全国高等院校硕士研究生入学试题解答

概率论与数理统计

1980—1984

天津科学技术出版社

全国高等院校硕士研究生入学试题解答

概率论与数理统计

（1980—1984）

陈俊雅　魏文元
韩家楠　蔡有树　编演

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

全国高等院校硕士研究生入学试题解答

概率论与数理统计

（1980—1984）

陈俊雅　魏文元
韩家楠　蔡有树　编演

•

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷三厂印刷

新华书店天津发行所发行

•

开本 787×1092毫米 1/16　印张 19.75　字数 481,000

一九八六年三月第一版

一九八六年三月第一次印刷

印数：1—5,400

书号：13212·111　定价：3.85元

前　　言

为了满足高等院校广大师生的迫切需要，我们编演了这本《全国高等院校硕士研究生入学试题解答（概率论与数理统计）》。

本书收集了北京大学、复旦大学、南开大学、武汉大学、中山大学、北京师范大学、华东师范大学等院校以及中国科学院应用数学研究所等一九八〇年以来，有代表性的硕士研究生入学试题五十套，並全部作出解答。内容丰富，形式多样，典型性强，有深度，有广度，部分试题还有一定的难度。在解答上，我们采用了一般现行教材中常用的方法，並照顾到其自身的系统性，以便于阅读。因此，本书不仅对准备报考研究生的考生是一本较好的参考书，而且对概率统计任课教师、理工科学生以及有志于概率统计的自学者也会有所裨益。

本书的编演工作始终是在我系领导的热情关怀和积极支持下进行的。南开大学数学系概率与信息教研室主任沈世镒副教授在百忙中详细审阅了全部底稿，並提出许多宝贵意见，特致诚挚的谢意。我们还要感谢王隽骧、徐承彝、周概容和杨振明等同志对我们编演工作的热情支持。

参加本书编演工作的还有我室的刘立凯、王秀花和王文豪同志，定稿工作由魏文元、陈俊雅两位同志完成。

由于编者水平所限，且解、编、审的时间仓促，谬误在所难免，恳请读者与同行不吝赐教。此外，部分题目得自转抄，可能有异于原题，敬希鉴谅。

编　者

一九八五年一月

于天津师范大学

目　　录

华东师范大学

1980年

一、设随机事件A，B互不相容，已知$P(A)=p,P(B)=q$.试求：$P(A\cup B)$,($P(\overline{A}\cup B)$,$P(A\cap B)$,$P(\overline{A}\cap B)$,$P(\overline{A}\cap \overline{B})$.

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q$.

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-p$.(由$AB=\phi$，可知$B\subset\overline{A}$)

$P(A\cap B)=P(\phi)=0$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)=q$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-p-q$

二、设有一个独立试验序列，每次试验只有两个结果：成功或失败，且每次试验成功的概率为p，又设第r次成功恰好出现在第ξ次，试求ξ的分布列与$E(\xi)$.

解：ξ的可能值$n=r,r+1,\cdots\cdots$.

令$A=\{$前n-1次试验中有$r-1$次成功$\}$,$B=\{$第n次试验成功$\}$.由于$\{\xi=n\}=AB$，且A与B独立，所以

$$P(\xi=n)=P(AB)=P(A)P(B)=C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-1}p=C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

$$n=r,r+1,\cdots\cdots.$$

$$E\xi=\sum_{n=r}^{\infty}nC_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}=rp^r\sum_{n=r}^{\infty}C_n^r(1-p)^{n-r}.$$

因为$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$　($|x|<1$)，两边对x求导r次，有

$$\frac{r!}{(1-x)^{r+1}}=\sum_{n=r}^{\infty}n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)x^{n-r}.$$

两边除以r!，得

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}}=\sum_{n=r}^{\infty}C_n^r x^{n-r}$$

代入$x=1-p$，有

$$\sum_{n=r}^{\infty}C_n^r(1-p)^{n-r}=\frac{1}{[1-(1-p)]^{r+1}}=\frac{1}{p^{r+1}},$$

故

$$E\xi=rp^r\sum_{n=r}^{\infty}C_n^r(1-p)^{n-r}=rp^r\frac{1}{p^{r+1}}=\frac{r}{p}.$$

三、已知随机变量$\xi\sim N(0,1)$，在给定$\xi=x$条件下$\eta\sim N(\rho x,1-\rho^2)$，在给定$\xi=x$，$\eta=y$条件下$\zeta\sim N(\rho y,1-\rho^2)$ $(0<\rho<1)$，求：

(1)(η,ζ)的联合分布密度及其各自的边际密度；

(2)在给定$\zeta=z$条件下η的条件分布密度.

解：

(1)设(ξ,η,ζ)的联合分布密度为$p(x,y,z)$，(ξ,η)的联合分布密度为$p(x,y)$，ξ的分布密度为$p(x)$，则

$$
\begin{aligned}
p(x,y,z) &= p(x,y)\,p(z\mid\xi=x,\eta=y)\\
&= p(x)p(y\mid\xi=x)p(z\mid\xi=x,\eta=y)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(z-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(z-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}
\end{aligned}
$$

所以(η,ζ)的联合密度为

$$
\begin{aligned}
p(y,z) &= \int_{-\infty}^{\infty}p(x,y,z)dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(z-\rho y)^2}{2(1-\rho)^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(z-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y^2-2\rho yz+z^2)}.
\end{aligned}
$$

即$(\eta,\zeta)\sim N(0,0,1,1,\rho)$.所以$\eta\sim N(0,1)$，$\zeta\sim N(0,1)$.
故η与ζ的边际密度分别为

$$p_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$p_\zeta(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

(2) $$p(y\mid\zeta=z)=\frac{p(y,z)}{p_\zeta(z)}=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y^2-2\rho yz+z^2)}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(y^2-2\rho yz+z^2-(1-\rho^2)z^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y^2-2\rho yz+\rho^2 z^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho z^2)}{2(1-\rho^2)}}$$

即在给定$\zeta=z$条件下$\eta\sim N(\rho z, 1-\rho^2)$。

四、(1)设$\{\xi_n\}$是一列具有相同数学期望，方差一致有界的随机变量，且$j\neq k$时$E(\xi_j\xi_k)\leqslant 0$，证明$\{\xi_n\}$服从大数定律。

(2)设$\{\xi_n\}$为独立随机变量序列，且服从相同的普哇松(Poisson)分布：$P(\xi_n=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(\lambda>0,\ k=0,1,2,\cdots)$，试用特征函数法求

$$\eta_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

的极限分布。

证：(1)设$E\xi_k=a$，$D\xi_k\leqslant b$，$k=1,2,\cdots\cdots$。因为

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k-a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(E\xi_k-a)=0,$$

所以

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\right]^2=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(\xi_k-a)(\xi_j-a)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}D\xi_k+2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}E(\xi_k-a)(\xi_j-a)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}D\xi_k+2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(E\xi_k\xi_j-a^2)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k\leqslant\frac{1}{n^2}nb=\frac{b}{n}.$$

据此及车贝谢夫(Чебышев)不等式便知：对任$\varepsilon>0$，有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\right]}{\varepsilon^2}=\frac{b}{n\varepsilon^2}\to 0\ (n\to\infty)$$

即$\{\xi_n\}$服从大数定律。

（2）因为$\xi_n \sim P(\lambda)$，$n=1,2,\cdots\cdots$，所以ξ_n的特征函数为$\varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

因为$\{\xi_n\}$相互独立，所以$\frac{\xi_k-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}, k=1,2,\cdots\cdots,n$相互独立，故$\eta_n=\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k-n\lambda\right]/\sqrt{n\lambda}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$的特征函数为

$$f_{\eta_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{\frac{\xi_k-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}}(t)=\prod_{k=1}^{n} e^{-i\sqrt{\frac{\lambda}{n}}t}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}\right)$$

$$=e^{-i\sqrt{n\lambda}t}\varphi^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}\right)=e^{-i\sqrt{n\lambda}t}e^{n\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}}-1\right)}$$

$$=e^{n\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}}-1-\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}\right)}$$

$$=e^{n\lambda\left[1+\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}+\frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}\right]}$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}+o(1)}\to e^{-\frac{t^2}{2}}\qquad(n\to\infty).$$

所以η_n的极限分布是标准正态分布$N(0,1)$。

五、设随机变量Y与随机变量X有如下线性关系：

$$Y=a+bX+\varepsilon,$$

其中ε服从均值为0，方差为σ^2（$\sigma>0$未知）的正态分布，现对此进行n次独立观察得一组子样(y_i,x_i) $i=1,2,\cdots\cdots,n$。

（1）试求a与b的最小二乘估计$\hat{a}$与$\hat{b}$，并指出其统计性质；

（2）写出检验回归方程显著性的步骤。

解（1）$y_i=a+bx_i+\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。其中$\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$ $i=1,2,\cdots\cdots,n$。且相互独立。令

$$X=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\quad \hat{\beta}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},$$

则β的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y.$$

其中X'为X矩阵的转置，而

$$X'X=\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} & \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)} \\ \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} & \dfrac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$X'Y=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix},$$

所以，

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix} \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \dfrac{-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)+n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{y}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n(\overline{x})^2} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n(\overline{x})^2} \end{pmatrix}$$

故

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n(\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i x)},$$

$$\hat{a}=\frac{\bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n(\bar{x})^2}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

它们都有无偏性，事实上，

$$E(\hat{b})=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})Ey_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(a+bx_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i}$$

$$=a\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i}+b\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i}$$

$$=a\cdot 0+b\cdot 1=b.$$

$$E(\hat{a})=E(\bar{y})-E(\hat{b})\cdot x=(a+b\bar{x})-b\bar{x}=a.$$

（2）检验假设H_0：$b=0$的统计量

$$F=\frac{(n-2)S_R}{S_e}\sim F(1,n-2)\quad（若H_0为真）$$

其中$S_R=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$是回归平方和，$S_e=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$是残差平方和。

检验步骤如下：

（i）对给定的显著性水平α（$0<\alpha<1$），从F-分布表上查出临界值$F\alpha(1,n-2)$（$P(F>F\alpha(1,n-\alpha))=\alpha$）；

（ii）根据观察数据（x_i，y_i）$i=1,2,\cdots\cdots,n$计算出F的值后作检验：

若$F>F\alpha(1,n-2)$，则拒绝H_0，认为回归方程在水平α下显著；若$F\leqslant F\alpha(1,n-2)$，则接受$H_0$，认为回归方程在水平$\alpha$下不显著。

六、设X_1，…，X_n为取自（$0,\theta$）上均匀分布的一个简单子样，

（1）求θ的极大似然估计$\hat{\theta}$；

（2）证明$X_{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$是$\theta$的一致估计；

（3）证明$X_{(n)}$是θ的充分统计量。

解：（1）由总体的密度函数

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

可知θ的似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i\leqslant\theta,\ i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

当 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\theta$时，有 $0<\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i=x_{(n)}\leqslant\theta$，此时，

$$L(x_1,\cdots,x_n;x_{(n)})=\frac{1}{x_{(n)}^n}\geqslant\frac{1}{\theta^n}=L(x_1,\cdots,x_n;\theta).$$

由此可知 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i=X_{(n)}$是θ的极大似然估计量.

（2）因为总体的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

所以总体的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$$

故$X_{(n)}$的密度函数为

$$p(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}n\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{n-1}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

因此

$$EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx=\int_0^\theta\frac{n}{\theta^n}x^n\,dx=\frac{n}{n+1}\theta,$$

$$EX^2_{(n)}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,dx=\int_0^\theta\frac{n}{\theta^n}x^{n+1}\,dx=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

于是由车贝谢夫(Чебышев)不等式可知，对任ε＞0，有

$$P(|X_{(n)}-\theta|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E(X_{(n)}-\theta)^2}{\varepsilon^2}=\frac{EX^2_{(n)}-2\theta EX_{(n)}+\theta^2}{\varepsilon^2}$$

$$=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\to 0 \quad (n\to\infty)$$

故有$\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_{(n)}-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$。即$X_{(n)}$是$\theta$的一致估计。

（3）因为子样的联合密度为

$$f(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta\ \ i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令

$$D(x)=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则有

$$f(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\frac{1}{\theta^n}D(\theta-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\})D(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}).$$

由费歇—奈曼（Fisher-Neyman）因子分解定理可知：统计量$\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}=X_{(n)}$为$\theta$的充分估计量。

1981年

一、假如$0<P(A)<1$，且$P(B|A)=P(B|\bar{A})$，试证A与B相互独立。

证：因为

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$
$$P(B|A)[P(A)+P(\bar{A})]=P(B|A),$$

所以$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$，即A与B相互独立。

二、一盒中有4个球，球上分别标有号码0，1，1，2，从盒中有返回地抽取2个球。设X为被观察到的球上的号码的乘积，求X的分布列。

解：设ξ为抽取的第一个球上的号码，η为抽取的第二个球上的号码，则$X=\xi\eta$，X可能值为0，1，2，4。

$$\begin{aligned}P(X=0)&=P(\xi=0\text{或}\eta=0)\\&=P(\xi=0)+P(\eta=0)-P(\xi=0,\ \eta=0)\\&=P(\xi=0)+P(\eta=0)-P(\xi=0)P(\eta=0)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{7}{16},\end{aligned}$$

$$P(X=1)=P(\xi=1,\ \eta=1)=P(\xi=1)P(\eta=1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X=2)=P(\xi=1,\ \eta=2)+P(\xi=2,\ \eta=1)$$
$$=P(\xi=1)P(\eta=2)+P(\xi=2)P(\eta=1)$$
$$=\frac{2}{4}\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=4)=P(\xi=2,\ \eta=2)=P(\xi=2)P(\eta=2)=\frac{1}{16},$$

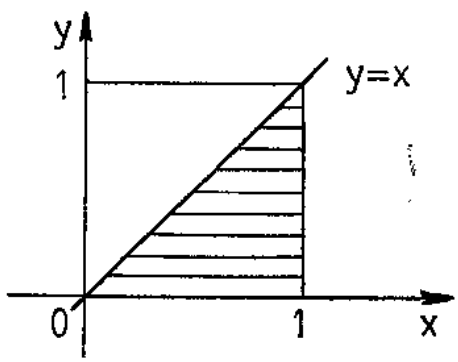
所以，X的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{7}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

三、设随机变量X，Y的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} 3x, & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(P求(1)$X>\frac{3}{4}$)；(2)$P(Y<\frac{1}{2})$；(3)$P(X<\frac{1}{4},\ Y<\frac{1}{2})$；(4)$P(Y<\frac{1}{8}\mid X=\frac{1}{4})$。



解：由图易知X的密度为

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy$$
$$=\begin{cases} \int_0^x 3x\,dy=3x^2/2, & 0<x<1, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

Y的密度为

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx=\begin{cases} \int_y^1 3x\,dx, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-y)^2, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(1) $P(X>\frac{3}{4})=\int_{\frac{3}{4}}^{\infty} f_1(x)dx=\int_{\frac{3}{4}}^{1} 3x^2dx=1-(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$；

（2）$P(Y<\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_2(y)dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(1-y^2)dy=\frac{11}{16}$；

（3）$P(X<\frac{1}{4},\ Y<\frac{1}{3})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{3}}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{4}}\left[\int_0^{x}3xdy\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}3x^2dx=\frac{1}{64}；$$

（4）$P(Y<\frac{1}{8}\mid X=\frac{1}{4})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{8}}\frac{f\left(\frac{1}{4},y\right)}{f_1\left(\frac{1}{4}\right)}dy=\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{3\cdot\frac{1}{4}}{3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}dy=$

$$=\int_0^{\frac{1}{8}}4\,dy=\frac{1}{2}.$$

四、设$\{\xi_n\}$为一致有界随机变量序列，则$\{\xi_n\}$服从大数定律的充要条件为

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0\quad(n\to\infty).$$

证：充分性：

利用车贝谢夫（Чебышев）不等式，有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

所以，$\{\xi_n\}$服从大数定律.

必要性：

令$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，若$\frac{1}{n^2}D(S_n)\not\to 0$，则必$\exists\alpha>0$，和子列$\{n_l\}\subset\{n\}$，使$\frac{1}{n_l^2}D(S_{n_l})>\alpha$，即$D(S_{n_l})>\alpha n_l^2$. 另由$\{\xi_n\}$一致有界，知$\exists$常数$c>0$，使$|\xi_k|\leqslant c$，$k=1,2,\cdots$，故$|S_n|\leqslant nc$，$n=1,2,\cdots$. 特别地，有$|S_{n_l}|\leqslant n_lc$，$l=1,2,\cdots$. 可证明：若$|X|\leqslant 1$，则对任何$\varepsilon>0$有

$$P(|X|\geqslant\varepsilon)\geqslant EX^2-\varepsilon^2. \qquad (1)$$

事实上，

$$EX^2=\int_{\Omega}X^2dP=\int_{|X|<\varepsilon}X^2dP+\int_{|X|\geqslant\varepsilon}X^2dP\leqslant\int_{|X|<\varepsilon}\varepsilon^2dP+\int_{|X|\geqslant\varepsilon}1^2dP$$

$$=\varepsilon^2P(|X|<\varepsilon)+P(|X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon^2+P(|X|\geqslant\varepsilon),$$

故(1)式成立。

因为$|S_{n_l}|\leqslant n_lc$，所以$|ES_{n_l}|\leqslant E|S_{n_l}|\leqslant n_lc$.故

$$|S_{n_l}-ES_{n_l}|\leqslant|S_{n_l}|+|ES_{n_l}|\leqslant 2n_lc.$$

因此有

$$\left|\frac{S_{n_l}-ES_{n_l}}{2n_lc}\right|\leqslant 1.$$

令$X=\frac{S_{n_l}-ES_{n_l}}{2n_lc}$，利用(1)式有

$$P\left(\left|\frac{S_{n_l}-ES_{n_l}}{n_l}\right|\geqslant\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{S_{n_l}-SE_{n_l}}{2n_lc}\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2c}\right)$$

$$\geqslant E\left(\frac{S_{n_l}-ES_{n_l}}{2n_lc}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)^2=\frac{1}{4n_l^2c^2}D(S_{n_l})-\left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)^2$$

$$>\frac{1}{4n_l^2c^2}\alpha n_l^2-\left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)^2=\frac{\alpha}{4c^2}-\frac{\varepsilon^2}{4c^2}=\frac{\alpha-\varepsilon^2}{4c^2}>0\ (取\varepsilon^2<\alpha).$$

由此可知，当$n\to\infty$时，

$$P\left(\frac{S_n-ES_n}{n}\geqslant\varepsilon\right)\not\to 0.$$

即$\{\xi_n\}$不服从大数定律，矛盾。因此，若$\{\xi_n\}$服从大数定律，必有

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

五、设随机变量ξ服从均匀分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(1)求θ的矩法估计$\hat{\theta}_1$；

(2)求θ的极大似然估计$\hat{\theta}_2$；

(3)在均方误差$E(\hat{\theta}-\theta)^2$意义下比较上述估计哪一个为好？

解：(1) $E\xi=\int_0^\theta x\frac{1}{\theta}dx=\frac{\theta}{2}$. 用矩法估计得出方程$\bar{\xi}=\frac{\theta}{2}$，解此方程得$\theta$的