高考会考数学试题精析大全

GaoKaoHuiKao ShuXue ShiTiJingXiDaQuan

陈振宣　赵大悌　主编

●点评
●解
●思路分析
●考查要求

几何卷

上海辞书出版社

高考会考数学试题精析大全

陈振宣　赵大悌　主编

几何卷

上海辞书出版社

责任编辑 唐尚斌
插　　图 朱恩源　朱旭东
封面设计 汪　溪

图书在版编目(CIP)数据

高考会考数学试题精析大全·几何卷/陈振宣等编. 上海：上海辞书出版社,2000

ISBN 7-5326-0675-9

I.高… II.陈… III.几何课-高中-试题-解题 IV.G634-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 25735 号

高考会考数学试题精析大全·几何卷

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路 457 号　邮政编码 200040)

上海辞书出版社发行所发行　上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 8.75　插页 1　字数 235000

2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—7000

ISBN 7-5326-0675-9/O·28

定价：13.60 元

前　言

我国自 1952 年起实施高校招生统一考试，已历经四十余年，除了十年动乱留下一片空白之外，先后积累了大量高考数学试题. 这些试题体现了国家的教学要求、选才标准和导向意志，大都经过千淘百滤，流沙澄金，其中不少是参加命题的专家、学者、教师的精心杰作，被公认为有意义的好题，久用而不衰，在中学数学教育中起过良好的导向作用. 四十多年积聚起来的好题妙题，可谓繁花似锦，精采纷呈，这是我国数学教育界的一笔极为珍贵的财富. 这批试题还折射出我国数学教育改革的历程，其中有许多值得记取的经验与教训. 特别是自 1985 年以来多次的命题改革试验，在教育测量的科学理论指导下，对试题精益求精，推陈出新，在国家高考和各地会考中，几乎每年都涌现若干新颖好题，传诵一时. 为了使这批典型试题在今后的数学教育中发挥更大的作用，我们精心编写了这本《高考会考数学试题精析大全》.

本书首先将高考、会考的精萃试题按现行教学大纲的知识体系分章梳理，选出其中最具典型性的试题作为范例，与其有类似要求的试题作为练习题，范例按"考查要求"、"思路分析"、"解"和"点评"四栏，精心剖析，详加阐述. 剖析和阐述均以我们对数学思维能力结构的下述理解为指导：

$$\boxed{\text{数学知识与数学语言}}\times\boxed{\text{数学思维方法}}\times\boxed{\text{情感智力}}$$
$$=\boxed{\text{数学思维能力}}$$

即着意抓好三个要素：(1)突出对数学知识与语言的理解和运用能力的培养，强化自然语言、符号语言、图象语言的互译和相互渗透的训练；(2)始终注意对数学思维方法的介绍与概括；(3)重视学习兴趣、意志、毅力等心理素质的启迪. 总之，以发展青年学子的思维能力为

本，力求有效提高数学素质.

对于范例的解答，在注意保留原解精采部分的基础上，我们给出了不少具有新意的妙解，并在点评中作了规律性的概括和自然的引申，培养读者在解题后进行回顾反思的习惯. 这不仅是提高解题能力所必需的，也是开发人脑潜能的有效手段. 数学解题能力空间是数学思维能力空间的真子集，我们期望通过解题训练达到开发脑功能的目的. 具有数学思维习惯的头脑是数学头脑，数学头脑是进人信息社会的通行证.

编写本书的直接目的是帮助读者跳出“题海”，获得自如应试的能力. 更深远的意图则是：希望读者通过阅读、思考和练习，开发自己的脑潜能，领悟思维方法，提高思维素质，为今后的学习、工作和生活打下扎实的基础，在即将到来的新世纪中，具有参加竞争和把握机会的较强能力，为国家民族作出更大的贡献.

虽已尽心竭力，但限于我们的水平，编写中仍会有不当和疏漏，热诚欢迎读者与专家指正. 在此成书之际，我们对历年参加命题的专家、学者、教师致以深切的谢意！

参加本书几何卷编写的有赵大悌、韩明武、朱传渝（第一、二章），陈振宣、闻炘威、范人伊、陈永箴、张莉萍（第三、四章），钱耀邦、胡锦标（第五章、附录）. 主编是陈振宣（研究员，上海）和赵大悌（特级教师，北京）.

编　者

2000 年 3 月

目　录

第一章　直线和平面

知识逻辑结构框图

平面的基本性质

公理 1：$\left.\begin{matrix}A、B\in l\\A、B\in\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\subset\alpha$

公理 2：$\left.\begin{matrix}A\in\alpha\\A\in\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overset{1}{\exists}\ l=\alpha\cap\beta,A\in l$

公理 3：$A、B、C$ 不共线$\Rightarrow\overset{1}{\exists}\ \alpha,A、B、C\in\alpha$

推论 1：$A\notin l\Rightarrow\overset{1}{\exists}\ \alpha,A\in\alpha,l\subset\alpha$

推论 2：$l_1\cap l_2=A\Rightarrow\overset{1}{\exists}\ \alpha,l_1、l_2\subset\alpha$

推论 3：$l_1/\!/l_2\Rightarrow\overset{1}{\exists}\ \alpha,l_1、l_2\subset\alpha$

（上面符号“$\overset{1}{\exists}$”表示“存在一个且只有一个”）

等角定理

$\left.\begin{matrix}AB/\!/A'B'\\AC/\!/A'C'\end{matrix}\right\}\Rightarrow\angle BAC=\angle B'A'C'$

（同向）

平行线传递公理

$\left.\begin{matrix}l_1/\!/l_2\\l_2/\!/l_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow l_1/\!/l_3$

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

平面与平面的位置关系

- 空间两直线的位置关系
  - 共面（在同一平面内的直线）
    - 相交（有一个唯一的交点）
    - 平行（无公共点）
  - 异面（不能在同一平面内的两直线）
    - 判定：$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha, b\cap\alpha=A \\ A\notin a \end{array}\right\}\Rightarrow a$、$b$ 异面
    - 夹角：a、b 异面，$b/\!/a'$，$a\cap a'=P$，则 a 与 a' 所成的不大于直角的角叫做异面直线 a 与 b 所成的角
    - 距离：a、b 异面，$a\perp l$，$b\perp l$，$a\cap l=A$，$b\cap l=B$，则 $|AB|$ 叫做异面直线 a、b 间的距离

- 直线与平面的位置关系
  - 直线在平面内 $l\subset\alpha$：l 上有两个点在平面 α 上 $\Rightarrow l\subset\alpha$（公理 1）
  - 直线与平面平行 $l/\!/\alpha$
    - 判定：$l\not\subset\alpha, l/\!/a, a\subset\alpha\Rightarrow l/\!/\alpha$
    - 性质：$l/\!/\alpha, l\subset\beta, \alpha\cap\beta=a\Rightarrow l/\!/a$
  - 直线与平面相交 $l\cap\alpha=A$
    - 直线 l 与平面 α 所成的角：$(l)_\alpha=n$，l 与 n 所夹的锐角或直角
    - 线面垂直 $l\perp\alpha$
      - 判定：
        1) $\left.\begin{array}{l} l\perp a, l\perp b \\ a\subset\alpha, b\subset\alpha \end{array}\right. a\cap b=A\Rightarrow l\perp\alpha$
        2) $l_1/\!/l_2, l_1\perp\alpha\Rightarrow l_2\perp\alpha$
      - 性质：$l_1\perp\alpha, l_2\perp\alpha\Rightarrow l_1/\!/l_2$
    - 三垂线定理 $(l)_\alpha=a, b\subset\alpha, a\perp b\Rightarrow l\perp b$
    - 逆定理 $(l)_\alpha=a, b\subset\alpha, l\perp b\Rightarrow a\perp b$

（上面符号“$(l)_\alpha=a$”表示“直线 l 在平面 α 上的射影为 a”）

两平面的位置关系

- **平行 $\alpha /\!/ \beta$**
  - **判定**
    1) $\left.\begin{array}{l} a、b\subset\alpha, a\cap b\neq\varnothing \\ a /\!/ \beta, b /\!/ \beta \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha /\!/ \beta$
    2) $l\perp\alpha, l\perp\beta \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$
    3) $\alpha /\!/ \gamma, \beta /\!/ \gamma \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$
  - **性质**
    1) $\left.\begin{array}{l} \alpha\cap\gamma=a, \beta\cap\gamma=b \\ \alpha /\!/ \beta \end{array}\right\}\Rightarrow a /\!/ b$
    2) $l\perp\alpha, \alpha /\!/ \beta \Rightarrow l\perp\beta$
- **相交（二面角的平面角）**

  $\left.\begin{array}{l} \alpha\cap\beta=l, a\subset\alpha, b\subset\beta \\ a\perp l, b\perp l \end{array}\right\}\Rightarrow a、b$ 的交角 φ

  - **垂直（$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时）**
    - **判定**
      1) $\left.\begin{array}{l} a\subset\beta \\ a\perp\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\perp\beta$
      2) $\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta \\ \beta /\!/ \gamma \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\perp\gamma$
    - **性质**
      1) $\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta, \alpha\cap\beta=l \\ a\subset\beta, a\perp l \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\alpha$
      2) $\left.\alpha\cap\beta=l, \begin{array}{l} \alpha\perp\gamma \\ \beta\perp\gamma \end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\gamma$
      3) $\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta, \alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma \\ \alpha\cap\beta=a, \alpha\cap\gamma=b \\ \beta\cap\gamma=c \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} a\perp b \\ a\perp c \\ b\perp c \end{array}$

学 习 指 导

1. 有关平面基本性质的公理和推论是立体几何的基础，是三维空间问题化归为二维空间问题的工具，如公理 1 是证明直线在平面内的依据；公理 2 是用直线的“直”刻划平面的“平”，它是判定平面相交且交线是直线的方法，也是证明若干点共线的重要依据；公理 3 及其推论是在空间确定平面的方法，是平面几何知识应用于立体几何的桥梁.

2. “平直关系”既指“平面与直线的关系”，又指“平行与垂直的关系”，一语双关. 它是本章的核心，如果规定“线线到线面到面面”为由低级到高级的话，那么，其规律是“由低级关系推出高级关系是判定问题；由高级关系推出低级关系是性质问题”.

值得注意的是，定义既有判定定理的作用，又有性质定理的作用，定义的概念与被定义的概念是互相等价的，互为充要条件.

3. 线线平行、垂直与线面平行、垂直；线面平行、垂直与面面平行、垂直都在一定条件下可以互相转化. 图形的转化，命题的转化，都是解决立体几何问题以至一切数学问题的重要思维方法，务必反复领会；真正掌握它的精髓，就能使思维能力跨上一个新台阶.

4. 本章的问题大量表现为求角和求距离. 几乎所有的角最终都化归为平面上两相交直线所成的角；几乎所有的距离都化归为平面上两点之间的距离，而实现化归的主要手段是平移.

在求角时，两类特例需要注意：(1)垂直两直线（包括异面垂直）和垂直两平面，所成的角为 $90°$；(2)平行两直线，直线与平面平行，直线在平面内等情况下，所成的角为 $0°$.

在求距离时，化归为两点间的距离，其中至少有一点是垂足，所以在有关图形中确定垂足的位置就成了解决距离问题的关键.

5. 画出符合题意的空间直观图常是解立体几何问题的前提，选择恰当角度，按斜二侧直观图的画法画出图形（实质上是自然语言与

图象语言间的转化）就成了解决问题的关键.数学知识都以数学语言为载体进行传输交流，提高数学思维能力，应在知识与语言的理解及运用上下功夫.对于数学符号语言要特别重视，本章知识逻辑结构框图充分发挥符号语言的功能，它是简缩思维、提高思维效率的根本.把本章有关概念、公理、定理用符号语言配以图象语言整理一遍，是掌握立体几何基本知识的有效途径之一，读者不妨一试.

例 1 如果把两条异面直线看成“一对”，那么图 1-1 六棱锥的棱所在的 12 条直线中，异面直线共有(　　).

(A) 12 对　　(B) 24 对　　(C) 36 对　　(D) 48 对

（全国 1991）

考查要求 异面直线的概念以及有序计数的思考方法.

思路分析 计数问题首先要找到切入口和有序计数的顺序.本题既可以从侧棱切入，也可以从底面的边切入，分别如解一、解二.

解一 先考察侧棱 VA，所有的侧棱与 VA 共点，故彼此不可能异面.在底面上，AB 和 AF 与 VA 共点，也不可能与 VA 异面；根据异面直线判定定理易知，只有底面上的另外 4 条边所在直线与 VA 异面.与一条侧棱有关的异面直线共 4 对，而与 VA 一样的侧棱有 6 条，所以，异面直线共有 $4\times6=24$ 对，应选(B).

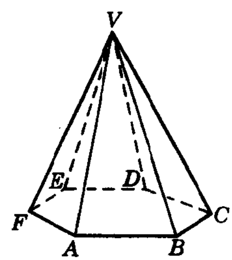

图 1-1

解二 先考察底面的边 AB 所在直线，底面上其余各边都与 AB 共面，根据异面直线判定定理易知只有 VC、VD、VE、VF 4 条侧棱和 AB 异面；而与 AB 一样的底上的边有 6 条，所以，异面直线共有 $4\times6=24$(对)，应选(B).

点　评 1. 运算，实际上是“机械化”的逻辑推理. +、-、×、÷是最基本的运算方法，又是重要的思维和推理方式.本例用的是乘法模式.这种推理模式，首先要求从分析典型入手，第二要求是

发现对等(数学中常用"同理"表示).上面的解题过程中,"先考察"的部分就是分析典型;"与……一样"的部分,就是发现对等.

2. 本题可以发展为:由六棱锥的顶点 V、A、B、C、D、E、F 中任意两点所确定的直线中,彼此异面的有多少对?其解法,仍可用乘法模式:先考察 VA,与它异面的直线在底面有 C_5^2 条(除 A 点,其余 5 个点任取两点的连线共有 C_5^2 条).同理,每一条侧棱都与底面上 C_5^2 条直线异面,故共有异面直线 $6C_5^2=60$(对).

当然,本题还可以发展到棱台的情况.读者可以进一步思考.

例 2 在下列命题中,真命题是(　　).

(A) 若直线 m、n 都平行于平面 α,则 $m/\!/n$

(B) 设 $\alpha-l-\beta$ 是直二面角,若直线 $m\perp l$,则 $m\perp\beta$

(C) 若直线 m、n 在平面 α 上的射影依次是一个点和一条直线,且 $m\perp n$,则 n 在 α 内或 n 与 α 平行

(D) 设 m、n 是异面直线,若 m 与平面 α 平行,则 n 与 α 相交

(上海 1996)

考查要求 有关直线与直线、直线与平面的位置关系,以及二面角、射影、异面直线等概念,同时考查空间想像能力和推理判断能力.

思路分析 解这类题的思路是"显—动—定"即(1)先在脑子里显现出符合题目要求的图形,通常先确定平面,再确定直线;(2)让图形中的元素(多为直线)在题目给定的限度内在各个方位运动起来;(3)在运动中发现不符合问题要求的反例,从而排除不合题目要求的命题,确定符合要求的选择支.

解 先画一平面 α,$m/\!/\alpha$,$n/\!/\alpha$,让直线 n 动起来,即可发现(A)的反例,从而排除(A);在头脑里想像两互相垂直的墙面作 $\alpha-l-\beta$ 直二面角的背景图,$m\perp l$,想像直线 m 垂直于二墙面的交线 l,当 m 在 α 内,有 $l\perp\beta$,而当 m 离开平面 α,立即出现 m 不垂直于平面 β 的反例,(B)也被排除;若先设定平面 α,直线 $m/\!/\alpha$,另作一平面 $\beta/\!/\alpha$,在平面 β 上凡不与 m 平行的直线 n 皆为 m 的异面直线,而 n 与 α 不

相交，故也可排除(D).

容易验证(C)是真命题，所以选(C).

点　评　这类从多方面考查线面位置关系的问题，在近十年高考的选择题中，出现率约为56%，所以应当引起重视. 解这类题要求：(1)立体几何概念清楚，空间想像力基本达到一定水平，否则无法在头脑里显现符合要求的背景图，问题当然难以解决；(2)运动意识要强，充分利用限制条件较弱、具有一定自由度的“任意”性元素在允许限度内全方位地运动，否则考虑不全面，难以找出反例，误将谬误作真理，而导致解题错误；(3)为了肯定一个真命题，只能依靠推理规则作出证明，但要否定一个命题，只要举出一个反例就可以了，因而，探索反例在数学中有举足轻重的地位. 搜索反例，应用排除法，是解这类选择题的关键.

练　习　一

1. 已知直线 $l\perp\alpha$，直线 $m\subset$ 平面 β，有下面四个命题：

① $\alpha/\!/\beta\Rightarrow l\perp m$；　　② $\alpha\perp\beta\Rightarrow l/\!/m$；

③ $l/\!/m\Rightarrow\alpha\perp\beta$；　　④ $l\perp m\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

其中正确的两个命题是(　　).

(A) ①与②　(B) ③与④　(C) ②与④　(D) ①与③

(全国1995)

2. 在下列命题中，假命题是(　　).

(A) 若 a、b 是异面直线，则一定存在平面 α 过 a 且与 b 平行

(B) 若 a、b 是异面直线，则一定存在平面 α 过 a 且与 b 垂直

(C) 若 a、b 是异面直线，则一定存在平面 α 与 a、b 所成的角相等

(D) 若 a、b 是异面直线，则一定存在平面 α 与 a、b 的距离相等

(上海1997)

3. 设 a、b 是两条异面直线，在下列命题中，正确的是(　　).

(A) 有且仅有一条直线与 a、b 都垂直

(B) 有一个平面与 a、b 都垂直

(C) 过直线 a 有且仅有一个平面与 b 平行

(D) 过空间中任一点必可作一条直线与 a、b 都相交

(上海 1993)

4. 设 a、b 是两条异面直线，那么下列四个命题中的假命题是(　　).

(A) 经过直线 a 有且只有一个平面平行直线 b

(B) 经过直线 a 有且只有一个平面垂直于直线 b

(C) 存在分别过直线 a 和 b 的两个互相平行的平面

(D) 存在分别过经过直线 a 和 b 的两个互相垂直的平面

(上海 1990)

5. 已知 a、b 是异面直线，直线 c 平行于直线 a，那么 c 与 b(　　).

(A) 一定是异面直线　　(B) 一定是相交直线

(C) 不可能是平行直线　　(D) 不可能是相交直线

(上海 1994)

例 3　如图 1-2，A_1、B_1、C_1-ABC 是直棱柱，$\angle BCA=90°$，点 D_1、F_1 分别是 A_1B_1、A_1C_1 的中点，若 $BC=CA=CC_1$，则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

(全国 1995)

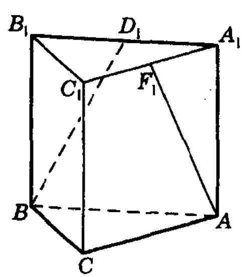

图 1-2

考查要求　异面直线所成角的概念，以及运用平移法求异面直线所成角的大小.

思路分析　欲求异面直线所成角的大小，关键在于将异面直线中的一条作平行移

动，使之与另一条相交，再利用余弦定理即可求出所成角的余弦值.

解一 取棱 BC 的中点 E，连结 EF_1 如图 1－3，连结 D_1F_1，则 $D_1F_1 /\!/ B_1C_1$；

而 $B_1C_1 /\!/ BC$，$\therefore$ $D_1F_1 /\!/ BC$.

又 $D_1F_1=\frac{1}{2}B_1C_1, BE=\frac{1}{2}BC,$

$B_1C_1=BC,$

$\therefore$ $D_1F_1 \underline{\underline{/\!/}} BE$，故 BEF_1D_1 是平行四边形，$BD_1 \underline{\underline{/\!/}} EF_1$.

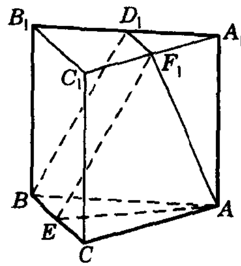

图 1－3

连结 AE，在 $\triangle AEF_1$ 中，$\angle AF_1E=\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，即为异面直线 BD_1 与 AF_1 所成的角.

已知 $BC=CA=CC_1$，设 $BC=a$，则 $CA=a$，$\angle BCA=90°$，$CE=\frac{a}{2}$，

$$\therefore\quad AE=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\,a. \text{ 同理，有 } AF_1=\frac{1}{2}\sqrt{5}\,a.$$

又 $A_1B_1=\sqrt{2}\,a$，$B_1D_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\angle BB_1A_1=90°$，

$$\therefore\quad BD_1=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a,\text{ 故 } EF_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{AF_1^2+EF_1^2-AE^2}{2AF_1\cdot EF_1}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

应选(A).

解二 延长 B_1A_1 到 H，使 $D_1H=B_1A_1$，连结 AH，如图 1－4，则由 $D_1H \underline{\underline{/\!/}} BA$，可知 $BD_1 \underline{\underline{/\!/}} AH$，$\angle F_1AH=\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，即为异面直线 BD_1 与 AF_1 所成的角.

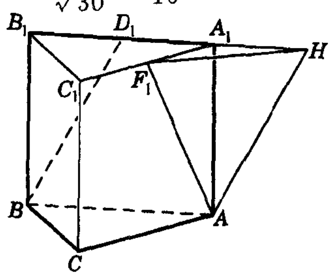

图 1－4

$$\because \quad BC=CA, \angle BCA=90°,$$

$$\therefore \quad \angle B_1A_1C_1=45°, \angle C_1A_1H=135°,$$

$$F_1H^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\cos 135°,$$

$$\therefore \quad F_1H=\frac{\sqrt{5}}{2}a. \text{ 又 } AH=BD_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a, AF_1=\frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{AF_1^2+AH^2-F_1H^2}{2\cdot AF_1\cdot AH}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

应选(A).

点　评　求异面直线所成角通常是作适当的平移，而平移又总是利用三角形中位线定理和平行四边形的性质．解一与解二或将 BD_1 平移于形内或将 BD_1 平移于形外，使 BD_1 与 AF_1 相交(即在同一平面内)，达到降维的目的．这是立体几何中应用广泛的化归思想．学习立体几何，若不学会把三维空间问题通过平移化归为二维空间问题(即平面问题)，那就寸步难行了．

例 4　在棱长都相等的四面体 $A-BCD$ 中，E、F 分别为棱 AD、BC 的中点，连接 AF、CE 如图 1－5 所示．

(1) 求异面直线 AF、CE 所成的角；

(2) 求 CE 与底面 BCD 所成角的大小．　　(上海 1988)

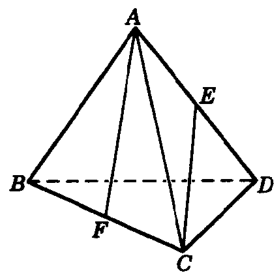

图　1－5

考查要求　异面直线所成的角和直线与平面所成的角的概念，以及推理论证、计算的能力．

思路分析　由于 $\angle ADB=\angle ADC=60°$，所以 AD 在底面 BCD 上的射影必落在 DF 上．为了将 AF 平移，可利用 $\triangle ADF$ 的中位线．又点 E 在底面 BCD 上的射影也在 DF 上，设其为 H，则 CE 在底面 BCD 上的射影为 CH，从此推知 CE 与底面 BCD 所成的角为 $\angle ECH$，如图 1－6．