财经类专科试用教材

经济数学基础

线性规划

崔福荫　戴宗儒　张自兰

高等教育出版社

财经类专科试用教材

经济数学基础

线性规划

崔福荫　戴宗儒　张自兰　编

高等教育出版社

近年来，各种形式的财经类专科学校、职业大学财经专业、管理干部学院等发展很快，迫切需要经济数学基础教材。为了适应这一要求，我们计划出版一套“经济数学基础”教材，其中包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《线性规划》、《运筹学》等书（前三本已出版）。可供财经类专科学校、职业大学、管理干部学院选作试用教材或教学参考书。由于时间紧促，书中肯定会有不少缺点、错误，欢迎读者批评指正。

《线性规划》全书共五章，每章后附有习题，书末有习题答案。

本书取材简明、通俗易懂，着重介绍线性规划问题的基本知识和求解方法，例题较多。

本套教材的主编是崔福荫，副主编是李志煦、戴宗儒、郑郁文、王尚文。

财经类专科试用教材

经济数学基础

线性规划

崔福荫　戴宗儒　张自兰　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 4.75 页　字数 120 000

1989 年10月第 1 版　1989 年10月第 1 次印刷

印数：0001—5440

ISBN 7—04—002439—X/O·820

定价 1.15 元

前　言

本书是根据高等专科学校经济类专业教学的需要而编写的。全书包括线性规划问题的数学模型、图解法和单纯形算法、对偶规划、管理决策与信息分析、特殊线性规划问题的解法（表上作业法、图上作业法）等五章。编者力求本书的阐述简明易懂，着重介绍线性规划问题的基本知识和求解方法；注重应用，不追求过份严密的数学推导和论证。书中举例较多，配有足够数量的习题，并附有习题答案。本书可做为高等专科学校财经管理类专业、高等财经院校、管理院校专科数学基础课程的教材，也可供自学考试、电视大学的师生和经济工作者参考。

本书初稿曾在有关院校试用过，效果良好。在试用期间这些院校的师生提出了许多宝贵意见，据此我们对讲稿作了相应的修改，在此对他们表示衷心的感谢。

全书先后由西安交通大学游兆永教授和北京经济学院林寅副教授审阅。

由于编者水平所限、错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

目　录

第一章　线性规划问题的数学模型及其标准形式 ……… （1）

§1—1　绪论 ……… （1）

§1—2　线性规划问题的数学模型 ……… （2）

§1—3　线性规划问题的标准形式 ……… （11）

§1—4　线性规划问题的基本解和最优解 ……… （16）

习题一 ……… （20）

第二章　线性规划问题的解法及原理 ……… （26）

§2—1　线性规划问题的图解法 ……… （26）

§2—2　线性规划问题的几何意义 ……… （30）

§2—3　单纯形法 ……… （33）

§2—4　单纯形法的说明 ……… （39）

§2—5　对于有“≥”及“=”的约束条件的线性规划问题 ……… （42）

§2—6　单纯形法的矩阵表示 ……… （48）

§2—7　改进单纯形法 ……… （53）

习题二 ……… （59）

第三章　对偶线性规划问题 ……… （63）

§3—1　对偶线性规划 ……… （63）

§3—2　线性规划问题的对偶理论 ……… （67）

§3—3　对偶单纯形法 ……… （75）

习题三 ……… （78）

第四章　管理决策与信息分析 ……… （80）

§4—1　影子价格 ……… （80）

§4—2　灵敏度分析 ……… （84）

习题四 ……… （98）

第五章　特殊线性规划问题的不同解法 ……… （102）

§5—1　运输问题的表上作业法 ……………………………… (102)
§5--2　运输问题的图上作业法 ……………………………… (121)
习题五 ……………………………………………………………… (127)
习题答案……………………………………………………………… (131)

第一章　线性规划问题的数学模型及其标准形式

§1—1　绪　论

线性规划是数学规划中理论较完整、方法较成熟、应用较广泛的一个分支，它可以用来解决科学研究、工程设计、活动安排、军事指挥、经济管理等许多方面提出的大量问题。

我们知道，在工农业生产、运输和经济管理等方面，经常遇到两种类型的问题，一类是已给定一定数量的人力、物力资源，问怎样安排运用这些资源，才能使完成的任务量最大，收到的效益最大；另一类是已给定一项任务，问怎样统筹安排才能使完成这项任务的人力、物力资源量为最小，事实上这两类问题是一个问题的两种提法。这样的问题就是属于线性规划所要研究和解决的问题，对于一些简单的极值问题，在微积分中我们可以用Lagrange乘子法得到解决，但当变量数目和约束条件数目相当大时，比如上千，甚至上万个，就不容易解决了，这就需要化为线性规划问题，利用计算机以求得解决。

规划论是一门称为运筹学的学科的重要分支。运筹学包括规划论、更新论、存贮论、质量控制、排队论、对策论等分支，规划论中又包括了线性规划、非线性规划、动态规划等三个方面。线性规划的理论、方法比较简捷，只要把所探讨问题的性质、指标因素等，限制在约束条件之中，求出满足约束条件的解，就可以选择或确定符合要求的最优方案。因此，线性规划是运用数学模型解决有限资源最优配置的有效工具和灵活手段。

资源配置问题一直被认为是经济学的一个十分重要的问题。线性规划是一个更接近现实经济活动情况的资源最优配置方法，

可以对资源配置问题提供数量的解答。因此，不论在宏观经济领域，还是在微观生产经营活动中，线性规划理论与方法愈来愈广泛地得到应用。

早在 1939 年，苏联康特洛维奇（Л. В. Канторович）从运输问题入手开始研究，写出了《生产组织与计划中的数学方法》，它是这方面的早期著作。40 年代末丹捷格（G. B. Dantzig）等人进一步从理论和方法上完善了线性规划学科，他在 1947 年与 L·霍尔维茨（L·Hurwicz）共同发明了求解线性规划的单纯形法，为线性规划作为一门学科奠定了基础。D. 盖尔（D. Gale）；H. W. 库恩（H. W. Kuhn）和 T. W. 塔克（A. W. Tucker），在发展对偶理论上作出了重要贡献，从而形成了应用数学中发展迅速、应用广泛而且十分活跃的学科——线性规划。在 50 年代，线性规划已经成了经济学家们分析经济问题的重要工具，在这方面贡献突出的有苏联的康特洛维奇和美国的库甫曼(T. C. Koopmans)，他们联合获得了 1975 年诺贝尔经济学奖金。随着现代电子计算机的不断发展，计算能力的大大提高，使这一数学方法的应用，更具有广泛性。

我国在这方面的研究开始于 50 年代，在不长的时间内线性规划理论与方法得到了广泛采用并收到了很好的效果。

从 1958 年以来对规划论在理论上进行了一些本质性的深入研究，使得求解线性规划的规模愈来愈大，而且规划论和其他数学分支的联系愈来愈多。所以，我们学习这门功课，对于今后的学习和工作都是很有用途的。

§ 1—2　线性规划问题的数学模型

在许多实际问题中总存在着已知量和未知量，若将这些量之间的依赖关系，用数学式子表示出来，那么就称这些数学式子为实际问题的数学模型，或者说，数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式，线性规划问题的数学模型包含两个组成部分，

一是目标函数，二是约束条件．目标函数是一个由欲达到最优目的的有关量所构成的关系式，根据研究的目标是最大还是最小，在目标函数前面冠以“max”或“min”；约束条件是欲达到预期目的所受到的现实客观环境的制约，将这种制约用等式或不等式表示，即为约束条件，以后简记为s．t；是“subject to”的缩写．

研究数学模型，有助于认识这类问题的性质和寻求它的一般解法．但线性规划问题涉及到的实际问题是非常广泛的，常见的有（一）物资调运问题，（二）最短邮递路线问题，（三）场地定位问题，（四）生产组织和计划安排问题，（五）合理下料问题，（六）配料问题，（七）布局问题等等．现在我们只能先从其中某些典型的实际问题讲起，不能面面俱到，但这些问题的做法都相类似，凡未涉及到的问题可由此及彼地推想出来．

例 2.1 运输问题

设 A_1、A_2、A_3 三地某时期产煤各为 7 千吨、4 千吨、9 千吨；销地为 B_1、B_2、B_3、B_4 四地，销量分别为 3 千吨、6 千吨、5 千吨、6 千吨，问题是如何按下列运价表编制一个调运方案，使总运费最少？

发货＼收货	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

解 设 S 表示总运费，x_{ij} 表示由煤产地 A_i 运往销地 B_j 煤的数量（单位：千吨），（$i=1, 2, 3$；$j=1, 2, 3, 4$），例如

x_{23} 表示由煤产地 A_2 运往销地 B_3 煤的数量等等。如下表。

收货 发货	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	7
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	4
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	9
销量	3	6	5	6	

因为由产地 A_1 运往四个销地煤的总数应为 A_1 的产量 7 千吨，即有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7\text{.}$$

同样由产地 A_2、A_3 运往四个销地煤的总数应分别为 A_2 的产量 4 千吨和 A_3 的产量 9 千吨，即

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4\text{,}$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9\text{.}$$

另一方面，三个产地供给销地 B_1 煤的数量应等于 B_1 的需要量 3 千吨，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3\text{.}$$

同理可得

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=6\text{,}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=5\text{,}$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6\text{.}$$

因此，这一问题的数学模型为

$$\begin{aligned}\min\ S=&3x_{11}+11x_{12}+3x_{13}+10x_{14}\\&+x_{21}+9x_{22}+2x_{23}+8x_{24}\\&+7x_{31}+4x_{32}+10x_{33}+5x_{34}\text{.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{s. t.}\quad &x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7\text{,}\\&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4\text{,}\\&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9\text{,}\end{aligned}$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=6,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=5,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6,$$
$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

一般说来，我们用 a_j 代表销量，b_i 表示产量，c_{ij} 表示运价。

若产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{3} b_i=\sum_{j=1}^{4} a_j,$$

数学模型利用“Σ”号可表示为

$$\min\quad S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij},$$
$$\text{s. t.}\quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=b_i\ (i=1,\ 2,\ 3),$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij}=a_j\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4,),$$
$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

若产大于销，即

$$\sum_{i=1}^{3} b_i>\sum_{j=1}^{4} a_j,$$

数学模型为

$$\min\ S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij},$$
$$\text{s. t.}\quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij}\leqslant b_i\quad (i=1,\ 2,\ 3,),$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij}=a_j\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4,),$$
$$x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,).$$

若销大于产，即

$$\sum_{i=1}^{3} b_i \leqslant \sum_{j=1}^{4} a_j,$$

数学模型为

$$\min\ S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij}=b_i \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij}\leqslant a_j \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

例 2.2 产品安排

某工厂有生产甲、乙二种产品的能力，且生产一吨甲产品需要 3 个工日和 0.35 吨小麦，生产一吨乙产品，需要 4 个工日和 0.25 吨小麦。该厂仅有技工 12 人，一个月只能出 300 个工日，小麦一个月只能进 21 吨，并且还知生产一吨甲产品可盈利 80（百元），生产一吨乙产品可盈利 90（百元）。那么，这个工厂在一月中，应如何根据应现有条件安排这两种产品的生产，使之获得最大盈利？建立这个问题的数学模型。

解 设 x_1、x_2 分别表示一月中生产甲、乙二种产品的数量，则最大盈利为

$$S=80x_1+90x_2,$$

工日的约束为 $3x_1+4x_2\leqslant 300$；原料小麦的约束为 $0.35x_1+0.25x_2\leqslant 21$，该问题的数学模型即为

$$\max\ S=80x_1+90x_2,$$

$$\text{s.t.}\ 3x_1+4x_2\leqslant 300,$$

$$0.35x_1+0.25x_2\leqslant 21,$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

例 2.3 下料问题

已知工厂有一批（数量充分多）长为 180 cm 的钢管，现需

要 70 cm 长的不少于 100 根，52 cm 长的不少于 150 根和 35 cm 长的不少于 100 根，问如何下料才能使边料最少？

解 由题意知，经过试算可以有 8 种不同的下料方法。

设 x_i 为用第 i 种截料的方法所截钢管的根数，列表如下：

规格	截法								需要量
	x_1（一）	x_2（二）	x_3（三）	x_4（四）	x_5（五）	x_6（六）	x_7（七）	x_8（八）	
70(cm)	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52(cm)	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35(cm)	1	0	1	3	0	2	3	5	100
边料 (cm)	5	6	23	5	24	6	23	5	

设 f 为剩余边料的总长。数学模型为

$$\min\ f = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8,$$

$$\text{s. t.}\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100,$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150,$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_3 \geqslant 100,$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_8 \geqslant 0.$$

例 2.4 营养问题

假定在市场上可以买到各种不同的食品，且第 j 种食品每单位售价 c_j（元）。现在要求考虑 m 种基本营养成分，若要保证良好健康，对第 i 种营养成份，每人每天不能少于 b_i 个单位。最后假定第 j 种食品每单位含有 a_{ij} 个单位的第 i 种营养。在满足保证良好健康的起码营养要求的条件下，来确定最经济的饮食。试建立这问题的数学模型。

解 设 x_j 为购买第 j 种食品的单位数。设 S 为购买食品的总费用。于是，这问题的数学模型为

$$\min\ S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j,$$

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1,\\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2,\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m,\\
& x_j\geqslant 0\quad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)\ .
\end{aligned}
$$

例 2.5 进销库余问题

某商店制订某商品 7—12 月进货售货计划，已知商店仓库容量不得超过 500 件，6 月底已存货 200 件，以后每月初进货一次，假设各月份某商品买进、售出单价如下表所示，问各月进货售货各多少，才能使总收入最多？

月	7	8	9	10	11	12
买进(元)	28	24	25	27	23	23
售出(元)	29	24	25	28	22	25

解 设 7—12 月各月初进货量分别为 x_i 件，而各月售货数量分别为 y_i 件 $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)$，$S$ 为总收入。由题意，得该问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\max\ S= & 29y_1+24y_2+25y_3+28y_4+22y_5+25y_6\\
& -(28x_1+24x_2+25x_3+27x_4+23x_5+23x_6)\ ,\\
\text{s. t.}\quad & y_1\leqslant 200+x_1\leqslant 500,\\
& y_2\leqslant 200+x_1-y_1+x_2\leqslant 500,\\
& y_3\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3\leqslant 500,\\
& y_4\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4\leqslant 500,\\
& y_5\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4+x_5\\
& \quad\leqslant 500,\\
& y_6\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4+x_5\\
& \qquad\qquad -y_5+x_6\leqslant 500,\\
& x_i\geqslant 0,\ y_i\geqslant 0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)\ \text{为整数}.
\end{aligned}
$$

例 2.6 产品配套问题

一个工厂的甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，每件产品由 4 个 A 零件和 3 个 B 零件组成。这两种零件耗用两种不同的原材料，而这两种原材料的现有数额分别是 300 公斤和 500 公斤。每个生产班的原材料耗用量和零件产量如下表，问这三个车间应各开多少班数，才能使这种产品的配套数达到最大？

车间	每班用料数（公斤）		每班产量（个数）	
	第 1 种原材料	第 2 种原材料	A 零件	B 零件
甲	8	6	7	5
乙	5	9	6	9
丙	3	8	8	4

解 设 x_1、x_2、x_3 是甲、乙、丙三个车间所开的生产班数，由原材料的限制条件，得

$$8x_1+5x_2+3x_3\leqslant 300,$$

$$6x_1+9x_2+8x_3\leqslant 500.$$

甲、乙、丙生产 A 零件总数是

$$7x_1+6x_2+8x_3,$$

生产 B 零件总数是

$$5x_1+9x_2+4x_3.$$

因为目标函数是要使产品的配套数最大，而每件产品需要 4 个 A 零件，3 个 B 零件，所以产品的最大产量将不超过

$$\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4} \text{和} \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}$$

中较小的一个，设 S 是产品的配套数，即

$$S=\min\left\{\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4},\ \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right\}.$$

这个目标函数不是一个线性函数，但是我们可以通过适当的变换把它化为线性的。为此，设

$$y=\min\left\{\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4},\ \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right\}.$$

由上式可得下面与之等价的两个不等式：

$$\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4}\geqslant y \text{和} \quad \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\geqslant y.$$

于是得出数学模型

$$\max\ S=y,$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{aligned} &7x_1+6x_2+8x_3-4y\geqslant 0,\\ &5x_1+9x_2+4x_3-3y\geqslant 0,\\ &8x_1+5x_2+3x_3\leqslant 300,\\ &5x_1+9x_2+8x_3\leqslant 500,\\ &x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0,\ y\geqslant 0. \end{aligned}$$

例 2.7 任务分配问题

设某车间有四种产种 A_1、A_2、A_3、A_4 的生产任务，分配给该车间的四台机床 B_1、B_2、B_3、B_4 加工，各台机床均可生产这四种产品；各种产品也均可被这四台机床加工。每台机床加工各种产品的成本如下表所示。在每台机床接受一种产品生产任务的前提下，如何分配生产任务，才能使总成本最低？

机床 / 成本 / 产品	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	3	6	8
A_2	6	5	3	8
A_3	12	4	8	5
A_4	10	3	6	2

解 设 $x_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 表示第 B_j 台机床是否加工 A_i 种产品。若用(1，0)两个数值分别表示加工或不加工某种产品，当 $x_{ij}=1$，表示第 B_j 台机床加工第 A_i 种产品，当 $x_{ij}=0$ 时，表示第 B_j 台机床不加工第 A_i 种产品$(i,j=1,2,3,4)$，则数学模型可表示为

$$\min\ S = 10x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} + 6x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} + 8x_{24} + 12x_{31} + 4x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} + 10x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} + 2x_{44},$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

（表示某台机床只能加工某种产品），

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

（表示某种产品只能被某台机床加工），

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

这一问题中的 16 个变量都只取 0 和 1 两个值，称这类规划为 0—1 规划。

以上这些从实际问题中建立起的数学表达式，如果约束条件是由一些线性不等式或线性方程所组成，而且目标函数是欲求未知变量线性函数的一类条件极值问题，则统称为线性规划问题（简记为 ***LP***）。

§1—3 线性规划问题的标准形式

一、线性规划的标准形式

上面我们列举了一些线性规划问题的数学模型，在模型的约束条件中除了非负约束外，还存在着"≥"、"≤"和"="三种情况，特别是遇到"≥"、"≤"号时，在研究线性规划问题的性质，和求解过程中都会带来困难，所以必须将各种形式的线性规划问题化为下面这种等价的标准形式

$$\min\ S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

$$\text{s. t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$