

現代管理译丛

运筹学导论

—— 计算机算法

〔美〕B.E.吉勒特著



现代管理译丛

运筹学导论

——计算机算法

[美] B.E.吉勒特 著

蔡宣三 陈伟基 王永县 译

郑维敏 严筱钧 校订



机械工业出版社

《现代管理译丛》出版说明

第二次世界大战后，特别是六十年代以来，随着科学技术的迅速发展，管理这门科学也有很大的发展，大大地改变了社会的生产面貌。国外的现代管理是在科学管理的基础上发展起来的。现代管理的特点是：重视人的因素；利用现代数学方法和计算机手段，强调经营决策和系统观念；以及采用动态的组织结构来适应国外市场的多变和跨国生产。

现代科学技术和现代管理是推动经济发展的两个车轮。我们在进行社会主义建设时，不仅需要先进的科学技术，而且还需要现代的管理技术。学习和研究国外的现代管理，取其精华，去其糟粕，结合我国的实际，建立起具有我国特点的社会主义现代管理的理论和方法，这是我国各级管理工作者和管理科学研究工作者的光荣任务。

为了使我国读者对国外现代管理的发展有所了解，以资借鉴，我们组织翻译和出版这套《现代管理译丛》。这套译丛包括现代管理的理论、方法、手段及其具体应用。其中有些管理手段虽然不是新出现的，但近年来有新的发展，同时又是现代管理的基础，故也收入本译丛。这套译丛基本上选自国外七十年代后期的著作。这些著作多被作为高等管理学校的教科书或教学参考书，内容比较系统而全面，概括了现代管理的新发展，在理论上和实践上有较高水平。原著的作者多为各国著名学者，或在著名的高等院校任教。但由于条件和水平的限制，这里所选的不尽是国外最优秀的著作，译校工作也难免有不妥之处，希望读者提出宝贵意见，使之更臻完善。

本译丛适合于高等学校管理专业的教师、高年级学生、研究生以及管理人员和研究人员阅读。

译 者 序

运筹学发展至今已有 40 年的历史,但由于运筹学问题的求解往往需要大量复杂的数学计算,因此使这门科学的发展和應用受到限制。电子计算机的出现使这种复杂计算成为可能,因而促进了运筹学理论和实际应用的迅速发展。本书最大的特点是用计算机算法来研究运筹学问题的求解。书中对运筹学的各种数学模型提供了计算机算法及 24 个 FORTRAN 计算机程序,并附有例题和计算机求解结果。这些计算机程序作者曾在 IBM 370/168 计算机上通过。本书的翻译是在郑维敏教授指导下进行的。在翻译过程中,书中的程序全部由陈伟基及王永县两位同志在 FELIXC-256 计算机上使用过。

本书作者是美国密苏里-罗拉 (Missouri-Rolla) 大学计算机科学系教授。本书在出版前,作者曾用原稿作为大学生讲授运筹学教程。作者将运筹学问题分为八大类,本书是按数学模型分类来论述的。本书不包括非线性规划,网络模型也只通过计划评审技术一个特例来说明,因此读者在需要这些内容时,可参考其它有关书籍。

本书译稿中的名词术语尽量采用目前国内通用的译法。个别专用或习惯用的名词,译者根据书中讨论的实际内容来确定。例如我们将 Travelling Salesman 直译为旅行推销员(有的译作货郎或跑外推销员)。

为了方便读者使用,译稿中对程序的注释行(在程序行的最左边标有符号 C 的)译出中文,但程序及数值计算举例全部按书中原文,不再译出。

运筹学及其各分支的理论研究及生产实践应用在我国已有多年的历史,但是用计算机算法研究运筹学问题的著作在国内还很少见。我们希望本书的出版能有助于系统工程及运筹学在我国进一步得到发展,能为我国实现四个现代化贡献一点微薄的力量。由于我们的水平有限,书中错误在所难免,欢迎读者批评指正。

序 言

在计算机出现以前，运筹学（OR）并没有对社会产生太大的影响。虽然对许多问题的求解早已得出了理论结果，但由于计算量太大，这些结果常常不能应用于“实际”问题。今天，计算机已成为每个运筹学研究单位的重要工具，然而，有关面向计算机的运筹学教科书实在太少，还不能满足需要。在这种情况下才促使我写这本教科书。

为了使读者能够立即着手解决实际问题，书中通过用计算机算法求解问题，向读者介绍运筹学的重要方法。由于计算机在求解问题的过程中所起的作用，使这种方法特别吸引人。书中所用的一般方法如下：

1. 列出要求解的问题
2. 建立问题的模型
3. 研究求解模型的方法
4. 介绍求解模型的简明计算机算法
5. 介绍算法的 FORTRAN 计算机程序

本书大多数解法的研究都从一个或几个实例开始，其中许多是用计算机求解的。上述第 1 到第 3 点是帮助读者学习关于能用某种特定的方法求解的问题类型以及如何为求解的问题建立模型。第 4 点的算法，一般是一步一步的详细步骤，很容易编制出计算机程序。最后第 5 点，使读者有可能求解大量的问题，从而可着重于分析结果，以提高读者解决问题的能力。

本书是为了对求解运筹学问题感兴趣的大学生而编写的运筹学导论教科书，可用作运筹学的计算机算法这一简短课程的教科书，同时也适合于专业人员作为最优化方法和计算机程序的手册。本书概述运筹学的重要方法，使之与计算机相结合。本书既适用于专业人员，同时也适用于打算深入研究运筹学或仅希望学习运筹学一般知识的大学生。

全书共分两部份：第一部份为确定性模型及其解法；而第二部份为概率性模型及其解法。

这两部份是相互独立的。确定性模型放在前面，使不熟悉概率的读者可以先了解一般的计算机算法。概率论这一章并不企图介绍概率的全部内容，而仅介绍本书第二部份各章中所需要的概率基础知识。

由于大多数教学计划中，计算机程序已成为基本工具，并已在多数大学里讲授，因而在编写本书时假设读者已掌握 FORTRAN 程序的基本知识。对缺乏这方面知识的人有大量程序入门的教科书可以参考。本书唯一的数学基础是微积分初级课程。

本书和这个领域的其它教科书的区别是，全部用计算机算法。另外，本书还用易于理解而又适合于编程的算法形式介绍文献中许多最新的运筹学方法。

许多算法的后面还列出已在 IBM 370/168 计算机上通过的有效 FORTRAN 程序。每个例题的计算时间是指在 IBM 370/168 计算机上计算所需的时间。有些使用者的计算机

的存贮量有限，因此在程序中说明了如何修改存贮器的要求，以满足这些使用者的需要。

支付复制、手续费和邮寄费以后，可从作者处得到全部计算机程序。

我深深地感谢约瑟夫·凯伦·麦克阿丹姆斯 (Joseph Kieran Mcadams) 在本书准备出版期间忘我的工作。她花费了许多时间，工作超出了职责范围——一遍一遍地阅读原稿，抄写了许多计算机程序，细致地检查本书中所有的程序，帮助解题说明的准备，对此我表示感谢。她的建议和意见是非常有帮助的。这些感谢的话，仅仅是对她为本书尽力所做的一切表示真诚的感激。

在过去 11 年中，许多学生提出的问题建议和意见是非常有价值的。F. 加内特瓦尔特斯 (F. Garnett Walters)，何瓦德·派龙 (Howard Pyron)，以及 C. Y. 霍 (C. Y. Ho) 等教授在他们的课程中使用本书的初稿，我很感谢。特别要感谢汤姆斯·B. 拜尔德 (Thomas B. Baird) 教授，他阅读了“存贮论”有关的章节并提出了有价值的建议。

在从事这项工作的漫长日子里，由于我一家的谅解、耐心和鼓励，使我得到很大的鼓舞。

B. E. 吉勒特

目 录

第一章 绪论	1
1.1 运筹学的产生和发展	1
1.2 运筹学问题的分类	2
1.3 运筹学的数学模型	4

第一篇 确定型运筹学模型

第二章 动态规划	6
2.1 引言	6
2.2 投资问题	6
2.3 利用动态规划解一般分配问题	11
2.4 最优旅行路线问题	19
2.5 生产计划	29
2.6 设备更新	39
2.7 小结	50
第三章 线性规划	55
3.1 引言	55
3.2 列出线性规划模型	55
3.3 线性规划模型的图解法	59
3.4 在不等式（小于或等于）约束条件下求最大值问题	62
3.5 等式和不等式（大于或等于）约束	68
3.6 求目标函数的最小值问题	69
3.7 单纯形法	70
3.8 单纯形算法举例	74
3.9 算法 3.1 的计算机程序	78
3.10 单纯形法的特点	85
3.11 运输问题	86
3.12 分配问题	88
第四章 整数规划	105
4.1 引言	105
4.2 隐枚举法	105
4.3 割平面法	135
第五章 分枝与定界法	160
5.1 引言	160
5.2 分配问题的分枝与定界算法	161
5.3 旅行推销员问题的分枝与定界算法	165
5.4 用分枝与定界算法解整数规划	175
5.5 背包-装载问题的分枝与定界算法	181

VII

5.6 算法 5.4——分枝与定界法的一般算法	194
第六章 确定型存贮模型	201
6.1 引言	201
6.2 无限供给率、不许缺货	207
6.3 有限供给率、不许缺货	207
6.4 无限供给率、允许缺货	209
6.5 有限供给率、允许缺货	212
6.6 小结	213
第七章 排序问题	215
7.1 引言	215
7.2 两台机器的排序问题	215
7.3 三台机器加工 N 个零件的排序问题	228
第二篇 概率型运筹学模型	
第八章 基础概率和统计概念	238
8.1 引言	238
8.2 基础概率	238
8.3 随机变量	242
8.4 离散型随机变量	242
8.5 连续型随机变量	248
8.6 选择合适的分布	255
第九章 回归分析	261
9.1 引言	261
9.2 多项式回归	263
9.3 简单线性回归	278
9.4 小结	302
第十章 决策论	305
10.1 引言	305
10.2 最小最大决策方法	306
10.3 无信息的贝叶斯决策方法	307
10.4 有信息的贝叶斯决策方法	309
10.5 歉函数与损失函数的比较	318
第十一章 对策论	321
11.1 引言	321
11.2 最小最大-最大最小纯策略	322
11.3 混合策略和期望支付	323
11.4 2×2 对策的解	326
11.5 相关的行和列	327
11.6 优势	328
11.7 $2 \times n$ 对策的解	330
11.8 $m \times 2$ 对策的解	336
11.9 布朗 (BROWN) 算法	337

第十二章 计划评审技术 (PERT)	345
12.1 引言	345
12.2 计划评审技术 (PERT) 网络	345
12.3 工序时间估计 (ET)	348
12.4 事件的最早期望完成时间 (TE)	349
12.5 事件的最迟必须完成时间 (TL)	349
12.6 事件松弛时间 (SE)	350
12.7 关键路线	351
12.8 事件按期完成的概率	352
12.9 PERT 分析的计算机程序	354
第十三章 排队论	362
13.1 引言	362
13.2 符号和假设	364
13.3 泊松输入——指数服务分布的排队模型	365
13.4 泊松输入——任意服务时间的排队模型	388
13.5 小结	394
第十四章 仿真	397
14.1 引言	397
14.2 单队, 单服务员排队系统的仿真	398
14.3 随机变数的产生	412
14.4 仿真语言	417
第十五章 概率型存贮模型	421
15.1 引言	421
15.2 单周期模型	421
15.3 多周期模型	434
15.4 小结	450
第十六章 马尔可夫链	453
16.1 引言	453
16.2 马尔可夫链的公式	453
16.3 首次到达时间	464
16.4 马尔可夫分析的计算机程序	467
16.5 小结	473
附录 A 数据表	476
表 A.1 正态分布函数	476
表 A.2 χ^2 检验临界值	477
表 A.3 在柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫一个样本检验中 D 的临界值	477
表 A.4 F 检验的临界值 $\alpha = 0.05$	478
表 A.5 F 检验的临界值 $\alpha = 0.01$	479
附录 B 排队论公式的推导	480
附录 C 解线性方程组的高斯-约当法	483

第一章 绪 论

1.1 运筹学的产生和发展

凡是要求做出肯定决策的任何问题均属于运筹问题，但是，决策的方法多年来已有了很大的变化。虽然，自从有了人，运筹问题就已经存在，可是直到第二次世界大战时才出现运筹学（Operations Research, OR）这一名词，并且形成了现代运筹学的科学方法。第二次世界大战期间，英国制定了一份“军事行动的研究”（Research in military operations）计划，OR 这个名词可能就是从这里来的。在第二次世界大战的早期阶段，英国从各领域中抽调一批专家成立小组，研究保卫英国的问题。这个第一个运筹学小组的工作包括：研究并决定最好地运用空军及最新发明的雷达。因为运筹学在军事行动中得到了成功的应用，所以很快就推广到工业和政府工作的各个方面。到 1951 年以前，运筹学在美国已经成为一门独立的科学。Trefethen[⊖] 曾总结了运筹学产生后的发展历史^[1]。

第二次世界大战后，随着大企业的出现，许多企业变为多种经营，更加复杂，以致使上层领导很快对整个企业失去控制。因此不得不进行分区管理。对整个企业进一步划分的结果，使每一部门只关心它自己的福利，而不考虑企业的其它部门。这样，就使潜在的总效能的发挥受到很大的限制。因此，组织了包括各方面专家的运筹小组，以帮助领导使企业的总效能达到最优，同时承认企业内按职能划分部门的必要性。

Churchman、Ackoff 和 Arnoff 指出^[2]：

用系统方法研究问题，并不表示最广泛的问题必须用一种研究方案来解决。尽管很希望这样，实际上却很少可能实现。在实践中，整个问题的各部分通常是按顺序解决的。

本书中所提出的方法可应用于按顺序解决、意义明确的小问题。本书的重点是学习用计算机处理运筹学的方法，它对许多问题都是适用的；本书的重点不在于用总的系统方法去解决非常大的问题。

Churchman、Ackoff、Arnoff^[2]以及 Hillier Lieberman^[6]详细讨论了运筹方案的六个标准方面，即：

1. 阐述问题
2. 建立数学模型用以表示所研究的系统
3. 从数学模型得出解答
4. 检验模型以及由该模型所得的解
5. 对解进行校正
6. 将解付诸实施：执行

然而，本书的性质决定了我们集中讨论前三方面的问题。但这决不是说，每个运筹方

⊖ 参考文献的作者名字不译成中文，后面的[1]为参考文献序号，下同。——译注

案中其它几方面的问题就不重要了。我们的重点是，当已知问题的数学模型时，获得最优解的方法。

当然，在美国运筹学的迅速发展归功于数字计算机的同时发展。例如，线性规划的单纯形法是在1947年由乔治·B·丹茨格（George B. Dantzig）发明的，但是它却因为现实条件不具备被埋没到50年代中期和末期。那时，在许多大学、企业以及政府机构中有高速的和存储量大的计算机已成为平常的事了。从那时起，计算机帮助了许多运筹方法（时至今日还在应用）的发展或（和）实现。十分明显的是，运筹学与计算机紧密相关，因为如果没有计算机，运筹学只不过是一种理论科学，不会象现在这样成为不断发展的领域。在运筹学中计算机起了必不可少的、非常重要的作用。这就是为什么本书将这二者结合起来的原因。

1.2 运筹学问题的分类

用运筹学方法求解的问题，虽然没有专门的分类，但大多数属于以下几种类型之一：

1. 排序 (Sequencing)
2. 分配 (Allocation)
3. 路线 (Routing)
4. 更新 (Replacement)
5. 存贮 (Inventory)
6. 排队 (Queueing)
7. 竞争 (Competitive)
8. 搜索 (Search)

这些问题都已建立了数学模型，并且求解这些模型的方法在许多情况下是可用的。

排序问题就是将事项排成一定次序以便进行操作（服务）。例如，在某个零件车间， N 个零件在不同的机器上需要停留不同的时间，每个零件以同样次序（不许超越）要在 M 台机器上加工。零件加工顺序应如何安排，才能使所有机器加工所有零件而总时间最小？对两台机器问题，其解是十分简单的，在特殊情况下，三台机器问题的解也是简单的，但对于普遍的 M 台机器问题则是相当困难的。

分配问题就是将资源按某种方式分配到各项活动，使其效果（以某种量度表示）为最优。例如，如果在一组线性约束条件下，效果的量度可以用 n 个变量的某一线性函数表示，则分配问题归类为**线性规划问题**。同样，如果资源是人，每个人可执行 n 件工作中任意一件，但可能需要不同的时间，若每件工作只分配一个人去做，效果的度量是完成所有工作的总时间，则该问题变成**工作分配问题**。若有A、B二人，设A完成工作1用2分钟，完成工作2用4分钟；设B完成工作1和2分别用3分钟和2分钟。每件工作应当分配给谁做，使完成两项工作的总时间为最小？显然，根据观察或计算，应当分配A去做工作1，B去做工作2，总的效果为4分钟。又假设分配A、B、C三人去做三件工作，他们完成这些工作所需时间如下表所列。

人	工 作		
	1	2	3
A	2	6	3
B	8	4	9
C	5	7	8

每项工作应分配给谁来完成？假如我们将所有可能的分配方案都计算出来，则得出下表。

	分 配					
	A:1	A:1	A:2	A:2	A:3	A:3
	B:2	B:3	B:1	B:3	B:1	B:2
	C:3	C:2	C:3	C:1	C:2	C:1
总效果	14	18	22	20	18	12

于是，总效果（即时间）最小为 12 单位。这时应分配 A 做工作 3，B 做工作 2，C 做工作 1。这些都是小问题。但是，假设 20 个人要完成 20 件工作，则完成所有工作的最小时间是多少？用最快的计算机求解，你猜猜要多长时间？如果你猜想要几千年，那末你猜对了，因为有 $20!$ 种不同的分配情况要校验， $20! = 20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 1 \approx 2.433 \times 10^8$ 。很明显，必须要用某些其它的解法。

路线问题就是从出发点目的地有几条路线可以选择时，求一条最优路线。经典的旅行推销员（traveling salesman）问题就是一例。某推销员希望在回到自己家里以前，访问 N 个城市中的每一个，而且对每个城市只访问一次。他应按什么顺序访问这些城市，使总的旅行距离最短？这个问题是卡车送货问题或交货问题（vehicle dispatch or delivery problem）中的一个子问题。交货问题中规定卡车的行车路线要经过几个点，则卡车应按什么次序走过这些点，使总的旅行距离为最短？

更新问题是指为了更换质量将下降或失效的设备，人们必须决定最优的更新时间。如果某人有一辆汽车要换成新的，那么应当在什么时候换？这个问题今天很多人都会碰到。当然，我们每个人都有自己的度量效果的标准。所以即使是每人的汽车都使用得完全一样，也不会有单一的最优解答。很多情况取决于使用汽车的目的，在生活中声望所起的作用，汽车开得多快等等。另一类更新问题是，某种设备（例如灯泡或复杂的计算机部件）在损坏之前一直运行很好，对于这一类设备，最优更新策略应当怎样？

决定仓库里某一定产品应保持多少数量，这个问题是很重要的。如果某顾客要求一定数量的产品，但又不能得到，这意味着失去销售机会。另一方面，如果过多的产品存在仓库中，则存贮费用过大也是不可取的。因此，存贮问题是要决定库存水平，使某种效果的度量为最优。

排队问题往往使我们从早上起床直到晚上休息这段时间内经常感到烦恼。等待洗澡间、等待吃早点、在停车信号灯下等待，等待用计算机，等待，等待，等待，这就是我们生活中的经历。任何等待服务的问题统称为排队或排队问题。运筹学文献中有许多种排队模型的解法；但是大多数实际的排队问题非常复杂，各组成部分相互关联，所以仿真成为这一领域中很重要的技术。

竞争问题是在两个人或几个人争夺贵重资源的情况下出现的。资源的范围可以从象棋中对方的将帅到商业中市场的分享。通常竞争问题是指承包一项服务项目（或获得某种优惠）的投标，可以采用许多不同类型的投标程序，但每种情况都包含着竞争。在这方面实际问题的正式模型是很少的，但是，决策过程的基本概念是值得研究的。

搜索问题与我们已讨论过的其它问题的不同之处，在于它们都是要搜索决策所必需的信息。这方面的一些例子如下：

海面上搜索敌船

审查帐目中的错误

勘探有价值的自然资源，如油、铜或煤

从计算机存储器中检索信息

买一套新衣服

对于每一种情况，目标都是使以下费用为最小，为了减少决策误差而收集和分析数据所需的费用以及与决策误差有关的费用。以后，我们将会看到统计决策论提供了解决许多搜索问题的基础。

1.3 运筹学的数学模型

假设我们要得到给定问题的最优解。为了得到解答，通常更有意义和更方便的是用数学形式将问题写出来。这种数学描述或表达称为问题的**数学模型**。一般说，在模型上处理问题和求解，比原先的非数学形式要容易些。如果，给定问题的数学模型能够用解析法或数值法求解，则可将这个解应用于原问题。假如数学模型能较好地表示问题，则模型的解将是问题的较好解。反之，一个不好的模型，即使求解很准确，其解也不会是问题的较好解。

许多问题能用一些不同的模型来表示，但是其中有一个模型通常比其它的更合适。为此，在过去 25 年中，已有一批具有适当解法的独特模型为人们所熟悉。例如，线性规划模型、动态规划模型、存贮模型和排队模型已有现成的解法。因此，如果给定问题能够用一定型式的线性规划模型来表示，则现成的解法立即可用。任何一个运筹方案的目标是要决定手边问题的最合适的数学模型，然后或者用已有方法去解，或者发展新的解法。

有可能无法为给定的问题建立数学模型。另一方面，也有可能可以建立数学模型，但解该模型的准确方法不能立即运用现成的，或由于需要计算机存贮量太大、或上机时间太长，不适合于用计算机求解。因此，对于这种情况，另一种办法是应用直观法或试探法去解。这一方法已成功地应用于直接求解问题而不必列出数学模型。它也可用来求得许多数学模型的近似解和（或）准确解。试探法通常可保证相当快地得到问题的准确解或至少是足够准确的解。它比数值法求解数学模型要快得多。例如，有一类资源分配问题可以表示成整数线性规划模型，但是，一种叫做**匈牙利法**（Hungarian method）的试探法，在多数情况下可使该问题解得更快。

最后，假如问题太复杂因而不能建立模型以使用现成方法去解，或者假如这个问题不适合于用试探法求解，则我们常可求助于仿真。当然，仿真不能解决所有问题，尽管如此，在研究复杂的大系统时，系统的各组成部分是相互紧密关联的，这时仿真会有很大的价值。

关于仿真的优点和缺点我们将在第十四章进行讨论。

本书的目的是针对大家熟悉的数学模型的大多数解法给出计算机算法，以及重要的试探方法的算法。在多数情况下，提供了算法的计算机程序，所以，读者可以得到各种各样问题的解及其分析，以提高求解问题的能力。在本书中也以容易理解的算法形式列出了文献中查到的一些最新方法。

参 考 文 献

- 1 Ackoff, Russell L., and Maurice W. Sasieni: "Fundamentals of Operations Research," John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1968.
- 2 Churchman, Charles W., Russell L. Ackoff, and L. Arnoff: "Introduction to Operations Research," John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1957.
- 3 Cooper, Leon, and David Steinberg: "Introduction to Methods of Optimization," W. B. Saunders, Philadelphia, Pa., 1970.
- 4 Gaver, Donald P., and G. L. Thompson: "Programming and Probability Models in Operations Research," Brooks/Cole Publishing Co., Monterey, Calif., 1973.
- 5 Hillier, Frederick S., and Gerald J. Lieberman: "Operations Research," 2d ed., Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif., 1974.
- 6 Levin, Richard I., and Charles A. Kirkpatrick: "Quantitative Approaches to Management," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1975.
- 7 Sasieni, Maurice, A. Yaspan, and L. Friedman: "Operations Research: Methods and Problems," John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1959.
- 8 Shamblin, James E., and G. T. Stevens, Jr.: "Operations Research, A Fundamental Approach," McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1974.
- 9 Taha, H. A.: "Operations Research, An Introduction," Macmillan, Inc., New York, N.Y., 1971.
- 10 Thierauf, Robert J., and Robert C. Klekamp: "Decision Making Through Operations Research," 2d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1975.
- 11 Trefethen, F. N.: A History of Operations Research, in Joseph F. McCloskey and F. Trefethen (eds.), "Operations Research for Management," The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., 1954.
- 12 Wagner, Harvey M.: "Principles of Operations Research," 2d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

第一篇 确定型运筹学模型

第二章 动态规划

2.1 引言

动态规划是适用于许多类型问题的数学方法。在一些领域中动态规划已用来解决各种问题，例如，资源分配、货物装运、设备更新、排序、生产计划和存贮等。然而，动态规划只是解决问题的一种“方法”，而不是用来求解所有这些类型问题的一种算法。因此，对每种类型的问题需要单独的（动态规划）算法。许多问题属于分配问题这一类型，因此，可以应用一种动态规划算法求解这一类问题，像投资、广告费的分配，或分配人们去做不同的工作。另一方面，为求解设备更新问题将需要用不同的算法或列出一组函数方程。

动态规划法涉及多级决策过程的最优化。也就是它基本上把已知问题分为许多级（阶段）或许多子问题，然后，按顺序求解各子问题，直到最后解出初始的问题。动态规划法的核心是 Bellman〔2〕所提出的最优化原理，即：

最优策略具有这种性质，即不论其初始状态和初始决策如何，其余的决策必须按照第一个决策所造成的状态构成最优策略。

上述最优化原理是十分重要的概念，在 2.2 节中研究动态规划算法的实例时，将对读者更有意义。

虽然，可以应用动态规划确定大量各种各样问题的最优解，但并不是用这一方法求解所有问题时都是最有效的方法。要确定什么情况下应用动态规划为宜，经验和创造性是指导性的因素。此外，对许多问题已研究出动态规划的算法，但由于受现有计算机的计算时间和存贮器容量的限制，因而实际上动态规划仅仅可以求解很小规模的问题。例如第五章所述旅行推销员问题。可以应用动态规划求解 10, 15, 和 25 个城市的问题，而对求解 50 个或更多城市的问题是做不到的。

在 2.2 节中介绍几个实例，以说明用动态规划求解特殊类型问题的基本概念。在每个例子中，将详细地、逐步地应用动态规划概念求解，随后，给出简明的动态规划算法和求解这个问题的计算机程序。第一个问题先研究投资分配问题。

2.2 投资问题

现在我们研究一般的分配问题，分配一定数量的资源（钱）给许多活动（投资项目），使总利润为最大。为简便起见，更具体地说，假设仅有 8 单位的资源（钱）可以分给 3 个投资项目。每个项目的利润函数见表 2.1。函数 $g_i(x)$ 表示在第 i 个项目（ $i = 1, 2,$

3) 中投资 x 单位的利润。

每个项目的利润和对其它项目的分配方法无关。例如 $g_2(5)=70$ 是第 2 个项目中投资 5 个单位的利润，而不管余下的 3 个单位如何分配到其它两个项目。

为应用动态规划所需的其余两个假设是：

1. 所有项目的利润可以用共同的单位度量。应当注意， x 的度量单位并不一定要和利润的度量单位相同。可能是这样的情况， x 的每个单位代表 5 元，而利润可以是实际的钱数。

2. 总利润是个别利润之和。

应用以上的假设，可以将问题放入到按级顺序求解的更一般的问题中。每级是一个子问题，求解了子问题，就为下一级提供信息。最后一级子问题的解也是原问题的解，这就是用动态规划求解问题的基本方法。我们将用这个原理确定对每一投资项目应分配多少单位的钱，以便总利润为最大。

表2.1 利润函数 $g_i(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_1(x)$	0	5	15	40	80	90	95	98	100
$g_2(x)$	0	5	15	40	60	70	73	74	75
$g_3(x)$	0	4	26	40	45	50	51	52	53

第 1 步

假设现在项目 3 是可用于投资的唯一项目。因为项目 3 的利润函数 $g_3(x)$ 是投资量 x 的递增函数，若把 8 个单位全部投资到项目 3，则利润当然为

$$f_3(8) = g_3(8) = 53$$

而为了得到上述利润，投资数量应为

$$d_3(8) = 8$$

其中 $f_3(8)$ 是从项目 3 得到的最优利润，若 8 个单位全部投资到项目 3。

第 2 步

现在，令

$$f_3(x) = g_3(x) \quad x = 0, 1, 2, \dots, 7$$

为投资 x 单位到项目 3 时，从项目 3 得到的最优利润，且令

$$d_3(x) = x \quad x = 0, 1, 2, \dots, 7$$

为投资到项目 3 的最优数量。这显然是有点烦琐，然而，为了得到动态规划的最后解，建立上述以项目 3 为唯一项目产生最优利润是必要的（见表 2.2）。

表2.2 第 1 步和第 2 步所得的结果

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(x)$	0	4	26	40	45	50	51	52	53
$d_3(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

第3步

假设现在项目3和项目2是唯一可用的项目，全部8个单位可用来投资到这两个项目。因为两个利润函数都是投资数量的递增函数，全部数量都应投资。因而，问题是应有多少单位资源分配到每一个项目？已经知道将任意数量的资源投资到项目3所产生的最优利润，所以，只要检查下列各和式中的每一项以确定最大的利润。

$$\begin{aligned} g_2(0) + f_3(8) &= 53 & g_2(5) + f_3(3) &= 110 \\ g_2(1) + f_3(7) &= 57 & g_2(6) + f_3(2) &= 99 \\ g_2(2) + f_3(6) &= 66 & g_2(7) + f_3(1) &= 78 \\ g_2(3) + f_3(5) &= 90 & g_2(8) + f_3(0) &= 75 \\ g_2(4) + f_3(4) &= 105 \end{aligned}$$

当8个单位均可利用时，投资于项目2和项目3的最大利润用 $f_2(8)$ 表示。即

$$f_2(8) = \max_{z=0, 1, 2, \dots, 8} [g_2(Z) + f_3(8 - Z)]$$

用 $d_2(8)$ 表示投资于项目2的最优数，它是产生 $f_2(8)$ 所必需的 Z 值。在上述情况下

$$\begin{aligned} f_2(8) &= g_2(5) + f_3(3) = 110 \\ d_2(8) &= 5 \end{aligned}$$

第4步

我们仍假设项目2、项目3是唯一可用的投资项目，但是，现在还假设仅有 x 单位可用来投资到这两个项目中 ($x = 0, 1, \dots, 7$)。对每个 x 值 (设 x 个单位可用)，我们计算从项目2和项目3所产生的最优利润。即

$$f_2(x) = \max_{z=0, 1, \dots, x} [g_2(Z) + f_3(x - Z)]$$

投资到项目2的数量为

$$d_2(x) = \text{产生 } f_2(x) \text{ 的 } Z \text{ 值}$$

可以计算 $f_2(x)$ 和 $d_2(x)$ 值，其中 $x = 0, 1, 2, \dots, 7$ 。

这些值为：

$$\begin{aligned} x = 0 \quad f_2(0) &= \max_{z=0} [g_2(Z) + f_3(0 - Z)] \\ &= g_2(0) + f_3(0) = 0 \\ d_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 1 \quad f_2(1) &= \max_{z=0, 1} [g_2(Z) + f_3(1 - Z)] \\ &= \max \left[\begin{array}{l} g_2(0) + f_3(1) \\ g_2(1) + f_3(0) \end{array} \right] = \max \left(\begin{array}{l} 0 + 4 \\ 5 + 0 \end{array} \right) = 5 \\ d_2(1) &= 1 \end{aligned}$$

这就是说如果1单位资源可用来投资到项目2和项目3，那么，最优决策是把这一个单位投资到项目2，总利润是5。