

思维数学引论

孟凯楠 著

(国家自然科学基金资助项目)

科学出版社

1991

思维数学引论

孟凯韬 著

责任编辑 林 鹏

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年10月第一版 开本：850×1168 1/32

1991年10月第一次印刷 印张：7 3/8

印数：0001—3 700 字数：187 000

ISBN 7-03-002399-4/O · 450

定价：6.40元

序

论功行赏，奖勤罚懒，这是任何正常社会都不能缺少的措施。然而辨庸敏、别妍媸的方法从来未能使人满意。就说实行了一千多年的考试，其中总不免机会因素。百余年间，人人知道这个缺点，而总也没有找到一种较好的办法。脑力劳动不像机器运转那样具体直观，一直就是凭估计办事。现在时代不同以往了，对任何事物的要求也逐渐严格，因而品评思维活动的理论与方法便日渐紧迫。

思维是转化信息的脑力活动，其中转化的痕迹，局外人看不见听不到、抓不住，难于估计所做的劳动和效果。所以千百年来没有恰当的考核方法。西北大学数学系孟凯韬先生，把人的思维活动数字化，把思维规律格式化，给思维的各个方面，提出鉴定的方法，由此汇集为思维品质函数，这就是人类脑力活动的数学模型。用这公式描述的数学模型可以考核、鉴定、对比脑力劳动的品质。它的效果就像三棱镜之分日光。

用本书的语汇来说，脑力活动是由若干思维链结成的。这些思维链可以前后衔接，也可以并列交叉。更复杂的情形可能由几个方面合成。本书将参差错杂的各种情形，条分缕析，论列详尽。每个思维链有长度、广度、创造性、效果性、灵活性、流畅性等等，各种性质都有合情合理的计算方法，把这些基本方法加以总结而编辑成一部论述思维数学的专著。

著者对这部专著不仅付出了多年的心血，还忍受了许多意想不到的灾难。新事物产生都是这样的，最初他写成散文，向国内名家请教。物理学家钱学森先生给他很多鼓励，于是他更加淬砺自己。80年代中期渐具体系。又经过多次修改补充，近来经过不少名家推荐，将由科学出版社付梓问世，由孟凯韬先生首创的思维

数学,必将推进思维科学、人工智能和软科学的发展。

传统数学只用形式逻辑,而形式逻辑不能从根本上产生新的理论。孟先生著的这本书采用了一些公认的真理论作根据,突破了单纯形式逻辑的框框。这是向传统数学大胆的挑战。

思维数学刚刚建立,不敢说它已经尽善尽美。但是孟先生无疑地作了一个良好的开端,由这个开端引起国人共同研究,蔚为一支繁茂的学科已是意料中的事了。

我佩服孟凯韬先生的胆识、创造精神、潜心研究与百折不挠的毅力,在新书即将出版之际,乐为之序。

赵慈庚

序于北京师大

1990年10月31日

前 言

本书旨在为建立“思维数学”这样一门新学科奠定一个基础。按照作者的构想，思维数学是一门用数学方法研究思维的品质与规律的科学，是思维科学与数学的交叉学科。其任务在于，研究思维中的数学问题和为思维科学的研究提供新的数学工具。

本书共分八章：第一章介绍与思维数学有关的一些问题和思维数学的任务、研究对象、研究方法及其与邻近学科，诸如哲学、心理学、经济学、软科学、科学计量学、教育学、人才学、创造学等的关系。第二章引入“自然集合”、“系统套”、“分级数”、“广义距离”等概念，并由此建立了思维数学基本的方法。第三章引入“思维链”的概念，并对思维链定义了长度、阶、新颖度、跨度积、拐度、辐射度、辐辏度、伪度和陡度，并且导出诸如独创度、效度、广度、灵活度、流畅度、统摄度、严谨度和耗散度等从不同的侧面衡量思维品质优劣的量，从而将思维品质的评价问题最终归结为求一个八元多项式函数的值的问题。第四章研究思维空间的结构与层次，以及诸子空间的性质和思维空间的维数问题。第五章讨论思维函数及其连续性、相似性、对称性、对立性和协同性。六、七两章分别从思维函数运算和变换的角度研究创造发明的规律。第八章定义了思维函数的新颖度、罕见度、凝聚度、繁难度、渗透度、不朽度、扩散度、增效率和增效度，并给出相应的计算方法，从而将思维成果的评价问题最终也归结为求一个多元多项式函数的值的问题。每章之后各有一个小结。

本书仅仅是“思维数学”研究的开端，是作为一项探索性工作。由于作者水平所限，谬误和不妥之处在所难免，恳请读者多加批评指正。

孟凯韬

1990年6月30日

• iii •

目 录

第一章 绪论	1
§ 1 关于思维的若干问题	1
§ 2 思维的物质基础	4
§ 3 思维科学的兴起	7
§ 4 思维数学建立的基础和条件	9
§ 5 思维数学的任务和研究对象	10
§ 6 思维数学的研究方法	12
§ 7 思维数学与邻近学科的关系	13
第二章 思维数学中的评价方法	17
§ 1 自然集合及其运算	17
§ 2 系统套与分级数	19
§ 3 微观广义距离	24
§ 4 宏观广义距离	30
§ 5 广义距离综合分析法	37
§ 6 多元多项式函数抽象分析法	47
第三章 思维链及其在思维品质定量分析中的应用	55
§ 1 思维链的概念	55
§ 2 思维链的长度与信息量	69
§ 3 思维链的新颖度与阶	73
§ 4 思维链的跨度与拐度	80
§ 5 思维链的辐射度	85
§ 6 思维链的辐转度	86
§ 7 思维链的伪度	89
§ 8 思维链的耗散度	90
§ 9 思维矩阵、思维向量和思维品质函数	94

§ 10	智力水平的评价	97
第四章	思维空间	108
§ 1	思维空间的结构与层次	108
§ 2	思维的背景空间	114
§ 3	思维的知识·智能空间	120
§ 4	思维的方向·目标空间	122
§ 5	思维的算子空间	123
§ 6	思维的临时中心子空间, 共鸣原理和惯性原理	125
§ 7	思维空间的维数	128
第五章	思维函数的概念、产生前提及其性质	131
§ 1	思维函数和思维函数族的概念	131
§ 2	思维函数产生的前提	136
§ 3	思维函数的连续性	140
§ 4	思维函数的相似性	147
§ 5	思维函数的对称性	152
§ 6	思维函数的对立性	156
§ 7	思维函数的协同性	159
第六章	思维函数的运算	164
§ 1	思维函数运算的基础	164
§ 2	思维函数的并	166
§ 3	思维函数的积	169
§ 4	思维函数的逆	171
§ 5	思维函数组合分析	173
第七章	思维函数的变换	176
§ 1	思维函数的等价变换	176
§ 2	思维函数的相似变换	182
§ 3	思维函数的相对变换	184
第八章	思维函数的评价	187
§ 1	思维函数的新颖度与罕见度	187
§ 2	思维函数的凝聚度	196

§ 3	思维函数的繁难度	201
§ 4	思维函数的渗透度	205
§ 5	思维函数的不朽度	207
§ 6	思维函数的扩散度	211
§ 7	思维函数的增效率与增效度	213
§ 8	思维函数的价值函数	214
参考文献		222
后记		223

第一章 绪 论

§ 1 关于思维的若干问题

思维数学,开宗明义是以思维中的数学问题为研究对象的.既然如此,就不能不对“思维”有一个概略的了解.

首先,是思维的概念,思维与语言的关系,以及思维的分类问题.

思维是人脑对于客观事物的本质及其内在联系的间接和概括的反映.所谓间接性,即认识现在、推测过去、预见未来,都必须以已有的知识、经验或其他事物为中介.而所谓概括性,即略去同类事物的具体差异,而抽取其共同的本质或特征加以概括.这种反映既不同于感觉与知觉,又不同于表象.感觉、知觉是对客观事物个别性或整体性的直接反映,表象是对过去感知到的事物的重现反映.

思维必须借助于语言这一工具,它与语言和言语有着密不可分的关系.这里所说的语言,是指由基本词汇和语法规则所构成,并以能听到的声音和能看见的形状而存在的一种系统;而言语则是人运用某种语言表达自己的思想情感和影响别人的过程.语言和言语虽有区别,但又相联系:言语不能离开语言材料和语法规则而独立存在;任何一种语言都必须通过言语才能发挥其作用.

思维有各种各样的分类法:(1)按其水平及其凭借的不同,可分为动作思维、形象思维和抽象思维,其中,动作思维以实际动作为支柱,形象思维以直观形象和表象为支柱,抽象思维以概念为支柱;(2)按其探索答案的方向的不同,可分为收敛思维[又称求同思维、聚合思维、集中思维、辐辏思维]和发散思维[又称求异思维、分散思维、辐射思维],其中,收敛思维是聚合各种信息以求得正确答案,发散思维是从一个目标出发,沿着各种不同的途径去探求正

确答案；(3) 按其主动性和创造性的不同，可分为习惯性思维和创造性思维，其中，习惯性思维采用惯常的方法，有一定的模式，创造性思维没有现成的方式和一定的模式，而富于主动性和创造性。

当然，思维的分类并不限于以上方法，还有其他许多分法。譬如，按照思维的方向，可分为纵向思维、横向思维和反向思维；按照思维活动的特点，可分为演绎思维、归纳思维、统摄思维、批判思维、直感思维，等等。

其次，是思维的生理机制问题。

关于思维的生理机制，有各种各样的解释。巴甫洛夫学派认为，人的高级神经活动有两种信号系统：一种是以具体刺激物作为信号刺激而建立的暂时神经联系系统，称之为第一信号系统；一种是以词作为信号刺激而建立的暂时神经联系系统，称之为第二信号系统。思维的生理机制，即借助于以第一信号系统活动为基础，第二信号系统活动为主导的两种信号系统的协同活动，对客观事物进行多阶段的分析综合和抽象概括，并在大脑皮层形成多级性的、概括程度不同的暂时神经联系链。现代脑科学的研究成果，又从不同的角度对思维的生理机制作了说明：(1) 各个脑区都有各自的特殊作用，每一种机能系统都包含着众多脑区的活动，思维的生理机制即联合脑的协同活动；(2) 第二信号系统在思维中起着重要调节作用，思维的生理机制即 α 波被阻断而出现 β 波；(3) 人的大脑两半球的机能不完全对称而有专门分工，但同时又协同活动，思维的生理机制即大脑两半球的协同活动。

再次，是思维的基本过程及解决问题的思维过程问题。

思维的基本过程，包括分析、综合、比较、分类、抽象和概括。这些过程是相互联系的。其中，分析与综合，比较与分类，抽象与概括，分别构成一对矛盾，或者相互制约、相互依存，或者一个为另一个创造条件。

分析是指将事物分解成各个部分、个别特性或个别方面；综合则是指将事物的各个部分或个别特性、个别方面结合起来。思维过程总是按“综合—分析—再综合”的图式进行的。分析和综合有

三种水平：一是对物体实际操作时的分析和综合；一是对物体的感性形象进行的分析和综合；再一个就是对词语符号的分析和综合。

比较是指确定对象之间的异同；分类则是指根据对象的共同点和差异点，把它们区分为不同的种类。比较是分类的前提，只有通过比较才能鉴别。比较必须根据一定的标准，没有一定的标准不能进行比较，标准不同也不能进行比较。分类也必须根据一定的标准，即必须以对象的某种属性或关系为依据。由于事物的属性及一事物与其他事物之间的联系具有多样性，因而分类的标准也是多种多样的。此外，它还受到思维主体主观因素的影响。

抽象是指把各种对象与现象之间的本质属性抽取出来；概括则是指把抽出来的这些属性结合起来，推广到同一类事物上去。抽象与概括是高层次的分析与综合。抽象和概括也有不同的水平：一种是初级的经验概括；一种是高级的科学概括。由于受思维主体主观因素的影响，抽象和概括都可能有正确与谬误之分。

除了上述过程外，思维过程有时还包括系统化和具体化。所谓系统化，即在概括的基础上，把一类事物按不同的顺序与层次组成一定的系统。所谓具体化，即把抽象出来的一般特点应用到具体对象上去。

关于人类解决问题的思维过程，心理学界一般认为可分为四个阶段，即发现问题、分析问题、提出假设和验证假设。然而，这仅仅是一种描述性的分析。近年来，许多心理学家又从探讨思维机制的角度或从信息加工及其操作控制的角度进行了动态的分析。

苏联心理学家彼得罗夫斯基等认为，解决问题是从问题情境开始的，而解决问题的思维过程包含着一系列由因果关系决定的推测。这种推测往往是由已知过渡到未知的桥梁。所谓问题情境，即是由于产生了新目的，而过去的活动手段和方式不足以达到这种目的时的情境。

认知心理学家认为，解决问题的思维需要具有三个特征，即：
(1)具有明确的目的性；(2)有一系列的运算序列，包括一系列心

理步骤；(3) 有认知成分的参与。同时认为，解决问题的全过程，就是从初始状态开始，经过中间状态，达到目标状态的过程。这里的所谓初始状态，即思维主体的最初状态；目标状态，即思维主体最终所要达到的目标。而所谓中间状态，即从初始状态到目标状态之间的各种状态，亦即问题空间。

最后，就是将要在第三章着重研究的思维品质问题。

思维品质是人们所共有的心理特征。然而，不同的思维主体，其思维品质则往往存在很大的差异。思维品质良好与否，可以从思维的独创性[即思维的新颖性和创造性]、敏捷性[即发现问题的迅速程度和解决问题的及时程度]、灵活性[即能从实际出发，善于根据事物的发展变化，机智地解决问题的程度]、流畅性[即思路开阔的程度]、广阔性[即思维的广度]、深刻性[即思维的深刻程度]、逻辑性[即思维符合逻辑的程度]等方面进行考察。在第三章中，还将提出两个新的概念——统摄性和耗散性，它们也可作为衡量思维品质良好与否的指标，而且是比较高的指标。

§ 2 思维的物质基础

思维是人体生命活动的一种高级形式。大脑是高度组织起来的物质，是思维得以进行的基础。

大脑位于脑的顶部，分为左、右两个半球。左侧大脑半球侧重于抽象思维，主司语言、逻辑、数学、分析、判断和其他科学活动；右侧大脑半球侧重于形象思维，主司空间关系、艺术和直觉活动。大脑半球的表层称为大脑皮层，平均厚度为 2.5—3 毫米，表面凹凸不平，形似核桃。凸出的部分叫做脑回，凹下的部分叫做脑沟，沟回相间形成脑褶。大脑皮层的颞叶和海马是与记忆有关的部位。

大脑是由神经元组成的巨系统。它对信息的传递、加工、存贮和提取，都是通过神经元进行的。神经元即神经细胞，是神经系统结构和功能的基本单位。它不仅具有一般细胞的特征[即具有细胞膜、细胞核，以及各种细胞器和酶，且细胞核内有一般细胞的遗

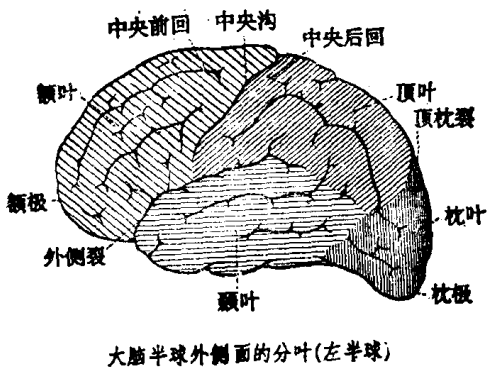
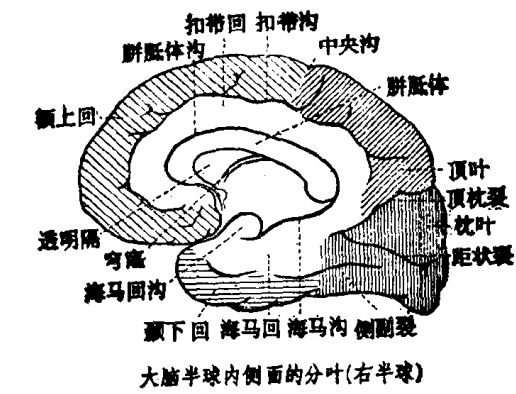


图 1

传信息],服从一般细胞的活动规律,而且具有高度的特异性,即:
 (1) 细胞核内有染色质;(2) 胞体伸出长短不等的胞浆突,即所谓树突和轴突;(3) 有产生神经冲动的外膜;(4) 具有突触这样一种将信息从一个神经元传到另一个神经元的特异结构。

神经元之间通过接触的方式相联接,中间有 0.2 微米的间隙,突触是其具有微细结构的接触点。在一般情况下,信号由树突与胞体输入,经胞体联络与整合再传给突触。突触接受信息后,即由前膜释放化学递质[即胞吐]而由后膜的受体[即接受递质的部分]处进入下一个神经元。这样,信息就由一个神经元传到另一个神经元。

神经元不论大小、形状如何，均使用两类电信号，即动作电位和局部电位。

当刺激强度达到某一阈值时，即产生动作电位，以恒定速度沿神经纤维传播。但对不同的神经元产生的动作电位的振幅和传播速度是不同的，因而同一神经元在不同的情况下表现出冲动数目上的差异。即是说，神经系统传播信息的方法是用脉冲频率编码的，而神经元在信息传递中所起的作用就相当于一个开关元件。

如果刺激强度低于某一阈值，便产生局部电位，影响局部区域膜电位的变化。局部电位既是神经元对刺激反应整合作用的基础，又是神经系统的整个功能的基础。当神经元接受由许多突触传来的冲动时，它就会发生变化。这些电位变化的总和就决定该神经元向下一个神经元发放冲动的情况。

神经元还通过化学传导的方法传递信息，化学递质发生在突触处。突触也有两种不同的生理作用，即使兴奋性提高和使兴奋性降低或阻止新的冲动产生。突触传递的生化过程，包括递质的合成、储存、释放，递质与受体的作用，以及递质作用的终止等一系列步骤。这个过程中的一个环节的变化都会影响传递，使突触传递信息的功能降低，从而使传递受到阻滞。

不仅信息的传递是通过突触的特殊功能实现的，而且信息的加工也是通过突触进行的。一个神经元约有 10^3 — 10^4 个突触，可以把许多来自不同神经元的信息汇聚起来，经过加工再发散出去，进行传导、调节和控制。信息每经过一个突触就接受一次加工、整合。这种过程的不断进行，就使信息的内容得以提高、丰富，信息量得以扩大。

信息的加工是在大脑皮层中的各级神经元上进行的。大脑皮层约有 140 多亿个神经元，组织得十分有序。它们按照一定的网络形式和通讯路线互相联系、协同工作，指挥协调全脑的活动。不仅感觉运动功能在大脑皮层上定位，而且脑的高级意识功能也在大脑皮层上定位。人的高级意识活动几乎占去大脑皮层总面积的四分之三。

大脑皮层的神经元是分六层排列的，各层的形态和功能各异。大体上，第一层至第四层主要接受传入冲动，即负责接收信息。第五层或第六层主要负责发出指令。

大脑皮层下面的髓质部分，由许多神经纤维构成。其中一部分起联系大脑两半球的作用，称之为“连合纤维”；另一部分起联系同侧大脑半球不同区域的作用，称之为“联络纤维”。还有一部分是进出于大脑的，起着传入和传出神经冲动的作用。

正是由于大脑具有如此复杂而精细的内部结构，因而使得它成为思维的物质基础。

§ 3 思维科学的兴起

思维作为一种心理活动，很早就成为心理学家的研究对象，然而，作为一门科学而加以深入研究，还是近几年的事。自从钱学森教授 1980 年在《哲学研究》杂志发表文章提出，思维科学的问题以来，到现在科研人员已基本上形成一支队伍。在他的倡导下，思维科学的研究在中华大地上崛起，并且放出夺目的光彩。

思维科学是一门研究人的有意识思维（即人自己能加以控制的思维）的特点、规律、历史发展和人工模拟的综合性学科。它是与自然科学、社会科学、数学科学、系统科学、人体科学并列的。其体系正如钱学森教授所指出的那样，由基础科学、技术科学和应用技术三个层次构成。其中，作为基础科学的思维学包括社会思维学、抽象[逻辑]思维学、形象[直感]思维学和灵感[顿悟]思维学。思维科学的技术科学和应用技术，其内容就更为广泛了。大体上，技术科学包括科学方法论、情报学、数理语言学、结构语言学、模式识别等学科；应用技术包括人工智能、计算机模拟技术、文字学、情报资料库技术、计算机软件工程、密码技术等学科。

在上述诸学科中，至关重要的当然要推思维学了。除了逻辑思维的规律已由逻辑学作了较系统的总结，因而抽象[逻辑]思维学比较成熟外，其他几种思维学的研究还很初步，尤其是形象[直

感]思维学。形象[直感]思维是一种具有普遍性的思维形式。许多问题,除了图象或模式的识别外,还有语言问题、人工智能问题、文艺理论和美学问题、人体特异功能问题、梦的问题等,都或多或少与形象[直感]思维有关系。而且,抽象[逻辑]思维还是在形象[直感]思维的基础上发展起来的。灵感[顿悟]思维也与形象[直感]思维不无关系,正如钱学森教授所说:“好象灵感是形象思维扩大到潜意识”。因此,钱学森教授认为,应将形象[直感]思维作为思维科学的突破口,认为“它一旦搞清楚之后,就把前科学的那一部分、别人很难学到的那些科学以前的知识,即精神财富,都可以挖掘出来,这将把我们的智力开发大大地向前推进一步”。

思维问题是一个“黑箱”问题。由于大脑极其复杂,我们无法通过直接的方法了解大脑的思维机理——至少现在是这样,因而只有借助于间接的方法。其中最常用的方法是:(1)通过在思维活动中大脑的变化来研究思维的本质和机制;(2)通过语言和思维成果的创造过程研究思维的历史发展;(3)通过内省的方法,即以自己的思维过程作为研究对象,研究思维过程;(4)通过计算机对思维的模拟,研究思维的模式,加深对思维过程和思维规律的了解。系统方法和综合方法也是经常用到的。

与思维科学类似,在国外有所谓“认知科学”。它是美国科学家西蒙和斯切斯特在1982年出版的《人的内部宇宙:一门探索人类思维的新科学》中提出的。它也是关于人类思维活动的科学,它旨在研究人的大脑如何构词造句、归纳整理,以及人们是怎样认识客观世界的。其研究方法是“交谈分析法”,即通过与被试谈话研究其思维过程,然后用电子计算机进行模拟。虽然它的研究范围不及思维科学广阔,但也足以说明思维科学是举世瞩目的,从而也足见开展思维科学的研究意义之重大。钱学森教授预言:“思维科学的研究将孕育一场新的科学革命。”同时预言,“思维科学的研究又会推动智能机的发展,把人的知识、智力提高到前所未有的高度,这肯定又将是一场技术革命。”

§ 4 思维数学建立的基础和条件

按照作者的构想，思维数学是一门用数学方法研究思维的品质与规律的科学，是思维科学与数学的交叉学科。

思维数学能否作为一门学科被建立起来？数学界可能会有不同的看法。不过，这并不重要。重要的是，有没有这样的必要，具备不具备赖以建立的基础和条件，能不能形成一个体系？

有没有建立思维数学这样一门学科的必要，最根本的问题在于，数量分析方法对于思维科学是否适用。思维虽然看不见、摸不着，但是，仔细分析却不难发现，思维形式隐含着空间形式，思维过程隐含着数量关系。而且，思维在“质”上的差异总是通过“量”上的差异表现出来。何况，如上节所述，思维科学涉及的学科是那样地多。因此，正如模糊数学家汪培庄教授所说：“思维科学的难度太大，不是不需要数学，而是数学工具不够的问题”。当然，由于为思维本身的特点所制约，我们不能象在物理学中所做的那样，通过仪器去测定某些量，而主要靠分析。其中至关重要的是，如何发现和揭示隐含在思维中的空间形式和数量关系。其次是要制定一个比较合理的评价准则。本书所论，就是在这方面的一个尝试。尽管还很粗糙，还难免会有不尽合理甚至不妥的地方，但至少可以说明，数量分析方法对于思维科学也是适用的。

马克思认为，一门科学只有在成功地运用了数学之后才算达到了完善的地步。思维科学也不例外。既然数量分析方法适用于思维科学，那么，建立思维数学这样一门交叉学科，其必要性便是无疑的了。

思维中隐含着空间形式和数量关系，是思维数学的依据，同时是思维数学的实践基础。思维科学、数学，以及哲学、脑科学、心理学、创造学、科学方法论等一些与之相关的学科的研究成果，则为思维数学提供了理论根据。虽然思维科学的研究刚刚开始，对于思维的机理还不甚了解，对大脑的定量研究[包括生理的和心理的]