最小二乘法与或然率理论基础

上 册

〔苏联〕 A·C·契巴塔廖夫 著

中国工业出版社

最小二乘法与或然率理论基础

上　册

〔苏联〕A·C·契巴塔廖夫 著
楼　成　器等译

中国工业出版社

本书詳細地闡述了观測誤差理論、最小二乘法与或然率理論基础。书中所述最小二乘法問題，都是根据最大权原理闡述的。书中引証了許多生产与科研实例，以便于讀者了解掌握。

全书共有四篇二十八章，分上、下两册出版。上册計两篇十一章，內容包括：观測誤差理論的基本原理、誤差理論在測量实践中的应用实例、非等精度观測与权的理論、观測成果按誤差理論的处理、偶然誤差和系統誤差对观測結果的共同影响、观測誤差理論的原理、間接观測結果的平差、非等精度間接观測結果的平差、权系数、有条件联系的直接观测和間接观測等。

本书可供測繪工作者参考，亦可作为測量院校的教学参考书。

本书由楼成器、刘福林、魏玉明、徐炳麟、韓儒博同志翻譯；由关学海、方万傅、陶本藻、吳俊昶、任慧舲、胡吕方同志校訂。

А. С. Чеботарев

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЕОДЕЗИЗДАТ МОСКВА · 1958

* * *

最小二乘法与或然率理论基础

上 册

楼 成 器 等譯

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16·印张 18 5/8·字数443,000

1964年11月北京第一版·1964年11月北京第一次印刷

印数0001—3,950·定价（科七）2.60元

*

統一书号：15165·3189（測繪-114）

原　序

本版“最小二乘法与或然率理論基础”教科书是根据1936年版經过极其重要的修訂而成的。在修訂工作中，作者曾經克服了許多观念上、数学上、方法上和技术上的困难。

最小二乘原理即数学原理。用它来求某函数的极限值

$$[v^2]=\min.$$

此項原理的这种形式，在各种学科門类中获得了广泛的应用，例如在数理統計学、制图学和測量学中，特别是解决有关現有控制网质量分明不良而又在其中插入控制网的变形問題。在这种情况下，有可能采用正交法来代替最小二乘法。这要看在具体情况下采用哪一种方法比較簡单、方便和經济而定。

一般地說，在測量学、天文学和重力测量学中，最小二乘原理的运用是和同时采用由平差計算所得未知数最終值的最大可靠性原理密切相关的。此时，以測量成果作为起算数据。

在这样的条件下，最小二乘法具有另一种重大意义。

在采用最小二乘法时，假定直接測量結果中所含誤差主要是所謂偶然誤差。所以，在平差計算时，不仅要求得未知数的最可靠的最終值，而且还要估計这些最終值及其函数的精度。其結果是使最小二乘法的任务大大地复杂化了。

至于談到偶然誤差和观測量的眞值，同时也就涉及到哲学性质的問題，这是一方面。另一方面，从事測量成果平差的专家必須更詳細地了解观測的实质，因而就必須更詳細地了解20世紀在物理学上两个非常重要的理論：相对論和量子論。

但是，很遺憾，在編写此教科书时由于篇幅所限，作者不可能研究上述問題，而只能在参考文献中指出相应的文献。

从科学观点来看，最小二乘法的闡述必須从或然率理論基础开始。但是，特別考虑到測量专业的特点，在高等測量学校和測量系中，必須从第一学年就开始学习測量学，而第二学年的測量学大綱已經要求具有十分牢固的最小二乘法知識。所以，为了遵循“循序漸进”的基本教学法原則，不得不将最小二乘法的第一篇和第二篇首先建立在实驗資料的基础上，以便在第二学年末可以利用或然率理論基础。

此外，必須顧及到，在高等測量学校的教学計划中，至少是在天文大地測量专业的教学計划中，在最后一个学年，过去有、現在仍然有最小二乘法这一专門課程，而其它系也要有这样的专門課程作为选修課。本书的第三篇講的就是这一专門課程。

在本书中闡述最小二乘法时，采用了最大权原理；所以，以等式 $M(\Delta)=0$ 所表示的性质是作为誤差理論基础的偶然誤差的基本性质。

书中所列各例，除了极少数的以外，作者都取自生产或科学研究著作，并准确地注明其出处。作者非常重視这一点，因为对于未来的測量工程师来說，最小二乘法不单单是一門輔助学科，而且还要利用它来編制測量工作計划，处理測量結果并估算其精度。同样也要

估算未知数最終值的精度。

根据偶然誤差的性质，数例在誤差理論中也和在或然率理論中一样，只有在其中包含有相当多的观测結果时，才足以使人信服。当然，这样会使教科书的篇幅增多，但是尽管如此，决不会給学生增加学习最小二乘法的困难。因为学生是在实驗室的实际作业中，在教师的指导下，通过教师专門选定的例子，来掌握与学习最小二乘法有关的計算技术知識。教师应該利用教科书中所举的例子，适当地解释它們的最后結果和这些例子中所得出的重要結論，并要实际計算一个例子，以作示范。

此外，还必須考虑到，最小二乘法教科书，应当成为学生毕业后在作业单位工作时的参考书。

作者在編写本书时，是以下列原則作出发点的，即在最小二乘法中，数学本身不是目的，而是作为闡明和掌握这一学科的基础工具。所以，作者在闡述最小二乘法的理論方面，采用了各种措施和方法使最能适合相应年級学生的数学程度而易于掌握这門困难学科。但是，考虑到数学領域的当前发展方向及其可能性，作者認为有必要在第三篇中加入一些起碼矩陣計算知識，因为目前这一数学分析方法在苏联和其他国家文献中，都已开始成功地运用于数理統計学和最小二乘法中。

有关本书所述問題的文献是很多的。所以，作者在参考文献中只列了那些业已发表并在某种程度上引用过的一些文献。这些引文，在本书中是以通用的方法表示的，即在方括弧中标出参考文献編号❶。

在編写本书时，作者参考了在莫斯科测绘工程学院、莫斯科土地整理工程学院和古比雪夫紅旗軍事工程学院中进行的最小二乘法基本原理的討論結果。

作者謹向評論者：Д.С.謝英副教授、К.Л.普罗沃洛夫教授、紅旗軍事工程学院大地測量教研室副主任Б.С.庫茲明和老教师А.Н.維索茨基副教授表示衷心的感謝，他們都非常仔細地研究了本书的手稿，并帮助作者作了一定的改正。

作者認为必須指出，手稿是由А.Н.維索茨基詳細校閱的。

❶ 参考文献列于本书下册。——譯者注

目 录

緒　論

測量在科学中的作用和意义

諸如測量学、实用天文学、摄影測量学和重力測量学这些学科，都是同各种測量有关的。在物理学、化学和許多其它科学中的測量更是各式各样的。

我們可以利用測量来直接研究在自然界和社会中所发生的量变現象，所以，对于認識我們周围所发生的客观过程，測量的重要性是无可爭辯的。

測量必然带有誤差；每一个人只要进行一下某种測量的实驗，即可确信这一点。观測誤差理論就是从事研究許多与这些誤差有关問題的专門科学。測量是一个物理过程。測量总是有一定的对象，它是不以人們的意志或其性质为轉移而客观存在的过程。

任何事物都存在于空間。測量也和任何其它过程一样，是随时間而完成的。所有这一切，列宁在其有名的著作“唯物主义与經驗批判主义”[1]中都精辟地談到了。恩格斯对时間和空間作出了非常确切的定义[2]。

然而，不能忘記，在世界上沒有一成不变的东西，而是一切都在运动，一切都在变化。科学也在变化和发展。特别是在最近一个世紀里，科学有着更大規模的发展，尤其是象物理学和化学这样的自然科学。科学的发展經常会揭示許多新的极其复杂的問題。对其中的某些問題，科学暫时还沒有找到非常令人滿意的答案。所有这一切都是很自然的。任何科学的正常发展途径就是这样。

例如，現今二十世紀的两門极其重要的学科——量子論和相对論的情况尤其是如此。在这两門学科中，測量起着很重要的作用，因而有名的英国物理学家爱丁頓（Eddington）[3]曾据此断言說，如果某量經常避开我們的測量，則我們認为它是不存在的。爱丁頓的这一断言具有原则性的錯誤。

在宇宙中，有許多直到現在人們尙不知道的恒星、行星和彗星。但决不能沒有根据地断言說，这些天体是不存在的。

任何測量的結果都是观測量和作为度量单位的同类量之比。考虑到这一情况的同时，还必須記住，即使发現了物体的性质（运动学或动力学方面），但这种性质本身不是由此所創造的，也就是說不是由測量所創造的；这种性质是不依賴于測量而存在着，因而在測量之前就存在着的[5]。

在某些新的科学領域中，例如在量子論中，測量的困难是和对象（原子、电子等等）本身的微小以及其結构的特点有关的。所以，在外国文献中（甚至部分苏联文献中），有人断言，認識宇宙現象的精确度界限是絕对的，甚至还說，我們不应把原子現象作为空間和时間中的現象来描述[14]。

所有这种类似的断言，都具有原則性的錯誤。在本书中，我們不去論証这些以及与其类似的断言是謬誤的。

测量的实质

認識我們周围的事物和現象是一个复杂的过程。它起始于我們感觉器官所获得的感觉。

認識現象时，我們要把事物的量和质区别开来。在研究量的現象时，我們要进行点算和測量。点算是在单个物体归併（零散总和）时进行的。例如，通过点算可以确定书柜中书的本数、畜群中牲口的头数、商店內香烟的包数等等。

零散总和中的項数是个絕对值，所以点算是絕对运算。假如有两位銀行工作人員在点算同一錢包中的錢数时得出不同的結果，那末无疑其中一定有一个人（也可能是两个人）算錯了。測量是一个更复杂的过程，而点算是它的一个組成部分。

我們引用了这样一个定义，即測量某一个量就是将其与作为測量单位的同类量作比較。因而，測量是两个同类量的比較过程。經过測量，我們获得一个表示观測量等于測量单位多少倍的不名数。如果以N表示此数，以Q表示观測量，以U表示測量单位，則可以写出下列等式：

$$Q=N\cdot U.$$

用沿綫依次放置丈量器械（例如鋼带尺）的方法来量取直綫的长度，就是典型的測量例子。这种測量叫做直接測量。借助于直接測量，可以确定器皿中液体的体积、物体的重量等等。用經緯仪測角，也属于直接測量。

用求积仪測量图形面积、用溫度計測量物体溫度、用安培表測量电流强度、用視距仪測量直綫长度或用流速仪測量河流中水的流速时，分划尺上的讀数使我們有可能确定所求量的数值。但在这里已經沒有两个同类量的直接比較了。不过，就是在这种情况下，通常也是称为直接測量。

所以，凡是用相应仪器或器械进行測量而获得所求結果，且測量是由在这一仪器或器械上讀取的某些讀数来完成的，則此种測量属于直接測量，在必要时，測量結果还应施加溫度、气压、仪器各部傾斜等等对仪器影响的相应改正数。

但是經常有这样的場合，測量所得的不是所求量，而是与此量有关的另一个量。例如，当根据自由落体的观測結果測定重力时，我們要測量自由落体在一定时間內所通过的距离，或者观測摆的摆动。在这种情况下，为了获得所求量的数值，必須根据所求量（例如重力）和直接观測量（例如摆的长度及其摆动周期）之間的关系式来进行計算。

这样的量叫做間接观測量。根据三角形的一个边和两个角来确定三角形的边长，就是間接測量的例子。

当然，間接測量需要知道所求量和直接观測量之間的精确关系。这种表示所求量对另一些量的函数从属性之精确关系，是以数学公式即方程式表示的。确定这些公式跟測量过程沒有任何关系。这些公式在測量之前就应該是已知的了。例如，三角形的边角关系公式在三角学中就有了。

在物理学中，自許多量中，取长度、时間和质量作为基本量。

和基本量的直接测量有关的間接测量，在度量衡学中称为絕对测量。

現在我們来研究在直接测量中的观测量和测量单位之間的关系式：

$$Q=N\cdot U. \qquad (\text{I})$$

由此可以看出，为了获得Q量的所求值，必須：

（1）进行相应的测量，求得表示观测量数值的不名数N；

（2）知道或者测量度量单位U本身。

最后一項工作称为度量单位检定。

根据测量結果（即知道N），可按公式（Ⅰ）确定Q或U（根据我們所知道的是什么而定）。例如，知道了带尺或綫尺的长度，即可求得直綫长度Q；相反地由其它的测量中知道了长度Q，即可求得测量单位的长度U，也就是說，进行丈量器械的检定。

知道了恒星的坐标，即可借子午仪来确定表差。但是同样，子午仪和表也可确定恒星的赤径。

测量时，必須要有相应的测量仪器或器械。現在的仪器，特别是那些精密仪器，有比較完善的結构，它們采用了最新的科学和技术成就。

在使用这些仪器之前，必須仔細地整置这些仪器，校正和調整仪器各部的运轉，确定常系数和各种指标的数值。这些是在测量中对根据仪器分划尺和测微鼓所进行的讀数施加改正所必需的。在测量时，要保护仪器使不受外界影响，例如太阳光的照射、风、灰尘、潮湿、震动等等。为了使测量結果所包含的誤差尽量少一些和小一些，所有这一切是必需的，这种誤差是由于仪器不完善所引起的，因而叫做仪器誤差。

为了测量一定的物理量，就需要有一定的仪器，而且同一个量可以用不同的方法和不同的仪器来测量。

在测量学和天文学中，需要测量的基本量是长度、时間和角度。

必須記住，用于测量的器械和仪器，也和利用这些器械和仪器所进行的测量本身一样，对于認識客观世界和其規律性来說，是极其重要的。但是，所有这些仪器、器械和测量本身，只是研究自然及其不依人們的意志、仪器、器械和测量为轉移的客观規律之工具，所以不能以事物和用于测量的仪器之相互关系来代替实际存在的事物。

現在，在机械化和自动化的时代里，偶尔会听到和讀到关于完全可以取消人参加测量过程以及从而可以消除这些测量結果的主观性与观测者有关的說法。这种說法不仅在外国文献中有，就是在苏联文献中也有[107]。必須肯定这种說法是不正确的，因为没有人参加是不能获得测量結果的。

在测量时，要把实际精度和测量結果可以达到的最高精度之概念区别开来。测量的实际精度，首先是与测量对象的性质以及进行测量的目的相适应的。

测量对象的性质决定我們对测量精度提出各种极其不同的要求。例如，沼泽或丛林的寬度，由于它們的边界具有某种不定性，故没有必要让测量精度达到一毫米。一般說来，精度只要达到一米就够了。石质建筑物的寬度就可以用达到一厘米的精度来测量。人的体高测量精度达到一厘米也是必要的。但是以同样的精度来测量松树或白樺树的高度那是没有根据的，因为这些对象具有众所周知的特点。一般来說，天然的存在于自然界中的客观事物，很少需要用达到百分之一毫米的精度来测量其距离和长度。

当测量人工結构物时，經常需要顧及到微米，甚至到微米的小数。测量单位的检定，

对测量提出了特別高的精度要求。

在测量工作領域中，为了建立旨在获得大面积地图的平面控制和高程控制时，需要进行非常精密的測量，而为了建立旨在解决关于确定地球的形状和大小以及研究地壳的长期变化等等科学任务的大地控制时，則需进行更加精密的測量。

测量控制点必須用鋼筋混凝土的一套块形标石坚实地固定在地面上。在这些标石上面的水平金属板上或球状頂上，鈷一个点或刻两条垂直綫。在现代的技术条件下，可以刻粗細为一个微米的細綫条。假定基綫长度等于10公里，則由于以刻綫代替几何綫而引起的相对誤差达到基綫长度的 $1:10^{10}$。現在基綫測量最高的相对精度約为 $1:10^{6}$。因此，在現在的大地测量中，基綫两端的細綫条寬度暫时还不需要达到一个微米。

在24米殷鋼基綫尺的分划尺上刻綫条时，这样的精度也不能認为是合适的。殷鋼基綫尺最后要借助于标准杆尺和国家的米杆尺——原尺作比較。正如实驗所表明，这种原尺长度的測量誤差平均达到 0.12μ。因而，这种測量的相对誤差約为 $1:10^{7}$。

可以看出，杆尺的检定誤差限制着控制测量工作的精度。这一情况迫使我們去寻找另一种更完善的长度原尺。現在，人們認为具有很大稳定性的光波长度就是这种长度原尺。

利用光波作为长度原尺，使我們有可能利用光干涉的原理来检定丈量器械，这就大大地提高了测量距离的精度。此外，对于距离测量本身来說，也可以利用光干涉和无綫电波。現在，力求大大地提高測量結果精度的相应研究正朝着这一方向前进❶。

在談到距离測量时，我們沒有涉及到象測量覘标的坚固性、地壳上部有节奏的变动（周日变动和季度变动）等等問題。这些問題应該是創造更精密的測量方法时专門研究的对象。这是今天的科学任务。

观　測　誤　差

人类在各种不同的科学和技术部門中进行测量时所积累起来的丰富經驗，使我們确信，通过测量不能获得完全精确的数值 N。观测量 Q 与度量单位 U，除了极少数的以外，都是不可通約的量；这就已經表明，观测量的数值 N 經常不能以有限的数字加以表示。

上面已經指出，在測量結果中出現誤差的某些原因。我們借以获得有关外界知識的感覚器官之局限性，是这种誤差的来源之一。

例如，用肉眼可以测定很长的距离，但精度不高。在約尔旦让没有經驗的人用眼睛目估同一距离之实驗中，得出下列結果：130；300；110；80；160；150；170；49；200；200米。精确的距离是137.2米。因而，对这种动作不习慣的眼睛，若不借助于仪器，那就不能很好执行自己的任务。表Ⅰ中所載的是多次目估图紙三分之一寬度的結果。

图紙的寬度为205.0毫米，所以三分之一寬度则等于68.3毫米。

由表中可以看出，眼睛能够不用任何仪器来确定三分之一的頗寬的紙带，其精度要比約尔旦所述的实驗結果高得多。前者，必須判断很长的距离，且是测定以度量单位表示的长度。而此处，眼睛所判断的是綫段的各个部分。这是两种不同的情况。

为了在测量时获得高精度的結果，人們就需要采用各种仪器。

---

❶ 在〔226〕中对测量問題写有有益的提示。

所以，必须指出一个很重要的情况。

表 I

編　　号	目 估 結 果（毫米）	Δ　（毫米）
1	67.7	+0.6
2	65.4	÷2.9
3	67.0	+1.3
4	72.9	−4.6
5	66.0	+2.3
6	69.1	−0.8
7	64.5	+3.8
8	66.0	+2.3
9	70.5	−2.2
10	70.9	−2.6
11	67.5	+0.8
12	65.0	+3.3
平　均　值	67.7毫米	

当我們談到人的感覚器官的某种局限性时，决不意味着：人不能了解絕对眞理，人的知識是有某种界限的。所以，恩格斯指出："人的眼睛的特殊构造幷不是人的認識的絕对界限。"〔24〕❶。此外，我們应該考虑到，我們在認識事物时，不只限于一些感覚。和感覚在一起的还有我們的思維活动。一句話，人类認識的界限是没有的。但是認識过程本身是无止境的。

人类在几千年来所积累起来的經驗表明，我們越来越接近于認識眞实，尤其是通过測量，可以越来越精确地确定存在于自然界中的事物大小之数值。为了在現在有了最完善的設备的情况下来判断这些成就，我們举一些例子❷。

苏联在納哈宾建造了一个供24米基綫尺用的野外实驗干涉检定器。

B.И.納札洛夫在其科学报告〔29〕中，引用了在1948年8月进行的对野外检定器长度的多次測定的結果（表Ⅰ）。

由表Ⅰ中可以看出，在所得的检定器长度結果中，前六个数字——24.0039都是一样的。在測量結果中一个也没有被舍去。

表Ⅰ中的資料說明了所謂測量結果的內部一致性。这些結果与检定器实际长度的符合程度如何呢？关于这一点，表Ⅱ作了回答。在該表中，比較了七根基綫尺在莫斯科測绘工程学院的莫斯科固定检定器上检定的长度（检定器长度是用一般方法測定的）和在納哈宾干涉检定器上检定的长度（〔29〕,135頁）。

为了簡便起見，在表中所列的是以微米为单位的基綫尺长度与标准长度24米之差。由表中可以看出，干涉检定器的基綫比莫斯科检定器长几十个微米。

875号基綫尺的結果可以不予考虑，因为它在检定之前就弯曲了。总的可以看出，即使野外检定器处于比莫斯科固定检定器（位于古建筑物的半地下室內）較不利的外界条件

❶ 恩格斯：《自然辯証法》，人民出版社1957年版，第200頁。——譯者注

❷ 这里的和下面的例子，大部分都是取自已发表的生产或研究著作。

表 II❶

日　期	$\Delta t°$	检定器长度 K	d	m
1948年 8月14日		μ 24м+3986.2		
			μ +10.0	
		3996.2		
			+3.6	
		3999.8		
			−10.2	μ
	−4°.9	3989.6		±5.6
			+9.4	
		3999.0		
			+1.4	
		4000.4		
		平均　3995.2		
8月15日		3986.1		
			−17.5	
		3968.6		
			+18.4	
		3987.0		
			−13.4	
		3973.6		±14.4
	−1.5		−33.2	
		3940.4		
			+14.6	
		3955.0		
			+24.4	
		3979.4		
			−12.0	
		3967.4		
		平均　3969.7		
8月20日		3966.0		
			−4.8	
		3961.2		
			−8.7	±8.6
		3952.5		
	−5.0		+16.4	
		3968.9		
			−16.0	
		3952.9		
			+6.8	
		3959.7		
			+15.1	
		3974.8		
		平均值　3962.3		

日　期	$\Delta t°$	检定器长度 K	d	m
1948年 8月21日		μ 24м+3944.3		
			μ −10.1	
		3934.2		
			−11.2	
		3923.0		
			+10.1	μ
	−3°.0	3933.1		±6.1
			+5.7	
		3938.8		
			+3.2	
		3942.0		
		平均　3935.9		
8月24日		3939.9		
			−7.0	
		3932.9		
			−5.4	
		3927.5		
			−24.1	
		3903.4		
	−6.7		+10.0	±11.8
		3913.4		
			−14.2	
		3899.2		
			−3.0	
		3896.2		
			−2.2	
		3894.0		
			+35.3	
		3929.3		
		平均　3915.1		
8月25日		3921.6		
			+5.5	
		3927.1		
			+9.8	
		3936.9		
	−3.4		−3.2	±5.0
		3933.7		
			−8.3	
		3925.4		
		平均值　3928.9		

下，然而它也得出了完全令人滿意的結果。如果进一步改善干涉检定器結构，尤其是当石英杆尺的长度（1.2米）知道得更精确，則此检定器无疑地会得出更好的結果。

另一个例子。为了了解經緯仪玻璃度盘分析的质量，用經緯仪在实驗室条件下測量了約为60°的角度；一共測了18次，每次旋轉度盘20°。所得結果載于表Ⅳ內。

我們看到，結果的內部一致性是这样的，与平均值之差在0″.4以內。

为了了解角观測結果与精确角值相接近的程度，我們可以用較精密的經緯仪观測同一

❶ 在 $\Delta t°$ 栏內所列的是在夜間对检定器进行多次測量时的溫度变化值。m 表示各个測量的中誤差，关于这一点，下面还要讲述。

表 III

基綫尺編号	长度（微米）		差数 l_2-l_1 μ
	莫斯科检定器l_1	納哈宾检定器l_2	
22	-3510 ± 3.8	-3531 ± 2.4	-21
32	-3173 ± 4.1	-3178 ± 3.7	-5
172	-1225 ± 3.3	-1262 ± 10.4	-37
175	-1706 ± 3.1	-1790 ± 7.7	-84
805	$+1884\pm2.6$	$+1869\pm4.0$	-15
875	$+1073\pm4.3$	$+953\pm8.5$	-120
944	$+532\pm3.9$	$+442\pm5.9$	-90

表 IV

测量編号	角值	与平均值之差
1	60° 0′ 24″.64	−0″.34
2	25.06	+0.08
3	25.00	+0.02
4	25.00	+0.02
5	25.06	+0.08
6	25.19	+0.21
7	24.88	−0.10
8	24.94	−0.04
9	24.94	−0.04
10	24.88	−0.10
11	24.94	−0.04
12	24.88	−0.10
13	24.94	−0.04
14	25.31	+0.33
15	25.21	+0.23
16	25.06	+0.08
17	24.75	−0.23
18	24.94	−0.04
平均值	60° 00′ 24″.98	

个角度，或者观测三角形的所有角度，并在知道了三角形內角和等于180°❶ 的情况下，計算三角形內角和的閉合差。

后一方法，是测量工作者所广泛采用的。例如，技术科学副博士 M.H. 索科洛夫在其一篇文章[29]中，列举了对精度不高、而在生产中广泛采用的仪器所做的极其詳細检验結果。这儿所說的是称为 TT-2 型 30″ 視距經緯仪。在实驗室条件下，对这一經緯仪做了检驗之后，由三个观测員观测了两个三角形的所有角度，且每个角度都测三个测回。根据这些观测的結果所計算的閉合差❷ 載于表 V 內（[29]，56頁）。

我們看到，实驗資料是与对該仪器的精度所提出的理論要求以及与观测条件很好地一致的。用最精密的仪器进行观测时，情况亦相同。当用精度特别高的仪器进行观测时，会

❶ 这一規則对平面图形来說是正确的。但是由于地球是球状的，因而当三角形很大时，应顧及到多余值或球面角超值，球面角超按下式計算：

$$\varepsilon''=\rho''\frac{P}{R^2},$$

式中P是图形面积；R是球体的半径；

$$\rho=\frac{180°}{\pi}=206265''\approx3438'\approx57°.30.$$

❷ 由测量学中知道，閉合差f通常理解为观测值总和与理論上的总和之差，或 $f=\Sigma_{观}-\Sigma_{理}$。

表 V

測量結果	閉	合	差			
	第一个三角形中			第二个三角形中		
	K	P	B	K	P	B
第一測回	$-15''.0$	$+10''.0$	$-23''.0$	$-10''.0$	$+37''.0$	$+9''.0$
第二測回	+23.0	+17.0	−43.0	−22.0	−50.0	−31.0
第三測回	− 2.0	−17.0	+ 6.0	−32.0	−23.0	−14.0
前两个測回	+ 4.0	+13.5	−33.0	−16.0	− 6.5	−11.0
前三个測回	+ 2.0	+ 3.3	−20.4	−21.3	−12.0	−12.0

得到什么样的三角形內角和的閉合差呢，这在以后可以看到。

由上述不同的測量結果中已經可以看出，实际上，不管測量进行得如何仔細，当多次重复时，測量結果在彼此之間总是有些差别的，与观測量的精确值也是有差别的。

任何其它測量的情况亦是如此。

不管我們进行測量是如何努力和熟練，不管我們所采用的仪器是如何精密，然而只要进行多次的重复測量，即可确信，在某量的一列观測值中，由左边算起的头几个数字，在該观測量的所有数值中都是相同的，而測量結果的最后几个数字，則在每个观測值中都是不同的。这就可以得出結論，測量結果，不是絕对精确的，而是含有誤差的。

用于測量的仪器愈完善，观測員愈熟練，測量愈仔細，外界条件愈有利，則在同一量的一系列的重复測量結果中所出現的共同数字就愈多，測量結果所含的誤差就愈小，其精度也就愈高。

这里可以非常恰当地指出，由对同一个量〔例如 60°0′20″的角度（表Ⅳ）〕的多次測量列中的共同数字所組成的数，表征着被測对象本身。这就是观測值列和随便写的数值列的重要区别点。

观測值的共同部分的数字愈多，則用測量确定被測对象測的某一特征更为精确。

在計算观測值列的共同数字个数时，必須考慮到的只是有效数字，在其前的零不算在內。例如，如果我們有一列观測值：

$$\left.\begin{array}{ll} 0.00046837 & \text{公里} \\ 0.00046845 & \text{公里} \\ 0.00046859 & \text{公里} \\ 0.00046841 & \text{公里} \end{array}\right\},$$

則这一列的数值有三个共同有效数字(468)，这是与为一般技术目的而进行的測量相适应的。在有效数字之前的零数説明了所选的度量单位和观測量相比是太大了。因而，在这种情况下，取毫米为度量单位是合理的。

在測量时，必須顧及到两种情况：

1．借以进行測量的度量单位，应在測量过程中实际不变。天然的度量单位——地球自轉的周期和具有一定顏色的光綫之光波长度，具有很大的不变性。正如实驗所証明，公制度量原器（米尺和公斤）的数值的大小保持得很好。

作业的度量单位在实践中有时会发生突变。例如，1934年夏天在莫斯科測量学院❶大地

❶ 現在叫做莫斯科測繪工程学院。

队的科学研究工作中发生过类似的情况，24米殷鋼带尺在工作期間縮短了0.47毫米。所以，在进行精密测量时，度量单位应在进行测量的前后与标准长度进行比較；此外还要采取措施来观察度量单位在测量过程中的不变性。

完全不变的尺度是沒有的。这是一种自然規律，从检定基綫尺用的541号三米杆尺与H_{15}杆尺的比較資料[30](1931—1945年)中就可以看出，比較結果載于表Ⅵ内。

表 VI

№541杆尺检定日期	№541杆尺长度 L	杆尺№541长度中杆尺H_{15}长度变化改正数 μ	杆尺的改正长度
1927年5月	3米−90″.3	0	3米−90″.3
1930年5月	−84.3	−0.6	−84.9
1931年10月	−81.7	−0.8	−82.5
1932年10月	−81.2	−0.9	−82.1
1933年11月	−81.7	−1.1	−82.8
1936年1月	−80.4	−1.4	−81.8
1937年10月	−79.0	−1.7	−80.7
1938年11月	−78.4	−1.9	−80.3
1940年9月	−77.5	−2.2	−79.7
1945年10月	−74.0	−3.0	−77.0

我們可以看出，541号杆尺在这一期間逐漸的显著的伸长是无可怀疑的❶。

显然，H_{15}杆尺也是在变化的，它在不断縮短。然而，正如由表Ⅵ的最后一栏所見，經过H_{15}杆尺长度变化改正的541号杆尺的长度沒有保持自己的恒定性，它随着时間而变长。这一情况說明，541号杆尺需要經常跟基本原尺进行比較。

根据国家标准的規定，1453—42原尺，根据它們的重要性，分为三类：第一类、第二类和第三类。

2．当我們談到观测对象精确值或眞值时，假定这一对象的大小在整个测量过程中实际是不变的。

例如，实地上很好标定的两点之間的距离、两个水准标志之間的高差、由三个埋石点所决定的角度等等，在实际上是不变的。

然而經常有这样的情况，即不得不测量在迅速变化着的对象，例如恒星的天頂距或方位角。这里必須談到的是对应于一定时刻的观测对象的大小。属于这类对象的，还有磁偏角，此种磁偏角，除了一般的周日变动以外，还受到和太阳上某些現象有关的所謂磁暴的影响。載有1898年3月15日在波鴻所进行的磁偏角观测之結果（[31]，344頁）的表Ⅶ說明这一类現象。

我們可以看出，在一昼夜的时間内，磁針发生了几次“跳跃”。例如，在半夜，15分鍾的时間内，磁針位移了27′。

如果我們知道所测对象随时間而变的規律，則可以将在不同时刻对这种对象所进行的测量归化至同一个时刻。因此，即使在自然界中沒有絕对不变的测量对象，然而总可以找到这样的一段时間，在这一段时間内，可在测量精度范围内認为被测对象的大小实际上是不变的，固定的。对于有些对象来說，这一段时間是許多年，而对于另一些对象来說，只

❶ 以后，就沒有繼續考察541号杆尺这种系統伸长。

是几分之一秒。这种在一定的时間內实际不变的观测对象的大小，在下面我們把它称为此对象的精确值或眞值。

表 VII

观测时間	磁偏角	观测时間	磁偏角
8 时	+2′	22 时 40 分	−37′
10 时	+8′	23 时 40 分	−4′
12 时	+8′	24 时 分	−15′
14 时	+14′	24 时 15 分	−42′
15 时 45 分	+36′	2 时 分	−17′
16 时 45 分	+31′	2 时 20 分	+18′
18 时	+1′	3 时 10 分	−11′
20 时	0′	4 时 分	0′
22 时	−8′	6 时 分	+13′

以 X 表示观测量的眞值，以 l 表示此量的观测值，以 Δ 表示 X 和 l 之差，此时

$$X-l=\Delta. \tag{I}$$

式中 Δ 是观测值 l 的眞誤差。

这样一来，我們可以确定一个原則：量的眞值减去其观测值等于眞誤差。

眞誤差也可按另一个原則来确定，即由观测值减去量的眞值。然而，只須遵守其中的一个原則。根据我們的看法，公式（Ⅰ）具有一定的优越性。

自高斯起，著名的測量学家遵循以公式（Ⅰ）来确定誤差的原則，不是偶然的。在現代著作中，可以举出B.格洛斯曼所著 1953年出版的最小二乘法教程[220]。

改正数的概念是和誤差的概念密切相关的。这一問題将在“观测的系統誤差”那一节內进行研究。

測量中的粗差

必須把对一定的仪器和作业方法来說是完全不允許的观测結果与精确值之差同誤差区别开来。

例如，有可能：（1）在直綫丈量时，算錯了一整尺，計算补长时没有从卷尺端点算起，把 6 看作 9；（2）在測角时，望远鏡没有照准应該照准之点，度或半度讀得不正确，記錯了讀数器的号碼；（3）在进行水准測量时，讀取标尺之前未将水准器气泡导至中央，把标尺上的一个数字看作是另一个数字，漏掉了五个厘米的分格，未按应讀的十字絲讀取；（4）在計算时，出現算术誤差，做了不应做的运算，小数点不在应有的位置上，等等。

在測量和計算时所有这类情况称为粗差。

在測量和計算中所出現的任何粗差，都說明在工作中注意不够。粗差虽然很少出現，但是工作不管如何仔細，仍然有可能出現，而且計算中出現得多一些。但在任何情况下，应該这样来組織測量和計算，即使任何粗差能及时发現，并从測量結果中消去。为此，要采用检測法或检算法。

任何检核，通常只有使用与測量或計算时所用的仪器或方法不相同的仪器或方法来进行时，才是眞正的检核。例如，在进行多次測角时，要在每一測回之后，将度盘旋轉某一个