经济数学

刘 巍 卢玉贞 魏 华

大连海事大学出版社

目 录

第一章　数学基础与数学思维

第一节　经典集合

一、基本概念

现代数学与集合论密切相关。集合可以表现概念，而集合的运算和变换，可以表现判断和推理。因此，用数学语言可以描述和表现其它许多学科的内容和思想。

当我们考虑某个概念时，总离不开一定的论域。当我们讨论一个具体问题时，也总是把自己的议题限制在一定的范围内。我们把这个范围（被讨论的全体对象）称为论域。论域常用大写的英文字母 U， V，…， X， Y，…等表示。论域中的每个对象，统一称之为元素。以相应的小写字母 u， v，…， x，y，…等表示。

给定论域 U， U 中某一部分元素的全体叫做 U 上的一个集合，通常用大写字母 A， B，…等表示。

设 A 是一个集合，若某事物 a 是集合 A 的一个元素，则我们将记为

$$a \in A$$

意义为"a 属于 A"或"a 在 A 中"。若 a 不是集合 A 的元素，则记为

$$a \notin A$$

不含有任何元素的集合称为空集合，记为 Φ。

对于集合 A，当 A 所包含的元素为有限多个时，我们称之为有限集合，否则，称之为无限集合。

若能写出一个集合的所有元素的记号，则我们可以用一个括号把这些记号括起来以表示这个集合。如

$$A=\{u_1,\quad u_2,\quad \cdots,\quad u_n\}$$

表示一个具有 n 个元素的集合。而集合常常是无法枚举的，这时采取记号

$$A=\{u \mid \cdots\}$$

花括号中竖线右方是对 U 的一种解释，它给出了 A 中元素的特征。例如记 R 为实数集合，则

$$A=\{f \mid f(x)\text{是连续函数，}\quad x\in R\}$$

就表示实数域上全体连续函数的集合。再如二次方程 $x^2-5x+4=0$ 所有的根组成的集合可记为

$$C=\left\{x \,\middle|\, x^2-5x+4=0\right\}$$

这里定义的集合是经典集合，它的一个明显特征是：从论域 U 中任意指定一个元素 u 及任意一个集合 A，要么 u 属于 A，要么 u 不属于 A，二者必居其一且仅居其一。从逻辑上讲，这一规定叫作“排中律”，可以说这是经典集合论最基本的特征之一。

若用函数来描述这个基本特征，则记

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1 & u\in A\\ 0 & u\notin A\end{cases}$$

称之为集合 A 的特征函数，它定义在 U 上，而取值只是 0 和 1 。取值为 1 时，表示 u 属于 A，而取值为 0 时，表示 u 不属于 A。

设 A 和 B 是 U 上的两个集合，如果对任意 $u\in U$，都有

$$u\in A\Rightarrow u\in B\quad(\text{若}u\in A\text{则}u\in B)$$

便称集合 B 包含集合 A，记为 $B\supseteq A$，或称 A 被 B 包含，记为 $A\subseteq B$。A 叫作 B 的子集。

如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。

二、集合与逻辑符号

设 U 为论域，p 和 q 为 U 中元素的两个特性，设 $A(p)$为 U 中具有特性 p 的元素的集合，记为 $P=A(p)$，设 $A(q)$为 U 中具有特性 q 的元素的集合，记为 $Q=A(q)$。

如果 $P\subseteq Q$，如图 1.1.1 所示，就可以说，具有特性 p 的元素 x 也具有特性 q。换句话说，属于 $A(p)$的元素也属于 $A(q)$。那么就说特性 p 蕴涵特性 q，记为 $p\Rightarrow q$,读作："p 蕴含 q"。

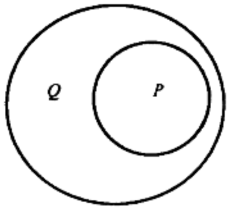

图 1.1.1　特性蕴涵图

当我们把第一个特性 p 看成是假设，第二个特性 q 看成是结论时，还可以说 $p\Rightarrow q$ 是一个推理。

例如，设论域 U 是所有四边形，特性 p 为 U 中图形对边相互平行，特性 q 为 U 中图形四个角是直角，即 $P=A(p)$为平行四边形的集合，$Q=A(q)$为矩形的集合，因此有 $Q\subseteq P$。那么就说特性 q 蕴涵特性 p，记为 $q\Rightarrow p$。

设有蕴涵 $p\Rightarrow q$，则蕴涵 $q\Rightarrow p$ 称为上述蕴涵的逆蕴涵。应注意，当蕴涵 $p\Rightarrow q$ 正确时，其逆蕴涵 $q\Rightarrow p$ 可能是正确的，也可能是不正确的。如上例就是如此。

如果两个特性 p 和 q 互为逆蕴涵，即 $p\Rightarrow q$ 和 $q\Rightarrow p$ 都是正确的，则称特性 p 和特性 q 是等价的，记为 $p\Leftrightarrow q$。

在许多书中所说的"充要条件"，就是互为逆蕴涵，亦即是等价的。

设 p 是论域 U 中的一个特性，记

$$P=A(p)=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x \text{ 具有特性 } p\}$$

分两种情况讨论：

(*a*) 当 $P=U$ 时，U 的所有元素都具有特性 p，则可说："对于一切 x，特性 p 都是正确的"。我们用符号语言表示如下：

$$(\forall x)\quad (x\text{具有特性}p)$$

或简写成

$$(\forall x)\quad (p)$$

这里的符号∀读作"任意的"或"任给"或"对于一切"。

(*b*) 当集合 P 是非空的，则 U 中至少有一个元素具有特性 p。那么就说："至少存在一个 x，它具有特性 p"。我们用符号语言表示为

$$(\exists x)\quad (x\text{具有特性}p)$$

或简记为

$$(\exists x)\quad (p)$$

这里符号∃读作"至少存在一个"。

∀和∃这两个符号在推理中经常用到，我们称之为逻辑符号。

三、集合的运算性质

数学上逻辑运算的概念有"与"、"或"、"非"，相应的可定义集合的运算如下

定义 1.1.1 设 A 和 B 为两个集合，则

$$A\cap B\overset{\Delta}{=}\left\{u\,\middle|\,u\in A\text{并且}u\in B\right\}$$

$$A\cup B\overset{\Delta}{=}\left\{u\,\middle|\,u\in A\text{或者}u\in B\right\}$$

$$A^{c}\overset{\Delta}{=}\left\{u\,\middle|\,u\notin A\right\}$$

分别称为 A 与 B 的"交集"、"并集"和"余集"。图 1.1.2 是集合运算的图示。

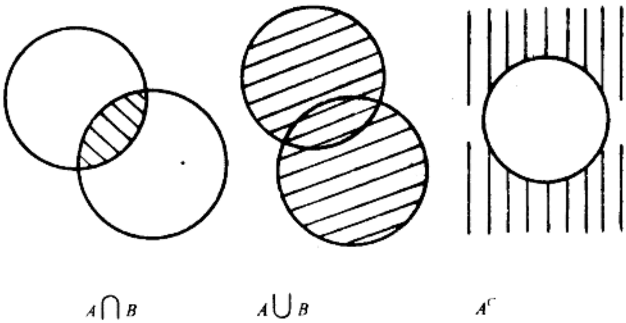

图 1.1.2　集合运算的图示

例如，设 U 是某一特定人群，A 是 U 中所有中国人构成的集合，B 是 U 中所有男人构成的集合，则

$$A\cap B=\left\{u\,\middle|\,u\in U,\ u\text{既是中国人，又是男子}\right\}$$

$$=\left\{u\,\middle|\,u\in U,\ u\text{是中国男子}\right\}$$

$$A\cup B=\left\{u\,\middle|\,u\in U,\ u\text{或者是中国人，或者是男子}\right\}$$

$$=\left\{u\,\middle|\,u\in U,\ u\text{不是外国女子}\right\}$$

$$A^c=\left\{u\,\middle|\,u\in U,\ u\text{不是中国人}\right\}$$

$$B^c=\left\{u\,\middle|\,u\in U,\ u\text{不是男子}\right\}$$

关于集合的交、并、余运算，我们有如下性质：

1. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
2. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
3. $A\cup A=A,A\cap A=A$　　(幂等律)
4. $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B}\cup\mathrm{A}$　　$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{B}\cap\mathrm{A}$　　(交换律)
5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
   $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　　(结合律)

6. $(A\cap B)\cup B=B$　　$(A\cup B)\cap B=B$　　(吸收律)

7. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　　(分配律)

8. $A\cup U=U, A\cap U=A$

$A\cup\Phi=A, A\cap\Phi=\Phi$　　(两极律)

9. $(A^c)^c=A$　　(复原律)

10. $A\cup A^c=A, A\cap A^c=\Phi$　　(补余律)

集合交、并运算也可推广到多个集合，如

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

这样，前述性质中很多可以推出相应的结论，读者可自己思考一下.

四、有限集合的讨论

下面我们对有限元素的集合做进一步的讨论。

我们用符号$|A|$表示有限集合 A 中元素的个数，它反映了集合 A 的大小，称为集合 A 的基数. 则关于基数有如下较容易证明的事实:

$$|A\cup B|\le|A|+|B| \qquad |A\cap B|\le\min\{|A|,|B|\}$$

与基数有关的一个较重要的内容是所谓的“容斥原理”。

我们先看一个例子:

一个班有 45 名学生，班长统计外语和数学的考试成绩，说:

外语考 100 分的请举手　……8

数学考 100 分的请举手　……12

都没有考 100 分的请举手　……29

一个学生叫起来：“奇怪哎！ 45 - 29 = 16，而举手说外语、数学考 100 分的人加起来是 8 + 12 = 20，怎么多出 4 个人呢？”

这个学生忘记了外语和数学都考 100 分的人举了两次手．如果外语考 100 分的人的集合为 A，数学考 100 分的人的集合为 B，那么 $|A| = 8$ 是外语考了 100 分的人数，$|B| = 12$ 是数学考了 100 分的人数，或者外语 100 分或者数学 100 分的人数就是 $|A \cup B| = 16$，而

$$|A| + |B| = 8 + 12 = 20$$

这个差数正是 $|A \cap B| = 4$

对此，我们有如下关系式

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

对一般情况，我们有如下的容斥原理．

容斥原理　设 A 和 B 为有限集合，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

这个式子也可以陈述为：具有性质 A 或者具有性质 B 的元素的个数等于具有性质 A 的元素的个数加上具有性质 B 的元素的个数再减去同时具有两个性质的元素的个数。用文氏图表示见图 1.1.3．

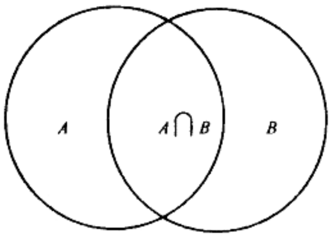

图 1.1.3　容斥原理文氏图（两集合）

设 N 表示所考虑的全部元素的个数，则上式可以变形为

$$|A^c \cap B^c| = N - |A| - |B| + |A \cap B|$$

这是容斥原理的另一种表示，可以解释为：不具有 A、B 任何性质的元素个数等于全部元素数减去具有性质 A 的元素数和减

去具有性质 B 的元素数再加上同时具有性质 A 和 B 的元素数。

把上述结果推广到三个集合也是容易做到的。如

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$\left|A^c\cap B^c\cap C^c\right|=N-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$$
$$-|A\cap B\cap C|$$

可以结合图 1.1.4 来理解和证明这个结论。

再进一步推广到多个集合的情况请读者自己思考一下。

容斥原理是一种重要的逻辑推理，其思维过程可这样描述：为了数某一类事物的数目，就要排斥那些不应该包含在这个计数中的数目，转过来又要包括那些被错误地排斥了的数目，以此来补偿这个计数。包容和排斥交替进行，相互配合。

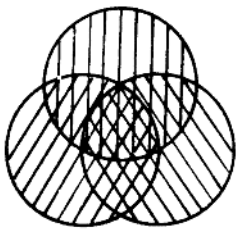

图 1.1.4 容斥原理文氏图（三个集合）

下面看几个容斥原理应用的例子。

例 1 一所学校开设三门基础课：数学、物理、化学。已知修数学课的有 170，修物理课的有 130 人，修化学课的有 120 人，同时修数学、物理的有 45，同时修数学、化学的有 20 人，同时修物理、化学的有 22 人，三门课全修的有 3 人。问这所学校有多少学生？

解 设集合 A 为修数学课的学生，集合 B 为修物理课的学生，集合 C 为修化学课的学生，则

$$|A|=170 \qquad |B|=130 \qquad |C|=120 \qquad |A\cap B|=45$$

$$|A\cap C|=20 \quad |B\cap C|=22 \qquad |A\cap B\cap C|=3$$

而全部学生数应为 $|A\cup B\cup C|$ ，由容斥原理就有

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\ &\quad +|A\cap B\cap C| \\ &=170+130+120-45-20-22+3 \\ &=336\end{aligned}$$

可知这所学校有 336 名学生。

例 2　某班有 25 人，其中 14 人会西班牙语，12 人会法语，6 人会法语和西班牙语，5 人会德语和西班牙语，2 人会德、法、西三种语言，另外，6 个会德语的人又都会另一种语言。求这个班不会外语的人数。

解　设集合 F 为会法语的人，集合 G 为会德语的人，集合 S 为会西班牙语的人，则应有

$$|F|=12 \qquad |G|=6 \qquad |S|=14$$

$$|F\cap S|=6 \qquad |G\cap S|=5$$

$$|F\cap G\cap S|=2$$

再分析一下 $|F\cap G|$，因 6 个会德语的人又会另一种语言，其中 5 人会西班牙语，那么另一人一定会法语，而在 5 个会西班牙语的人中又有 2 个会法语，所以应有

$$|F\cap G|=6-5+2=3$$

从而

$$\left|F^c\cap G^c\cap S^c\right|=25-(12+6+14)+(6+5+3)-2=5$$

可知这个班不会外语的人数为 5 人。

与集合基数有关的另一个有意思的内容是所谓 **“鸽巢原理”**。

鸽巢原理也称抽屉原理或鞋箱原理．其基本形式可描述

为：将 N（$N>1$）个元素分在 K 个集合中，那么，总存在一个集合至少含有$\lceil N/K \rceil$个元素。

此处，$\lceil\ \rceil$为上整数记号，当 N 表示为 $N=Kq+r(0\le r<q)$时，应有

$$\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil = \begin{cases} q+1 & 当r\neq 0时 \\ q & 当r=0时 \end{cases}$$

鸽巢原理可解释为：把 N 个元素分放到 K 个集合中，当不能均匀分放时，总有一个集合内的元素数目要超出“平均数”。

鸽巢原理较通俗的叙述为：$n+1$ 只鸽子飞回 n 个鸽笼，则至少有一个鸽笼内鸽子的数量至少是两只。

或者一般性叙述为：如果将 $n+1$ 个物品放人 n 个盒子，必然有某盒子内至少放两件物品。

我们看几个应用的例子：

例 3 在 366 个人中至少有两人是同日出生的。

解 一年共有 365 天，将每一天作为一个盒子（集合），将 365 个人按生日往里放时，一定至少有两个人放到同一盒子中。这两人是同日出生的。

例 4 某校从 20 个班中选广播员，共有 41 人报名，则至少有一个班中至少有 3 人报名。

解 此例将每班作为一个“盒子”。

例 5 任意 3 个整数中，至少有两个整数的和能被 2 整除。

解 我们构造两个集合，A 和 B，A 为偶数集，B 为奇数集，则对任意 3 个整数，至少其中两个同属于 A 或者同属于 B，那么这两数之和必可被 2 整除。

例 6 在边长为 1 的正方形中任取五点，则其中至少有两点的距离不超过 $\sqrt{2}/2$。

解 将这个正方形分成四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形，每个正方形作为一个“盒子”。经简单计算可知每个正方形对角线长为

$\sqrt{2}/2$。而根据鸽巢原理，至少有一个正方形中至少有两个点，从而这两点的距离不超过$\sqrt{2}/2$。

五、集合的若干应用

下面我们讨论一些集合的应用问题。

1. 方程和不等式的解集合

一个方程可能有解，也可能无解。而有解时，又可能有有限个解，也可能有无穷多个解。我们把方程解的全体构成的集合称为解集合。

例 7 方程

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

的解集合为

$$A = \{x \mid x = n\pi + (-1)^n \pi/6, n = 0, \pm 1, \cdots\cdots\}。$$

类似地，不等式的解的全体也构成一个解集合。

例 8 不等式 $x^2 - x - 2 \le 0$ 的解构成的集合为

$$A = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$$

例 9 不等式 $x^2 + 2x - 3 > 0$ 的解构成的解集合为

$$A = \{x \mid x < -3\} \cup \{x \mid x > 1\}$$

例 10 不等式组

$$9x + 4y \le 360$$
$$3x + 10y \le 300$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

的解集合是平面上的一个凸区域，参见图 1.1.5 。

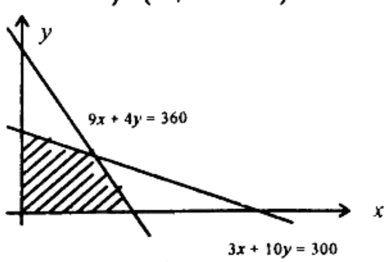

图 1.1.5 不等式组的解集合

2. 集合与映射

让我们从一个例子谈起：某学校有数学、物理、化学、航模和无线电等五个课外科技小组，它们构成集合 B

$B=$ {数学小组，物理小组，化学小组，航模小组，无线电小组}

另有 a,b,c,d 四个学生组成的学习小组，构成集合 A

$A=\{a,b,c,d\}$

这四个学生中每个学生都参加课外科技活动小组的情况可分为以下几种：

情况 1 每个学生只参加了一个科技小组的活动，并且没有本组的两个同学在一个科技小组里。如图 1.1.6(a)。

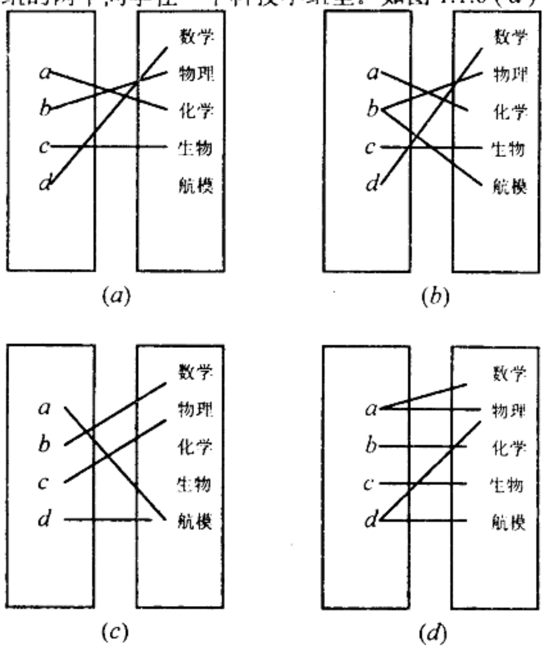

图 1.1.6 学生参加科技小组情况图

情况 2 至少有一个同学参加了两个（或两个以上）科技小组，但没有本组的两个同学在一个科技小组里。如图 1.1.6（b）。

情况 3 至少有两个同学参加了同一个科技小组，并且没有一个同学参加两个（或两个以上）科技小组。如图 1.1.6（c）。

情况 4 既有两个（或两个以上）同学参加一个科技小组，又有一个同学参加两个（或两个以上）小组。如图 1.1.6（d）。

这些情况，都是两个集合间元素的联系，或者说用某种规则将集合 A 的元素同集合 B 的一个子集中的元素对应起来。情况 1 中，对于集合 A 的任何一个元素，集合 B 都有唯一的元素和它对应，而且对于 A 的任何两个不同的元素，B 中都有两个不同的元素与之对应。我们称之为一对一的对应；情况 2 中，对于集合 A 的任何一个元素，集合 B 都有确定的元素和它对应，而且对于 A 的任何两个不同的元素，所对应的 B 里的元素也不相同，同时，在 A 中存在元素，它与 B 中至少两个不同的元素对应，我们称之为一对多的对应；情况 3 中，对于集合 A 的任何一个元素，集合 B 都有唯一的元素和它对应，而且在 A 中至少有两个不同的元素与 B 中的同一元素相对应，我们称之为多对一的对应；情况 4 中，对于集合 A 的任何一个元素，集合 B 都有确定的元素和它对应，而且 A 中至少有两个不同的元素，对应于 B 中的同一个元素，同时，在 A 中至少有一个元素，对应于 B 中至少两个不同的元素，我们称之为多对多的对应。

在四种对应情况中，一对一的对应和多对一的对应（情况 1 和情况 3）叫做单值对应。而一对多的对应和多对多的对应叫做多值对应。

对于单值对应，我们还可以进一步定义“映射”和“一一映射”的概念。

定义 1.1.2 设 A 和 B 为两个集合，若有规则 f 存在，使得对 A 的任何一个元素 x，在 B 中有唯一的一个元素 y 与之对应，

（如图 1.1.7），那么这个对应关系 f 就叫做从 A 到 B 内的映射，记为

$$f:\quad A\to B$$

（或 $A\xrightarrow{f}B$， f: $x\to y$）

这时，元素 x 经映射 f 与 y 对应，可写成 $y=f(x)$，其中，y 称为 x 的像，x 称为 y 的原像。集合 A 称为映射 f 的定义域，而像集合

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

称为映射的值域。

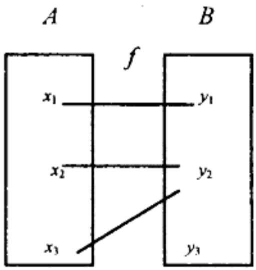

图 1.1.7 映射示意图

定义 1.1.3 设 f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，如果对于 A 的任意两个元素 x_1 和 x_2，当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$，那么 f 叫做从 A 到 B 的一一映射（或称一一对应）。

例 11 用映射的概念讨论函数 $y=\sin x$ 的定义域、值域和对应关系。

解 定义域为集合

$$A=\{x\mid x\in(-\infty,+\infty)\}$$

值域为集合

$$B=\{y\mid y\in[-1,1]\}$$

对应关系 f 是 A 的元素 x 和 x 的正弦值 $\sin x$ 相对应，记为

$$f:\quad x\to\sin x$$

或者

$$f:\ (-\infty,+\infty)\to[-1,1]$$

这是集合 A 到集合 B 的映射。

例 12 设 R 为实数集合，另有集合

$$B=\left\{y\mid y=ax^2+bx+c,\ x\in R,\ a,\ b,\ c\text{是已知实数}\right\}$$