

数理化自学丛书

三

角

数理化自学丛书编委会  
数学编写小组编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

三 角

数理化自学丛书编委会

数学编写小组编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

北京出版社重印

北京市新华书店发行

北京新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 235,000

1963年10月第1版 1978年12月第1次印刷

书号: 13119·532 定价: 0.71元

# 目 录

## 重印说明

### 第一章 锐角的三角函数.....1

§ 1.1 锐角的三角函数的定义...1

§ 1.2 已知某锐角的一个三角函数,求作这个角 .....6

§ 1.3 余角的三角函数.....9

§ 1.4  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  角的三角函数 .....11

§ 1.5 间隔为  $1^\circ$  的三角函数表 16

§ 1.6 角由  $0^\circ$  变到  $90^\circ$  时,三角函数的变化 .....19

§ 1.7 四位数学用表中的三角函数表 .....23

§ 1.8 直角三角形的解法 .....29

本章提要 .....36

复习题一 .....38

### 第二章 任意角的三角函数 ...41

§ 2.1 大于  $90^\circ$  的角和负角 ...41

§ 2.2 直角坐标系 .....44

§ 2.3 任意角的三角函数 .....49

§ 2.4 三角函数值的符号 .....53

§ 2.5 已知某角的一个三角函数的值,求作角.....55

§ 2.6  $n \cdot 360^\circ + \alpha$  与任意角  $\alpha$  的三角函数间的关系 ...59

§ 2.7  $180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha$  与锐角  $\alpha$  的三角函数间的关系 .....60

§ 2.8  $-\alpha$  与任意角  $\alpha$  的三角

函数间的关系 .....66

§ 2.9 已知一个三角函数的值,求角.....70

§ 2.10  $90^\circ + \alpha, 270^\circ - \alpha, 270^\circ + \alpha$  与锐角  $\alpha$  的三角函数间的关系 .....73

§ 2.11 诱导公式的一般性 .....77

§ 2.12 同角的三角函数间的关系 .....82

本章提要 .....89

复习题二 .....90

### 第三章 三角函数的图象和性质 .....93

§ 3.1 弧度制 .....93

§ 3.2 用线段表示三角函数 ...98

§ 3.3 三角函数的图象.....102

§ 3.4 三角函数的定义域.....112

§ 3.5 三角函数的性质.....115

§ 3.6 一般正弦函数  $y = A \sin(n\alpha + \alpha)$  的图象 123

本章提要.....129

复习题三.....131

### 第四章 加法定理和它的推论 133

§ 4.1 两角和的正弦和余弦...133

§ 4.2 两角和的正弦公式和余弦公式的一般性.....136

§ 4.3 两角和的正切和余切...141

§ 4.4 两角差的三角函数.....143

§ 4.5 二倍角的三角函数.....146

§ 4.6 半角的三角函数.....152	§ 6.7 已知两边和它们的夹角, 利用对数解斜三角形...219
§ 4.7 三角函数的积化为和...158	§ 6.8 半角定理.....222
§ 4.8 三角函数的和化为积...161	§ 6.9 已知三边, 利用对数解 斜三角形.....225
§ 4.9 化 $a \sin x + b \cos x$ 成一 个角的正弦.....167	§ 6.10 三角形的面积.....228
§ 4.10 三角形内角的三角函数 间的关系.....169	§ 6.11 三角形的外接圆的半 径.....232
本章提要.....172	§ 6.12 三角形的内切圆的半 径.....234
复习题四.....174	本章提要.....237
<b>第五章 斜三角形的解法</b> .....176	复习题六.....238
§ 5.1 斜三角形解法的分类...176	<b>第七章 反三角函数</b> .....241
§ 5.2 正弦定理.....177	§ 7.1 反函数.....241
§ 5.3 已知两角和一边, 解斜 三角形.....180	§ 7.2 反正弦.....243
§ 5.4 已知两边和其中一边的 对角, 解斜三角形 .....183	§ 7.3 反余弦.....249
§ 5.5 余弦定理.....191	§ 7.4 反正切.....254
§ 5.6 已知两边和它们的夹 角, 用余弦定理解斜三 角形.....195	§ 7.5 反余切.....259
§ 5.7 已知三边, 用余弦定理 解斜三角形.....197	§ 7.6 反三角函数的三角运 算.....262
本章提要.....201	§ 7.7 反三角函数间的基本关 系.....266
复习题五.....202	本章提要.....270
<b>第六章 利用对数解三角形</b> ...204	复习题七.....271
§ 6.1 三角函数对数表.....204	<b>第八章 三角方程</b> .....273
§ 6.2 利用三角函数对数表进 行计算.....207	§ 8.1 最简三角方程.....273
§ 6.3 利用对数解直角三角 形.....209	§ 8.2 只含同角的同名三角函 数的三角方程.....278
§ 6.4 已知两角和一边, 利用 对数解斜三角形.....212	§ 8.3 可化成合同角的同名三 角函数的三角方程.....282
§ 6.5 已知两边和一边的对角, 利用对数解斜三角形...214	§ 8.4 可化成一边为零而另一 边是若干个因式的积的 三角方程.....285
§ 6.6 正切定理.....217	§ 8.5 形如 $a \sin x + b \cos x = c$ 的三角方程的解法.....289

§ 8.6 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方 程的解法.....	292	复习题八.....	302
§ 8.7 三角方程的图象解法.....	296	总复习题.....	304
本章提要.....	301	习题答案.....	316

# 第一章 锐角的三角函数

## §1.1 锐角的三角函数的定义

从平面几何学中,我们知道:

在直角三角形中,如果一个锐角等于  $30^\circ$ , 那末这个锐角所对的直角边等于斜边的一半. 换句话说, 也就是,  $30^\circ$  的角所对的直角边和斜边的比等于  $\frac{1}{2}$ . 这个性质同三角形的大小是没有关系的.

三角学首先要研究这样的问题: 如果直角三角形的锐角不是  $30^\circ$ , 而是任何其他的锐角, 它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢?

我们来看图 1.1. 在这个图中, 我们看到, 以  $A$  为端点的两条射线  $AD$  和  $AE$  组成了一个锐角. 如果从  $AD$  上任意的点  $B, B', B'', \dots$  作  $AE$  的垂线  $BC, B'C', B''C'', \dots$ , 那末, 就得到一连串的直角三角形  $ABC, AB'C', AB''C'', \dots$  等等. 因为这些直角三角形有一个公共角  $A$ , 所以它们是相似的.

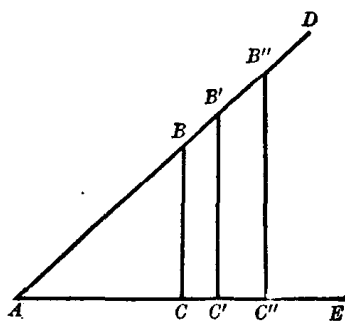


图 1.1

我们知道, 相似三角形对应边的比是相等的, 所以在直角

三角形  $ABC$  和  $AB'C'$  中,就有

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'}$$

因而

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

因此,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \dots\dots\dots$$

就是, 在所有的直角三角形中,  $\angle A$  的对边和斜边的比都是相等的. 换句话说, 只要  $\angle A$  的大小确定, 那末, 在它做一个锐角画出的直角三角形中,  $\angle A$  的对边和斜边的比就是一个确定的数.

当某一个量确定的时候, 和它有关的另一个量如果有确定的值, 那末, 我们就把第二个量叫做第一个量的函数.

例如, 当正方形的边长  $a$  有确定的值的时候, 正方形的面积  $a^2$  就完全确定了. 这里正方形的边长是一个量, 正方形的面积是另一个量. 我们说, 正方形的面积是边长  $a$  的函数.

又如, 假定圆的直径用  $d$  表示, 那末圆的周长就等于  $\pi d$ . 这里, 圆的直径是一个量, 圆的周长是另一个量. 因为当圆的直径有确定的值的时候, 圆的周长也就确定, 所以我们说, 圆的周长是直径  $d$  的函数.

同样, 在图 1.1 中,  $\angle A$  是一个量; 当这个量有确定的值的时候, 在它做锐角所画出的直角三角形中, 也有一个量跟着确定了. 这个量就是上面所说的对边和斜边的比. 因此我们可以说, 在直角三角形  $ABC$  中,  $\angle A$  的对边和斜边的比  $\frac{BC}{AB}$  是  $\angle A$  的函数.

我们要注意,正方形的面积可以根据边长  $a$  计算出来;圆的周长也可以根据直径  $d$  计算出来. 所以看到算式  $a^2$ , 就知道它是  $a$  的函数; 看到算式  $\pi d$ , 也就知道它是  $d$  的函数. 但是  $\frac{BC}{AB}$  却不能简单地用一个算式根据  $\angle A$  的度数计算出来. 为了要说明  $\frac{BC}{AB}$  是  $\angle A$  的函数, 我们应用一个专门的记号

“ $\sin A$ ”来表示. 记号“ $\sin A$ ”读做“ $\angle A$  的正弦”.

以后看到“ $\sin A$ ”这个记号, 就应当联想到它就表示: 在以  $\angle A$  为锐角的直角三角形中,  $\angle A$  的对边和斜边的比, 就是

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便, 我们通常用  $C$  表示直角三角形  $ABC$  的直角, 并且用小写字母  $a$  表示  $\angle A$  的对边,  $b$  表示  $\angle B$  的对边,  $c$  表示斜边(图 1.2). 这样就有

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

一个直角三角形有三条边. 任意取两条可以组成六个不同的比. 它们是

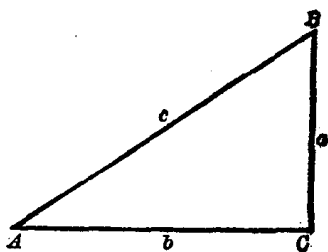


图 1.2

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到, 不但  $\frac{a}{c}$  跟着  $\angle A$  的大小而确定, 其他五个比一定也是跟着  $\angle A$  的大小而确定的.

第一个比  $\frac{a}{c}$  已经把它叫做  $\angle A$  的正弦了. 其他五个比也都是  $\angle A$  的函数. 我们都给它们规定一个名称. 现在把所



有六个函数的名称、定义和记号，一起列在下面的表里。

函数的名称	记号 <sup>①</sup>	定 义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}^{②}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{c}{a}$

$\angle A$  的所有这些函数，总起来叫做  $\angle A$  的三角函数。

知道了锐角三角函数的定义以后，自然会引起下面的问题：已有了一个锐角，怎样算出它的三角函数值呢？我们举例说明如下：

例 1. 求  $35^\circ$  角的三角函数值。

【解】 用量角器作一个  $35^\circ$  的角  $A$  (图 1.3)。过  $\angle A$  的一边上任意一点  $B$ ，例如取  $AB=10$  厘米，向另一边作垂线  $BC$ 。

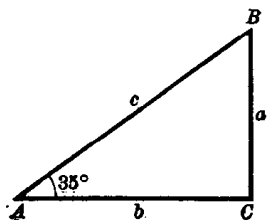


图 1.3

尽可能准确地量出直角三角形的其他两边的长，得  $BC=5.7$  厘米， $AC=8.2$  厘米。于是，我们就可把测量和计算的结果写成下面的形式：

$$A = 35^\circ,$$

$$a = 5.7, \quad b = 8.2, \quad c = 10.$$

① 表示  $\angle A$  的正切、余切和余割的记号，有些书上分别写做  $\tan A$ ,  $\cot A$ ,  $\csc A$ 。

② 在直角三角形  $ABC$  里，锐角  $A$  夹在斜边  $c$  和直角边  $b$  之间。直角边  $b$  可以简单叫做  $\angle A$  的邻边。

$$\sin 35^\circ = \frac{a}{c} = \frac{5.7}{10} = 0.57;$$

$$\cos 35^\circ = \frac{b}{c} = \frac{8.2}{10} = 0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{a}{b} = \frac{5.7}{8.2} = 0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ = \frac{b}{a} = \frac{8.2}{5.7} = 1.4;$$

$$\sec 35^\circ = \frac{c}{b} = \frac{10}{8.2} = 1.2;$$

$$\operatorname{cosec} 35^\circ = \frac{c}{a} = \frac{10}{5.7} = 1.7.$$

因为我们量  $a$  和  $b$  的长, 都只量出两个数字, 所以根据它们算出来的结果, 从第一个不是零的数字起, 也只有开头两个数字是可以信任的, 以下就四舍五入.

在画直角三角形的时候, 取  $c=10$  厘米, 只是为了计算正弦和余弦的值可以方便一些. 我们也可以取其他的值.

例 2. 在直角三角形  $ABC$  中, 已知  $a=4$ ,  $b=5$ , 求  $\angle A$  的正弦, 余弦, 正切和余切.

**【解】** 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义, 求得

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4}{41} \sqrt{41};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{41} \sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

## 习 题 1.1

1. 求  $50^\circ$  角的六个三角函数值.
2. 已知  $a=40$ ,  $c=41$ ; 求  $\angle A$  的六个三角函数值.
3. 已知  $a=5$ ,  $b=12$ ; 求  $\angle A$  的正弦, 余弦, 正切和余切. 当  $a=10$ ,  $b=24$  时,  $\angle A$  的这些三角函数值有没有变化? 为什么?
4. 已知斜边  $AB$  等于直角边  $AC$  的三倍; 求  $\angle A$  的正弦, 余弦, 正切和余切.
5. 已知  $a=\frac{1}{2}b$ ; 求  $\angle A$  的正弦, 余弦, 正割和余割.
6. 已知  $a=2mn$ ,  $b=m^2-n^2$ ; 根据定义求  $\angle A$  的正弦, 正切和正割及  $\angle B$  的余弦, 余切和余割. 比较它们的结果, 你发现了什么?
- \*7. 已知  $a=2\sqrt{mn}$ ,  $c=m+n$  ( $m>n>0$ ); 求  $\sin A$ ,  $\cos A$  和  $(\sin A)^2+(\cos A)^2$  的值.

## §1.2 已知某锐角的一个三角函数, 求作这个角

在上一节的例 1 中, 已知一个锐角, 我们用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 现在我们研究相反的问题: 已知某一锐角的一个三角函数, 怎样画出这个锐角? 举例说明如下:

例 1. 已知一个锐角的正弦等于  $\frac{4}{5}$ , 求作这个锐角.

**【解】** 一个锐角的正弦, 就是在以它做一个锐角的直角三角形中, 这个角的对边和斜边的比. 现在已知它的正弦的值是  $\frac{4}{5}$ . 要画出这个锐角, 就应当画一个直角三角形, 使一条直角边和斜边的比等于  $\frac{4}{5}$ . 这样, 这条直角边的对角就是所求作的角.

因此，我们可以任意取一个长度单位(例如 1 厘米)，作  $BC=4$  厘米(图 1.4). 从  $C$  作  $BC$  的垂线  $CD$ . 以  $B$  为圆心，以 5 厘米为半径，作弧交  $CD$  于  $A$ ，并且连结  $AB$ . 这时，直角三角形  $ABC$  中， $\angle BAC$  就是所求作的锐角.

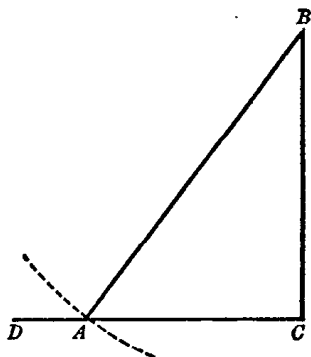


图 1.4

用量角器可以量得这个角约等于  $53^\circ$  (简写做  $\angle A \approx 53^\circ$ ).

例 2. 已知一个锐角的余弦等于 0.79, 求作这个锐角.

【解】 0.79 就是  $\frac{79}{100}$ . 为了使图形不要画得太大，我们可以取 1 毫米 (就是  $\frac{1}{10}$  厘米) 作为长度单位.

因为锐角的余弦，就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边的比，所以我们先作  $AC=79$  毫米(图 1.5)，从  $C$  作  $AC$  的垂线  $CD$ ，然后以  $A$  为圆心，以 100 毫米为半径作弧交  $CD$

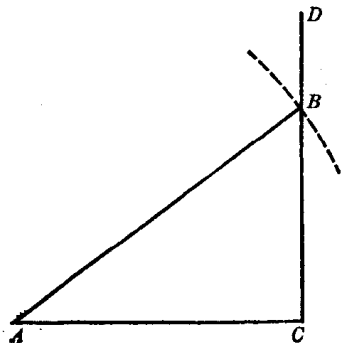


图 1.5

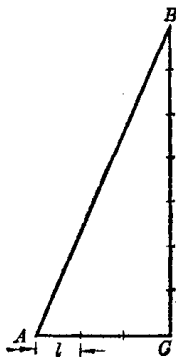


图 1.6

于  $B$ ，并且连结  $AB$ 。  $\angle A$  就是所求作的锐角。

用量角器可以量得  $\angle A \approx 38^\circ$ 。

例 3. 已知  $\operatorname{tg} A = 2\frac{1}{3}$ ，求作锐角  $A$ 。

【解】 我们把  $2\frac{1}{3}$  写成  $\frac{7}{3}$ 。取适当的长度单位  $l$  (图 1.6)，作直角  $C$ 。在它的一边上截取  $CB=7l$ ，在另一边上截取  $CA=3l$ 。连结  $AB$ 。那末，直角三角形  $ABC$  中的  $\angle A$  就是所求作的锐角。

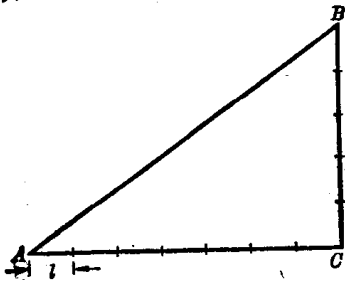


图 1.7

例 4. 已知  $\operatorname{ctg} A = 1.4$ ，求作锐角  $A$ 。

【解】 这里， $1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ 。取适当的长度单位  $l$ 。我们在直角  $C$  (图 1.7) 的两边上分别取  $AC=7l$ ， $CB=5l$ 。连结  $AB$ 。直角三角形  $ABC$  中的  $\angle A$  就是所求作的锐角。

从上面的这些例题中，我们看到，要画出具有已知三角函数值的锐角  $A$ ，它的一般步骤是：

把已知的三角函数值表示成分数  $\frac{m}{n}$  的形式。

已 知	直 角 三 角 形 的 边 长
$\sin A = \frac{m}{n}$	$a=m, \quad c=n$
$\cos A = \frac{m}{n}$	$b=m, \quad c=n$
$\operatorname{tg} A = \frac{m}{n}$	$a=m, \quad b=n$
$\operatorname{ctg} A = \frac{m}{n}$	$b=m, \quad a=n$

选取一个适当的长度单位，画直角三角形  $ABC$ ，使  $\angle C$  是直角，并且使  $\angle A$ ， $\angle B$  和  $\angle C$  的对边  $a$ ， $b$  和  $c$  分别适合于上面表中的条件。

这样，直角三角形  $ABC$  中的角  $A$  就是所求作的锐角。

### 习 题 1·2

1. 已知一个锐角的正弦等于 0.5，作出这个锐角；并量量看大约等于多少度？
2. 已知  $\cos A = 0.7$ ，作出锐角  $A$ ；并量出它的近似值。
3. 已知一个锐角的正割等于 1.5；求作这个锐角。
4. 已知  $\operatorname{cosec} A = 2$ ；求作锐角  $A$ 。
5. 已知  $\operatorname{tg} A = \frac{5}{4}$ ；作出锐角  $A$ ，并量出它的近似值。
6. 已知  $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{5}$ ；作出锐角  $A$ ，并和前题中所求的角作比较。

### § 1.3 余角的三角函数

在 § 1.1 中我们已经知道，每一个锐角都有六个三角函数。在图 1.8 的直角三角形  $ABC$  中，除了  $\angle A$  是锐角以外， $\angle B$  也是锐角。因此， $\angle B$  也有六个三角函数。根据 § 1.1 中讲过的三角函数的定义，可以知道  $\angle B$  的六个三角函数是

$$\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

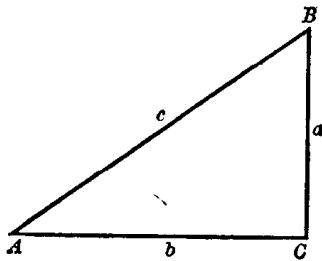


图 1.8

$$\operatorname{tg} B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\angle B \text{ 的对边}} = \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{sec} B = \frac{\text{斜边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{c}{a};$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{\text{斜边}}{\angle B \text{ 的对边}} = \frac{c}{b}.$$

我们把  $\angle B$  的三角函数和  $\angle A$  的三角函数比较一下。例如，

$$\sin B = \frac{b}{c},$$

但

$$\cos A = \frac{b}{c},$$

因此，

$$\sin B = \cos A.$$

同样可以得到

$$\cos B = \sin A; \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A; \quad \operatorname{sec} B = \operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec} B = \operatorname{sec} A.$$

直角三角形的两个锐角互为余角；也就是，它们的和等于  $90^\circ$ 。所以  $\angle B = 90^\circ - \angle A$ 。在上面的六个等式里，用  $90^\circ - \angle A$  代替  $\angle B$ ，便得到

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A;$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - A) = \operatorname{tg} A;$$

$$\operatorname{sec}(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \operatorname{sec} A.$$

通常我们把正弦和余弦互相叫做余函数，就是正弦是余弦的余函数，余弦也是正弦的余函数。同样，也把正切和余切互相叫做余函数，正割和余割互相叫做余函数。这样，上面的六个公式，就可以概括成一句话：锐角  $A$  的余角的三角函数等于锐角  $A$  的余函数。

例 1. 已知  $\sin 35^\circ = 0.57$ ，求  $\cos 55^\circ$ 。

【解】  $\cos 55^\circ = \cos (90^\circ - 35^\circ) = \sin 35^\circ = 0.57$ 。

例 2. 设  $A, B$  和  $C$  是一个三角形的三个内角，求证

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}.$$

【证】 因为  $A+B+C=180^\circ$ ，所以  $A+B=180^\circ-C$ 。因此，

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^\circ - C}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}.$$

### 习 题 1.3

1. 已知  $\operatorname{tg} 21^\circ 48' = 0.4$ ；求  $\operatorname{ctg} 68^\circ 12'$ 。

2. 已知  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ， $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；求  $\cos 30^\circ$ ， $\cos 45^\circ$ ， $\cos 60^\circ$  的值。

3. 将  $\cos 71^\circ$ ， $\operatorname{ctg} 45^\circ 10'$ ， $\operatorname{cosec} 89^\circ$  化成小于  $45^\circ$  的锐角的三角函数。

\*4. 求证对于任何小于  $45^\circ$  的锐角  $x$ ，等式  $\cos (45^\circ + x) = \sin (45^\circ - x)$  都成立。

## § 1.4 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角函数

在 § 1.1 的例 1 中，我们已经看到，当已知一个锐角的度数，要找出它的三角函数时，可以用画图的方法来解决。当然，



这样做,我们只能求得粗略的近似值。

但是,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  角的三角函数, 却可以利用几何学上的简单性质, 求出它们的准确值。

**1.  $30^\circ$  角的三角函数** 在平面几何中, 我们知道, 当直角

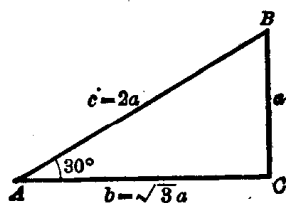


图 1.9

三角形  $ABC$  的角  $A=30^\circ$  时,  $c=2a$  (图 1.9)。因此,

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

为了求出  $\cos A$ , 必须先求出  $b$ 。

利用勾股定理, 得

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$

因此,

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

其他四个函数, 同样可以根据它们的定义从图 1.9 求出,

结果是

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3};$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \frac{2a}{a} = 2.$$

所以  $30^\circ$  角的三角函数是

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}; \quad \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2.$$