)$.

解: 考虑将 D 化简为一个上(下)三角形行列式.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} c_1 \times \frac{1}{c} & \frac{a_1}{c} & \frac{a_2}{b_2} & \frac{a_3}{b_3} & \cdots & \frac{a_n}{b_n} \\ c_2 \times \frac{1}{b_2} & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 \times \frac{1}{b_3} & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n \times \frac{1}{b_n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{c_1 - c_2}{c_1 - c_3} & \frac{a_1}{c} - \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{b_i} & \frac{a_2}{b_2} & \frac{a_3}{b_3} & \cdots & \frac{a_n}{b_n} \\ c_1 - c_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ c_1 - c_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= cb_2 \cdots b_n \left(\frac{a_1}{c} - \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{b_i} \right).
 \end{aligned}$$

形如例 1.2 的行列式都可以化为三角形行列式计算.

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i \neq a_i (i=1, 2, \dots, n)$.

解: 本题虽然不属于例 1.2 的类型, 但行列式中每一列除一个元素外其余都是相等的, 所以可以将它化为例 1.2 的类型.

$$D = \begin{vmatrix} & x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ r_2 - r_1 & a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline r_3 - r_1 & a_1 - x_1 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ r_4 - r_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_n - r_1 & a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_1 \times \frac{1}{x_1 - a_1}}{c_2 \times \frac{1}{x_2 - a_2}} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \cdots (x_n - a_n) \cdot \\ & \quad \cdots \\ & \frac{c_n \times \frac{1}{x_n - a_n}}{c_1 + c_2} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1 - a_1} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_3} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \cdots (x_n - a_n) \cdot \\ & \quad \cdots \\ & \frac{c_1 + c_n}{c_1 + c_4} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1 - a_1} + \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{x_i - a_i} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - a_1) \cdots (x_n - a_n) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - a_i} \right).$$

例 1.4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解:[方法一]为了避免分数运算,从第二行提出公因子 $\frac{1}{2}$,把行列式化成元素全是整数的行列式

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

为了把行列式化为上三角形行列式,需要把主对角线下方的元素全部变成零.首先把主对角线下方的第一列元素全化为零.为了避免分数运算我们先利用行列式的性质将第二行乘以 (-1) 加到第一行上去,将第一行第一列元素变为1,再进行计算.或直接将第一行与第三行交换也可.

$$D \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 5r_1}} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_4} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_3 - 2r_2}{r_4 - 4r_2} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & -35 & 31 \\ 0 & 0 & -69 & 59 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_4 - 2r_3}{r_4 - 4r_2} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & -35 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_3 \leftrightarrow r_4}{r_4 - 4r_2} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 & 31 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_4 + 35r_3}{r_4 - 4r_2} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -74 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times (-74) = -37.$$

[方法二]将第三行变成只有一个非零元素.

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_3 + 2c_1}{c_4 - 3c_1} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}.$$

按第三行展开:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 \\ -3 & 9 & -5 \\ 4 & 11 & -13 \end{vmatrix} \\
 &\quad \frac{c_3 + c_2}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 9 & 4 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \\
 &\quad \frac{r_2 + 2r_3}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 31 & 0 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2}(-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 31 \end{vmatrix} \\
 &= -(2 \times 31 - 5 \times 5) = -37.
 \end{aligned}$$

方法一是计算数字行列式的一般计算步骤. 当阶数 n 较大时, 往往采用一定程序应用计算机来计算, 程序与此大致相同. 方法二比方法一更简单、灵活, 适合手算.

3. 按某一行(列)展开.

直接按某一行(列)展开, 只是把一个 n 阶行列式的计算换成计算 n 个 $(n-1)$ 阶行列式, 计算量不一定减少多少. 只有当行列式中某一行或某一列含有较多的零时, 此方法才真正有意义. 因此, 如果行列式的行或列没有很多零元素, 可以先利用行列式的性质, 使得某一行或某一列变成只有一个非零元素, 然后再按这一行(列)展开. 数字型行列式是这样(如例 1.4 方法二), 字母型行列式也如此.

例 1.5 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解:从 D 的第二行开始,每行乘 (-1) 往上一行加,然后再按第一列展开.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}_{n-1},$$

从第一行开始,每行都减去下一行,得

$$D = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1} x^{n-2}.$$

4. 拆行(列)法计算行列式.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix} \quad (n \geq 2).$$

解: 当 $n=2$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 \\ x_2+1 & x_2+2 \end{vmatrix} \\ = (x_1+1)(x_2+2) - (x_1+2)(x_2+1) = x_1 - x_2.$$

当 $n > 2$ 时, 利用行列式的性质⑤把第一列拆开.

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ 1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix} \\ = 0 + 0 = 0.$$

5. 利用范德蒙行列式结论计算行列式.

有时行列式并不是范德蒙行列式, 但可应用行列式的性质将其化为范德蒙行列式, 从而可直接利用范德蒙行列式的结果计算.

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & \cdots & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-n+1 & a-n+2 & \cdots & a-1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解:先将 D 的第 n 行依次与第 $n-1$ 行, $n-2$ 行, $\cdots$, 2 行, 1 行对换, 再将得到的新的行列式的第 n 行与第 $n-1$ 行, $(n-2)$ 行, $\cdots$, 2 行对换, 继续仿此作法, 直到最后第 n 行与第 $n-1$ 行对换, 这样, 共经过 $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ 次行对换后, 得到

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a-n+1 & a-n+2 & \cdots & a-1 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & \cdots & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式已是范德蒙行列式, 故利用范德蒙行列式的结果, 得

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} [(a-n+i) - (a-n+j)] \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i-j). \end{aligned}$$

6. 用数学归纳法及递推关系证明或计算行列式.

例 1.8 证明:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

证明:证与 n 有关的等式时,一般可用数学归纳法. 本题采用数学归纳法.

$$n=1 \text{ 时, } D_1 = |2| = 2 = 1 + 1, n=2 \text{ 时, } D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \text{ 结}$$

论成立.

假设对阶数小于 n 的行列式结论成立, 下面证明对 n 阶行列式 D_n 结论也成立.

按第一列展开 D_n :

$$D_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}.$$

对于等号右边的第二个行列式按第一行展开, 并由数学归纳法假设, 得

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1} - (-1)^{1+1}D_{n-2} \\ &= 2[(n-1)+1] - [(n-2)+1] \\ &= n+1. \end{aligned}$$

由数学归纳法知, 等式对任何 n 都成立.

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \quad (\alpha \neq \beta).$$

解:此行列式的特点是除主对角线及其上下两条对角线的元素外, 其余的元素都为零. 这种行列式称三对角行列式. 从行列式的左上方往右下方看, 即知 D_{n-1} 与 D_n 具有相同的结构. 因此可