高 等 学 校 教 材

高 等 数 学

（物理类专业用）

（第二版）

第 一 册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

出 版 前 言

本书是四川大学数学系编《高等数学》第一册的第二版. 编者根据原教育部制定的"高等数学教学大纲"调整了部分内容,仍保持了第一版的结构,书末增加了习题答案. 主要内容为函数和极限、微分学、不定积分、常微分方程初步、定积分等.

本书由周城璧同志编写,贾瑞霞同志选配习题及答案,本书可供综合大学和师范院校物理类专业作为教材.

高等学校教材
高等数学
(物理类专业用)
(第二版)
第一册
四川大学数学系高等数学教研室　编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷二厂印装
*
开本 850×1168　1/32　印张 11.75　字数 284 000
1978年3月第1版　1987年10月第2版　1987年10月第1次印刷
印数0 001—6 130
ISBN7-04-000232-9/O·271
书号 13010·01491　定价2.25元

再版前言

本套书(共四册)自1978年2月起陆续出版以来,收到许多读者的来信,对本书的内容安排,习题配备等方面提出了很多宝贵意见,有的读者还为书中出现的错误编制了勘误表,这对我们的修改工作起了很大的作用. 借此再版之机,向关心和支持我们工作的广大读者,表示衷心的感谢.

本套书是根据原教育部制定的"高等数学教学大纲"(由北京大学拟订供物理类专业使用)修订的,我们对第一版书中未严格证明的定理补充了证明(少数证明较复杂,或涉及内容超出大纲的例外). 考虑到与高中内容的衔接,函数和极限部分的讲法尽量与中学的讲法一致,极限一节中略为补充了一些内容,习题的配备也作了一定的修改. 书后备有答案.

中山大学范达副教授细致地审阅了修订稿,提了许多宝贵的意见,对提高本书的质量起了很大的作用,我们非常感谢.

由于我们水平有限,虽然这次修订我们尽了很大的努力,但错误和不妥之处仍可能出现,希望广大读者予以指正.

编　者

1987年1月于四川大学

序　言

本书是根据1977年10月在上海召开的理科教材编写大纲讨论会所拟订的物理类高等数学和数学物理方法编写大纲写成的.

全书分四册出版. 前三册为高等数学部分; 第四册为数学物理方法部分. 具体内容为: 第一册包括函数与极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分; 第二册包括立体解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、场论初步、无穷级数(包括傅氏级数)、反常积分; 第三册包括线性代数、微分方程、概率论初步; 第四册包括复变函数、数学物理方程、特殊函数等.

由于物理类各专业所需要的数学不尽相同, 本教材除共同需要的部分外, 增加了一些加*号的内容, 各专业可根据需要, 自行选用.

本书初稿完成后承有关兄弟院校的同志进行审稿, 提供了许多修改意见, 特此表示衷心的感谢.

由于水平所限, 又兼仓促完稿, 本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面, 还存在许多问题, 希望同志们指正.

编　者

1987年2月

目　录

第一章　函数与极限

十七世纪笛卡尔(Descartes)把变量引入数学，对数学产生了巨大的影响，它反映了社会的客观发展对数学这门科学的推动.在此基础上促使高等数学的一个重要部分——微积分学——的形成和进一步的发展. 微积分学以极限为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系即函数关系，以及通过这些关系所表现出来的重要性质.

作为讨论微积分的准备，本章首先介绍变量、函数、极限和连续这些基本概念，并着重说明极限这个重要的工具.

第一节　函　　数

我们以前所学的初等数学是研究常量的数学. 它只能反映相对不变的现象，而现实世界则普遍存在着矛盾、运动和不断变化的量，初等数学无法反映变量的变化规律. 高等数学就是研究变量的数学. 对实际中的变量进行研究，就抽象出了函数的概念.

§1.1.1　变量

当我们观察某个自然现象或技术过程时，会遇到很多的量，这些量一般可分为两类：一类是在某过程进行中保持不变的量. 即在事物的运动或变化过程中，保持一定数值的量；另一类是在过程进行中不断改变的量，即在事物的运动或变化过程中可以取不同的数值的量. 例如自由落体的下降速度、落体与地面的距离在不断改变，而落体的质量在这一过程中则保持不变. 再如将一个密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数是不改变的量，而气

体的温度和压力则不断地变化.

定义 1 在某一过程中，数值保持不变的量称为**常量**(或常数)；数值不断变化的量称为**变量**(或变数).

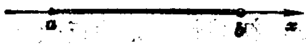
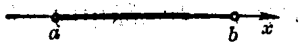
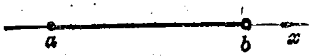
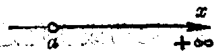
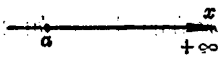
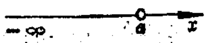
一个量是常量还是变量，在具体问题中要作具体的分析.

以后，我们用字母 $x,y,z,\cdots\cdots$ 表示变量；用字母 $a,b,c,\cdots\cdots$ 表示常量.

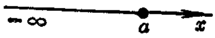
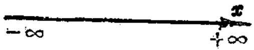
关于集合的初步知识，读者在中学已学习了，本书不再重复.

本书所说的数都是实数. 实数全体组成的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$. 本书所说的数集都是指实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.

在观察各种运动过程的时候，我们还发现，有些变量具有一定的变化范围，例如，自由落体的下降时间、落体与地面的距离只有在落体落到地面之前才有意义；一天中时间的取值，总是介于 0 到 24 之间. 我们把变量变化的范围叫做变域，而变域常常是由区间所组成，什么是区间呢？我们列表如下：

定　义	名称	符号	图　象
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭 区 间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开 区 间	(a,b)	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,b]$	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\}$	无限区间	$(a,+\infty)$	
$\{x\mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,+\infty)$	
$\{x\mid x<a\}$	无限区间	$(-\infty,a)$	

续表

定　　义	名称	符号	图　　象
$\{x\|x\leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty, a]$	
$\{x\|x\in\mathbf{R}\}$	无限区间	$(-\infty, +\infty)$	

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$

注意：这里“∞”并不表示数量，它只是一个记号，前面的“+”，“−”表示方向.

例 1　满足不等式 $-\pi\leqslant x<0$ 的全体实数 x，组成半开区间 $[-\pi,0)=\{x|-\pi\leqslant x<0\}$.

例 2　$(a-\delta,a+\delta)=\{x||x-a|<\delta,\delta>0\}$，称为点 a 的 δ 邻域．它是一个以 a 为中心．长度为 2δ 的开区间(图 1.1).

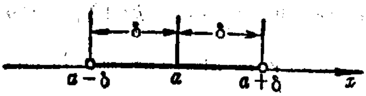


图　1.1

在 a 的邻域内去掉 a，即 $\{x|0<|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$ 称为 a 的去心邻域.

§1.1.2　函数概念

1. 函数定义

在同一自然现象或技术过程中，往往同时遇到两个或更多个的变量，这些变量不是孤立地在变化，而是互相联系互相依赖且循着一定的规律变化着．下面先看几例：

例 1　圆的面积 S 与它的半径 r 间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定，当半径 r 取定某一正的数值时，圆面积 S 相应有一个确定的

数值.

例 2 在初速为 0 的落体运动中，路程 s 和时间 t 是两个变量，当时间变化时，所经历的路程也跟着改变，它们之间有下列关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \quad (t\geqslant 0, g \text{ 是重力加速度、常量}).$$

例 3 在电阻两端加直流电压 V，电阻中有电流 I 通过. V 改变时，I 随之改变. 若电阻 $R=2$(欧)，求 I 随 V 变化的规律(图 1.2).

解 (1) 由欧姆定律，

$$I=\frac{V}{R}$$

当 $R=2$(欧)时，

$$I=\frac{V}{2} \tag{1}$$

(2) 当电压 V 改变时，电流 I 按(1)式相应改变；并且加反向电压(即电源反接，这时 V 取负值)电流也反向(即 I 也取负值)，它们的数值可按公式(1)算出，列表如下

V(伏)	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
I(安)	…	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…

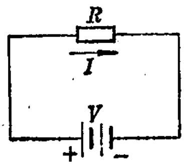


图 1.2

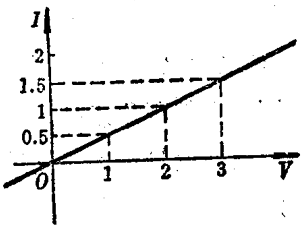


图 1.3

(3) 以 V 为横坐标，I 为纵坐标，在平面直角坐标系中描出各

点，这些点联成一条直线. 这条直线也表示 I 随 V 变化的规律(图1.3).

由上面三个例子，我们看到它们都表达了两个数集之间的一种对应规律，根据这一规律在一个实数集内取定一个数值时，按照对应规律，另一数集内有唯一的数与之对应.

定义 设有非空数集 Z 与实数集 $\mathbf{R}$，f 是一个确定的对应规律. 如果对数集 Z 中的每一个数 x，按照对应规律 f，实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一一个数 y 与之相对应，我们称 f 是从数集 X 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数，记为

$$f: X \longrightarrow \mathbf{R}.$$

函数 f 在 x 点的值记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，X 称为函数 f 的定义域.

当 x 取遍 X 中一切数时，与它对应的 y 组成数集，记为

$$f(X)=\{y \mid y=f(x), x \in X\},$$

称为函数的值域，显然 $f(X) \subseteq \mathbf{R}$.

几点说明：

(1) 为了使用方便我们将符号“$f: X \longrightarrow \mathbf{R}$”记为“$y=f(x)$”，或说“$f(x)$是 x 的函数(值)”.

(2) 符号 $y=f(x)$表示两个数集间的一种对应关系，因此也可以用 $y=\phi(x)$，$y=F(x)$等表示，但一个函数在讨论中应取定一种记法；同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律，以避免混淆.

(3) 用 $y=f(x)$表示一个函数时，f 所代表的对应规律已完全确定，对应于 $x=x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$.

例如，设 $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$，它在 $x=0$，$x=-1$ 的函数值为

$$y|_{x=0}=f(0)=\sqrt{4-0^2}=2,$$

$$y|_{x=-1}=f(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

下面给出一些函数的例子.

例 4 前面提到的圆面积 S 是其半径 r 的函数，故可记为 $S=f(r)$，而这里的 $f(r)$ 就是 πr^2. 即

$$S=\pi r^2,$$

它的定义域为 $r>0$.

例 5 某地的气温 T 是时间 t 的函数，可以记为

$$T=T(t).$$

若取某日的 0 时为 $t=0$，则它的定义域为 $t\in(-\infty,\infty)$，但是在这里 $T(t)$ 无法用一个确切的数学式子表示出来.

例 6 常量 C 也可以视为自变量 x 的函数.

$$y=f(x)\equiv C.$$

它的定义域即 x 的变域.

例 7 $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$，定义域为 $x\in(-a,a)$.

例 8 $y=\ln(x-1)$ 的定义域为 $x>1$.

(4) 由函数的定义可知，对于任意 $x\in X$，$\mathbf{R}$ 中有唯一一个 y 相对应，这种对应称为由 X 到 $\mathbf{R}$ 中的单值对应. 但函数定义中没有要求不同的 x 对应不同的 y，即不同的 x 可以对应相同的 y.

例如，函数 $y=x^2$，当 $x=x_0$ 和 $x=-x_0$ 时，都有 $y=x_0^2$，即 $f(-x_0)=f(x_0)=x_0^2$.

2. 函数表示法

a) 表格法：表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出. 实际应用中多用此法.

如从某河的一个断面测得每隔 2 米的河深 y 如下表：

x(米)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y(米)	0	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0

从表上大致可看出河深 y 随 x 变化而改变的情况.

表格法的优点是用起来方便；缺点是数据不全，不能查出函数的任意值.

b) 图示法：把自变量 x 与因变量 y 当作直角坐标平面内点的坐标，y 与 x 的函数关系就可用这平面上的曲线表出.

例如，设 $y=f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数，在平面上取定直角坐标系后，对于每一个 $x\in[a,b]$，由 $y=f(x)$ 都可确定平面上一点 $M(x,y)$. 当 x 取遍 $[a,b]$ 中所有值时，点 $M(x,y)$ 描出一条平面曲线，称为函数 $f(x)$ 的图形.

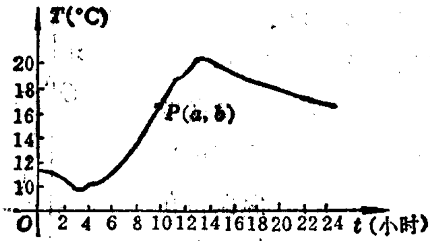


图 1.4

如自动记录温度计记录了某地一昼夜气温变化情况，横轴表时间 t，纵轴表温度 T(°C)，曲线上任一点 $P(a,b)$，表示在时刻 $t=a$ 时，相应的气温 $T=b$.

图示法的优点是直观性强，缺点是不便于作理论的推导和演算. 如从图 1.4 上看出气温函数的定义域是 $0\leqslant t\leqslant 24$，气温在 4 时左右最低，等.

c) 分析法(公式法)：

把两个变量之间的函数关系直接用数学公式表出，并注明函数的定义域，对数学公式进行运算就可由自变量的值得到对应的函数值. 数学分析中所涉及的函数大多用此法表出.

如 § 1.1.2 例 2 中的变量 t 与 s 的函数关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出. 例 1 中的变量 S 与 r 的函数关系由公式

$$S=\pi r^2$$

给出. 有时需要用几个式子表示一个函数. 例如空气温度 T 与高度 h 的关系,就用两个函数来表示.

我们知道, 离地面越高气温越低. 按照地球的中纬度地区平均大气状态,国际上规定了标准大气压. 根据这个规定,温度 T 与高度 h (千米)的变化规律是

$$T=\begin{cases}15-6.5h, & h<11,\\ -56.5, & 11\leqslant h\leqslant 80,\end{cases}$$

式中温度的单位是摄氏度 随着高度的增加,气温逐渐下降,但高度超过11千米而在 80 千米以下时,气温保持在 $-56.5°C$, 这一高度的大气层叫做同温层(图 1.5).

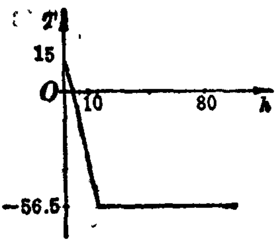


图 1.5

如果函数在不同的范围内用不同的式子表示, 这样的函数称为**分段函数**.

对分段函数求函数值时, 不同点的函数值应代入相应范围的公式中去. 如要问 6 千米高空处气温是多少, 这时 $h=6<11$. 所以应代入第一个式子中去求. 得

$$T=15-6.5\times 6=-24(°C),$$

而如要求 15 千米处高空的气温,就应该用第二个式子来计算, 这时温度是 $-56.5°C$.

下面介绍几个规定函数的例子.

例 9 "对任意 $x\in R$, 对应的 y 是不超过 x 的最大整数". 显然对任意 $x\in R$ 都对应唯一一个 y, y 是关于 x 的一个函数. 记为

$y=[x]$. 如

$$[2.5]=2,\quad [3]=3.\ [-\pi]=-4.$$

例 10 “对任意 $x\in R$,对应的 $y=x-[x]$”表示 x 的一个函数,记为 $y=\{x\}$,如

$$\{2.5\}=2.5-[2.5]=2.5-2=0.5,$$

$$\{7\}=7-[7]=7-7=0.$$

$$\{-3.14\}=-3.14-[-3.14]=-3.14-(-4)=0.86$$

例 11 “对任意 $x>0$,对应 $y=1$; $x=0$, 对应 $y=0$; 对任意 $x<0$. 对应 $y=-1$”. 显然对任意 $x\in R$,都对应唯一一个 y, y 是关于 x 的一个函数,记为 $y=\operatorname{sgn}x$,即

$$y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

因为对任意 $x\in \mathbf{R}$,总有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$, 这个函数称为符号函数(或克朗涅克尔函数).

§1.1.3 函数的几种特性

下面,我们简单地讨论一下有关函数的几种特性.

1. 函数的单调性

当自变量从小到大取值时, 有些函数如 $y=x, y=x^3$ 等, 随 x 的增大函数值也增大,其图形从左向右上升. 而有的函数则相反. 函数的这种性质,用数学表示出来即有

定义 1 函数 $y=f(x)$, $x\in X$, 在 X 上任取两点 x_1, x_2, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),\quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$在 X 上单调增加(或单调减少).

如果在 X 上任取两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

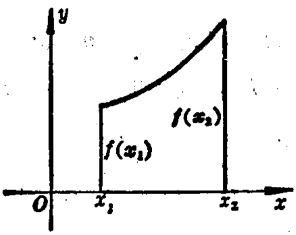
$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调增加(或严格单调减少)．

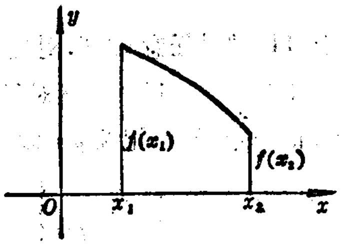
单调增加(或严格单调增加)的函数与单调减少(或严格单调减少)的函数，统称为单调函数．

如果 X 是区间，此区间称为函数 $f(x)$ 的单调区间．

单调增加的函数的图形是沿横轴正向上升的(图 1.6(a))．



(a)



(b)

图 1.6

单调减少的函数的图形是沿横轴正向下降的(图 1.6(b))．

例 1 讨论 $f(x)=x^2$ 的单调性．

解 设 x 任取二值 x_1, x_2，使 $x_1<x_2$．

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

当 $x_1<x_2\leqslant 0$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，即在区间 $(-\infty, 0]$ 内，函数 $f(x)=x^2$ 严格单调减少．其图形在 y 轴左方为下降．

当 $0\leqslant x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$ 即在区间 $[0, +\infty)$ 内，函数 $f(x)=x^2$ 为严格单调增加，图形在 y 轴右方为上升(图 1.7)．

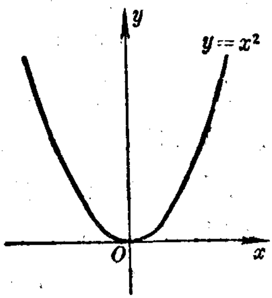


图 1.7