数理化自学丛书

三　　　　角

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

三　角

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

北 京 出 版 社 重 印
北 京 市 新 华 书 店 发 行
北 京 新 华 印 刷 厂 印 刷

开本 787×1092　1/32　印张 10.75　字数 235,000
1963 年 10 月第 1 版　1978 年 12 月第 1 次印刷

书号：13119·532　　定价：0.71 元

目　录

第一章　锐角的三角函数

§1·1　锐角的三角函数的定义

从平面几何学中，我们知道：

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那末这个锐角所对的直角边等于斜边的一半．换句话说，也就是，30° 的角所对的直角边和斜边的比等于 $\frac{1}{2}$．这个性质同三角形的大小是没有关系的．

三角学首先要研究这样的问题：如果直角三角形的锐角不是 30°，而是任何其他的锐角，它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢？

我们来看图 1·1．在这个图中，我们看到，以 A 为端点的两条射线 AD 和 AE 组成了一个锐角．如果从 AD 上任意的点 B, B', B'', … 作 AE 的垂线 BC, $B'C'$, $B''C''$, …，那末，就得到一连串的直角三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$, 等等．因为这些直角三角形有一个公共角 A，所以它们是相似的．

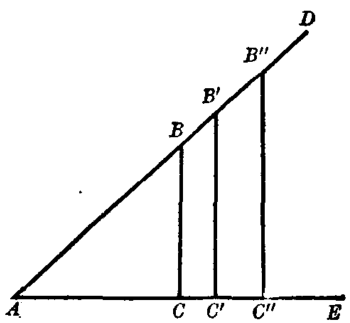

图　1·1

我们知道，相似三角形对应边的比是相等的，所以在直角

三角形 ABC 和 $AB'C'$ 中，就有

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{AB'},$$

因而

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}.$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

因此，

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots.$$

就是，在所有的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比都是相等的．换句话说，只要 $\angle A$ 的大小确定，那末，在用它做一个锐角画出的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比就是一个确定的数．

当某一个量确定的时候，和它有关的另一个量如果有确定的值，那末，我们就把第二个量叫做第一个量的函数．

例如，当正方形的边长 a 有确定的值的时候，正方形的面积 a^2 就完全确定了．这里正方形的边长是一个量，正方形的面积是另一个量．我们说，正方形的面积是边长 a 的函数．

又如，假定圆的直径用 d 表示，那末圆的周长就等于 πd．这里，圆的直径是一个量，圆的周长是另一个量．因为当圆的直径有确定的值的时候，圆的周长也就确定，所以我们说，圆的周长是直径 d 的函数．

同样，在图 1·1 中，$\angle A$ 是一个量；当这个量有确定的值的时候，在用它做锐角所画出的直角三角形中，也有一个量跟着确定了．这个量就是上面所说的对边和斜边的比．因此我们可以说，在直角三角形 ABC 中，$\angle A$ 的对边和斜边的比 $\dfrac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数．

我们要注意，正方形的面积可以根据边长 a 计算出来；圆的周长也可以根据直径 d 计算出来．所以看到算式 a^2，就知道它是 a 的函数；看到算式 πd，也就知道它是 d 的函数．但是 $\frac{BC}{AB}$ 却不能简单地用一个算式根据 $\angle A$ 的度数计算出来．为了要说明 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数，我们应用一个专门的记号"$\sin A$"来表示．记号"$\sin A$"读做"$\angle A$ 的正弦"．

以后看到"$\sin A$"这个记号，就应当联想到它就表示：在以$\angle A$为锐角的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比，就是

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便，我们通常用 C 表示直角三角形 ABC 的直角，并且用小写字母 a 表示 $\angle A$ 的对边，b 表示 $\angle B$ 的对边，c 表示斜边(图 1·2)．这样就有

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

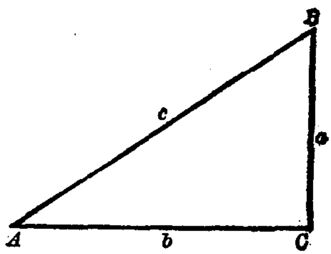

图 1·2

一个直角三角形有三条边．任意取两条可以组成六个不同的比．它们是

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到，不但 $\frac{a}{c}$ 跟着 $\angle A$ 的大小而确定，其他五个比一定也是跟着 $\angle A$ 的大小而确定的．

第一个比 $\frac{a}{c}$ 已经把它叫做 $\angle A$ 的正弦了．其他五个比也都是 $\angle A$ 的函数．我们都给它们规定一个名称．现在把所

有六个函数的名称、定义和记号，一起列在下面的表里.

函数的名称	记　号①	定　义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}②}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\dfrac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{的对边}}=\dfrac{c}{a}$

$\angle A$ 的所有这些函数，总起来叫做 $\angle A$ 的**三角函数**.

知道了锐角三角函数的定义以后，自然会引起下面的问题：已有了一个锐角，怎样算出它的三角函数值呢？我们举例说明如下：

例 1. 求 $35°$ 角的三角函数值.

【解】 用量角器作一个 $35°$ 的角A(图 1·3). 过$\angle A$的一边上任意一点 B，例如取 $AB=10$ 厘米，向另一边作垂线 BC. 尽可能准确地量出直角三角形的其他两边的长，得 $BC=5.7$ 厘米，$AC=8.2$ 厘米. 于是，我们就可把测量和计算的结果写成下面的形式：

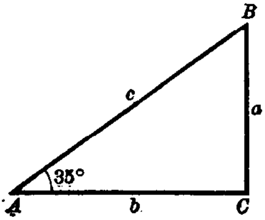

图 1·3

$$A=35°,$$

$$a=5.7,\quad b=8.2,\quad c=10.$$

① 表示 $\angle A$ 的正切、余切和余割的记号，有些书上分别写做 $\tan A$, $\cot A$, $\csc A$.

② 在直角三角形 ABC 里，锐角 A 夹在斜边 c 和直角边 b 之间。直角边 b 可以简单叫做 $\angle A$ 的邻边。

$$\sin 35^\circ=\frac{a}{c}=\frac{5.7}{10}=0.57;$$

$$\cos 35^\circ=\frac{b}{c}=\frac{8.2}{10}=0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ=\frac{a}{b}=\frac{5.7}{8.2}=0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ=\frac{b}{a}=\frac{8.2}{5.7}=1.4;$$

$$\sec 35^\circ=\frac{c}{b}=\frac{10}{8.2}=1.2;$$

$$\operatorname{cosec} 35^\circ=\frac{c}{a}=\frac{10}{5.7}=1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长，都只量出两个数字，所以根据它们算出来的结果，从第一个不是零的数字起，也只有开头两个数字是可以信任的，以下就四舍五入.

在画直角三角形的时候，取 $c=10$ 厘米，只是为了计算正弦和余弦的值可以方便一些. 我们也可以取其他的值.

例 2. 在直角三角形 ABC 中，已知 $a=4$，$b=5$，求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切.

【解】 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义，求得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4}{\sqrt{41}}=\frac{4}{41}\sqrt{41};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{5}{41}\sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{5}{4}.$$

习 题 1·1

1. 求 50° 角的六个三角函数值.

2. 已知 $a=40$, $c=41$; 求 $\angle A$ 的六个三角函数值.

3. 已知 $a=5$, $b=12$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切. 当 $a=10$, $b=24$ 时, $\angle A$ 的这些三角函数值有没有变化?为什么?

4. 已知斜边 AB 等于直角边 AC 的三倍; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切.

5. 已知 $a=\frac{1}{2}b$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正割和余割.

6. 已知 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 根据定义求 $\angle A$ 的正弦, 正切和正割及 $\angle B$ 的余弦, 余切和余割. 比较它们的结果, 你发现了什么?

*7. 已知 $a=2\sqrt{mn}$, $c=m+n$ $(m>n>0)$; 求 $\sin A$, $\cos A$ 和 $(\sin A)^2+(\cos A)^2$ 的值.

§1·2 已知某锐角的一个三角函数, 求作这个角

在上一节的例 1 中, 已知一个锐角, 我们用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 现在我们研究相反的问题: 已知某一锐角的一个三角函数, 怎样画出这个锐角? 举例说明如下:

例 1. 已知一个锐角的正弦等于 $\frac{4}{5}$, 求作这个锐角.

【解】 一个锐角的正弦, 就是在以它做一个锐角的直角三角形中, 这个角的对边和斜边的比. 现在已知它的正弦的值是 $\frac{4}{5}$. 要画出这个锐角, 就应当画一个直角三角形, 使一条直角边和斜边的比等于 $\frac{4}{5}$. 这样, 这条直角边的对角就是所求作的角.

因此，我们可以任意取一个长度单位(例如1厘米)，作 $BC=4$ 厘米(图1·4). 从 C 作 BC 的垂线 CD. 以 B 为圆心，以5厘米为半径，作弧交 CD 于 A，并且连结 AB. 这时，直角三角形 ABC 中，$\angle BAC$ 就是所求作的锐角.

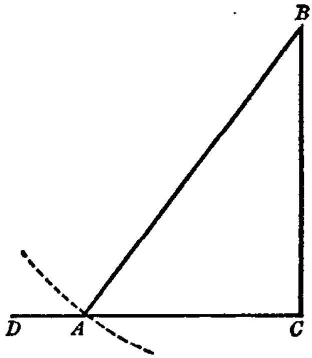

图 1·4

用量角器可以量得这个角约等于53° (简写做 $\angle A\approx 53°$).

例2. 已知一个锐角的余弦等于0.79，求作这个锐角.

【解】 0.79 就是 $\frac{79}{100}$. 为了使图形不要画得太大，我们可以取1毫米 $\left(\text{就是}\ \frac{1}{10}\ \text{厘米}\right)$ 作为长度单位.

因为锐角的余弦，就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边的比，所以我们先作 $AC=79$ 毫米(图1·5)，从 C 作 AC 的垂线 CD，然后以 A 为圆心，以100毫米为半径作弧交 CD

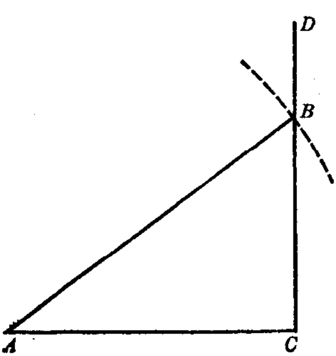

图 1·5

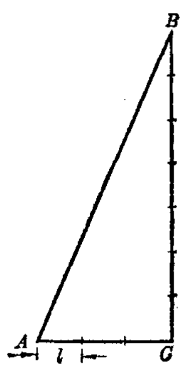

图 1·6

于 B，并且连结 AB. $\angle A$ 就是所求作的锐角.

用量角器可以量得 $\angle A\approx 38^\circ$.

例 3. 已知 $\operatorname{tg} A=2\frac{1}{3}$，求作锐角 A.

【解】 我们把 $2\frac{1}{3}$ 写成 $\frac{7}{3}$. 取适当的长度单位 l（图1·6），作直角 C. 在它的一边上截取 $CB=7l$，在另一边上截取 $CA=3l$. 连结 AB. 那末，直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

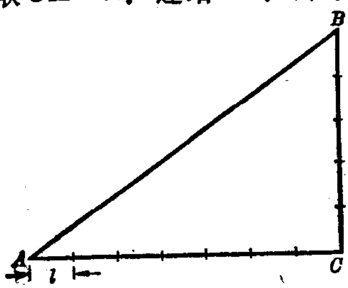

图 1·7

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} A=1.4$，求作锐角 A.

【解】 这里，$1.4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$. 取适当的长度单位 l. 我们在直角 C（图1·7）的两边上分别取 $AC=7l$，$CB=5l$. 连结 AB. 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

从上面的这些例题中，我们看到，要画出具有已知三角函数值的锐角 A，它的一般步骤是：

把已知的三角函数值表示成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式.

已知	直角三角形的边长	
$\sin A=\frac{m}{n}$	$a=m$,	$c=n$
$\cos A=\frac{m}{n}$	$b=m$,	$c=n$
$\operatorname{tg} A=\frac{m}{n}$	$a=m$,	$b=n$
$\operatorname{ctg} A=\frac{m}{n}$	$b=m$,	$a=n$

选取一个适当的长度单位，画直角三角形 ABC，使 $\angle C$ 是直角，并且使 $\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边 a，b 和 c 分别适合于上面表中的条件.

这样，直角三角形 ABC 中的角 A 就是所求作的锐角.

习 题 1·2

1．已知一个锐角的正弦等于0.5，作出这个锐角；并量量看大约等于多少度？

2．已知 $\cos A=0.7$，作出锐角 A；并量出它的近似值.

3．已知一个锐角的正割等于 1.5；求作这个锐角.

4．已知 $\operatorname{cosec} A=2$；求作锐角 A.

5．已知 $\operatorname{tg} A=\frac{5}{4}$；作出锐角 A，并量出它的近似值.

6．已知 $\operatorname{ctg} A=\frac{4}{5}$；作出锐角 A，并和前题中所求的角作比较.

§1·3 余角的三角函数

在 §1·1 中我们已经知道，每一个锐角都有六个三角函数. 在图 1·8 的直角三角形 ABC 中，除了 $\angle A$ 是锐角以外，$\angle B$ 也是锐角. 因此，$\angle B$ 也有六个三角函数. 根据 §1·1 中讲过的三角函数的定义，可以知道 $\angle B$ 的六个三角函数是

$$\sin B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c};$$

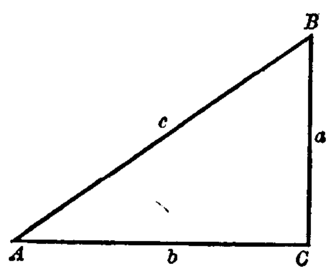

图 1·8

$$\operatorname{tg} B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{a}{b};$$

$$\sec B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{c}{a};$$

$$\operatorname{cosec} B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{c}{b}.$$

我们把 $\angle B$ 的三角函数和 $\angle A$ 的三角函数比较一下. 例如,

$$\sin B=\frac{b}{c},$$

但

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

因此,

$$\sin B=\cos A.$$

同样可以得到

$$\cos B=\sin A; \qquad \operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg} B=\operatorname{tg} A; \qquad \sec B=\operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec} B=\sec A.$$

直角三角形的两个锐角互为余角; 也就是, 它们的和等于 $90°$. 所以 $\angle B=90°-\angle A$. 在上面的六个等式里, 用 $90°-\angle A$ 代替 $\angle B$, 便得到

$$\boldsymbol{\sin(90°-A)=\cos A;}$$

$$\boldsymbol{\cos(90°-A)=\sin A;}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(90°-A)=\operatorname{ctg} A;}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(90°-A)=\operatorname{tg} A;}$$

$$\boldsymbol{\sec(90°-A)=\operatorname{cosec} A;}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}(90°-A)=\sec A.}$$

通常我们把正弦和余弦互相叫做余函数，就是正弦是余弦的余函数，余弦也是正弦的余函数．同样，也把正切和余切互相叫做余函数，正割和余割互相叫做余函数．这样，上面的六个公式，就可以概括成一句话：锐角 A 的余角的三角函数等于锐角 A 的余函数．

例 1．已知 $\sin 35° = 0.57$，求 $\cos 55°$．

【解】 $\cos 55° = \cos(90° - 35°) = \sin 35° = 0.57$．

例 2．设 A，B 和 C 是一个三角形的三个内角，求证

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}.$$

【证】 因为 $A+B+C=180°$，所以 $A+B=180°-C$．因此，

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{180°-C}{2} = \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}.$$

习 题 1·3

1．已知 $\operatorname{tg} 21°48' = 0.4$；求 $\operatorname{ctg} 68°12'$．

2．已知 $\sin 30° = \frac{1}{2}$，$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$；求 $\cos 30°$，$\cos 45°$，$\cos 60°$ 的值．

3．将 $\cos 71°$，$\operatorname{ctg} 45°10'$，$\operatorname{cosec} 89°$ 化成小于 $45°$ 的锐角的三角函数．

*4．求证对于任何小于 $45°$ 的锐角 x，等式 $\cos(45°+x) = \sin(45°-x)$ 都成立．

§1·4　30°，45°，60°角的三角函数

在 §1·1 的例 1 中，我们已经看到，当已知一个锐角的度数，要找出它的三角函数时，可以用画图的方法来解决．当然，

这样做，我们只能求得很粗略的近似值.

但是，30°，45°，60° 角的三角函数，却可以利用几何学上的简单性质，求出它们的准确值.

1. 30° 角的三角函数 在平面几何中，我们知道，当直角三角形 ABC 的角 $A=30°$ 时，$c=2a$（图 1·9）. 因此，

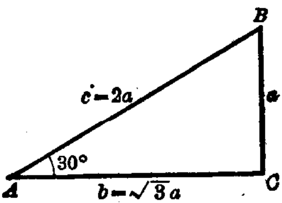

图 1·9

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}.$$

为了求出 $\cos A$，必须先求出 b. 利用勾股定理，得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}\,a.$$

因此，
$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

其他四个函数，同样可以根据它们的定义从图 1·9 求出，结果是

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}\,a}{a}=\sqrt{3};$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{2a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\frac{2a}{a}=2.$$

所以 30° 角的三角函数是

$$\sin 30°=\frac{1}{2};\qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3};\qquad \sec 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3};\qquad \operatorname{cosec} 30°=2.$$