經典場論

Д.伊凡宁柯
A.索科洛夫 著

科学出版社

經典場論

(新的問題)

Д. 伊凡年柯
А. 索科洛夫 著
黃祖洽 譯

科學出版社
1958

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ
КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ
(НОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ)
ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ГОСТЕХИЗДАТ, 1951

內容介紹

本書譯自蘇聯著名理論物理學家伊凡寧柯 (Иваненко) 及索科洛夫 (Соколов) 所著 "Классическая теория поля" 的第二版 (1951 年). 原書第一版曾榮獲 1950 年斯大林獎金.

本書是論述經典場論(即非量子場論)的, 但書中却利用了量子力學中所發展的數學方法, 特別是指出了如何利用 δ-函數去求得格林函數及如何用這些方法去求出經典電動力學中許多問題之解, 其中有些問題具有很大的實際意義.

書中詳述了許多截至目前爲止僅見於期刊文獻中的最新結果, 其中相當大的一部分是蘇聯學者的創造性研究. 例如, 說明了: 切廉可夫(Черенков) "超光速" 電子的理論問題、非綫性電動力學問題, 靜質量問題, λ-過程及雙場的理論及發光電子的理論. 在最後一章中探討了有關經典介子動力學及引力的問題, 而附錄則介紹了真空理論的最新發展.

本書可以作爲科學研究工作者及高等學校物理專業高級課程的參考書.

經典場論

Д. 伊凡寧柯 А. 索科洛夫著
黃祖洽譯

*

科學出版社出版 (北京朝陽門大街 117 號)
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958 年 7 月第一版 書號: 1211
1958 年 7 月第一次印刷 字數: 314,000
(滬) 精: 1—571 開本: 850×1168 1/32
平: 1—1,142 印張: 12 3/4 插頁: 2

定價: (10) 精裝本 2.90 元
平裝本 2.40 元

原書第二版序言

本書全貌在第二版中未作重大改變．除對已發現的誤印之處加以修正外，有些章節已加以精確化，並補充了最新文獻的引證．不過，基本粒子和場的物理學（我們的書在相當大的程度上是基本粒子理論及場論的入門）正在不斷地迅速發展，這就迫使我們在下列幾點作了更重大的補充．

首先，在"發光"電子的理論中補充了軌道壓縮的研究． 其次我們認爲，由於近年來所完成的一系列工作（在頗大程度上是由蘇聯物理學家完成的），不能不修改關於宇宙射綫及各種介子起源和本性的材料．應當特別着重指出，中性介子的發現（1950 年）第一次給經典介子動力學（它的敍述佔我們書的中心地位之一）打下了現實的基礎．以前引進的、假想的中性介子場，現在至少在定性方面已可獲得實驗的證明．

在核力理論中作了和贋標力理論中消去偶極困難的新方案有關的補充．此外還特別注意了不久以前關於高速核子散射的實驗，這些實驗使我們能作出和核力特性有關的重要結論．

我們還增加了一節附錄，目的是爲了介紹最新的、在量子眞空理論基礎上對原子中電子能級移動的解釋以及對電子補充磁矩來源的解釋．量子眞空理論在一定程度上也闡明了關於靜止質量本性的問題．還要指出，我們從前在 §34 加以探討的補償性雙場現在正被用來消去量子的散度．這個例子再一次證明用經典理論對靜止質量問題的初步研究有相當大的啓發力．

最後，作者十分高興地認爲應當感謝所有對第一版提供過意見的同志們．作者也很感激本書編者 B. A. Лешковцев 對本書

第二版的關心及在編索引時的協助。

莫斯科大學物理系
1950年11月

Д. 伊凡寧柯
А. 索科洛夫

原書第一版序言

一本經典地（即非量子地）論述各種場及基本粒子的書的出現，無疑需要有所說明. 爲電磁場及引力場理論而作的大量專著及教程的存在似乎使經典理論的新論述成爲多餘. 此外，研究包含有基本粒子（特別是介子）的過程通常幾乎用不着說，是一定需要量子理論的.

提供讀者注意的這本書决不打算代替通常的電動力學教程.

我們的任務之一在於利用量子理論的某些數學方法來研究經典現象.

因爲這個緣故，我們對 δ-函數理論有系統地加以敍述（第一章）. 利用 δ-函數理論可以描述各種和電荷（點電荷、表面電荷等等）相關聯的特殊點，也可以給格林函數以新的解釋. 在第二及第三章中發展了使我們能在解許多數學物理及電動力學問題時利用 δ-函數的數學工具. 例如，所謂輻射原理，用 δ-函數理論表述起來就特別簡單.

在這三章中我們特別表明了新方法可以如何地用來解决很多老問題. 在這裏，我們讓讀者掌握的只是工具；所有新形式的更嚴格的論證都提請數學家們去注意.

場及基本粒子的經典理論近年來經歷着大家都知道的復興. 近來發現的許多現象："超光速"電子、"發光"電子、以及其他和帶電粒子被加速相關的效應，基本上都可以用非量子的相對論性理論來描述. 與此同時，對從經典的觀點來分析那還遠沒有得到解决的靜止質量問題實質的更深刻理解，也有所幫助，至少可以在進一步發展基本粒子理論時起些啓發作用. 我們用本書第四章來論

述所有這些問題. 這樣,在這章中讀者可以找到只散見於片斷雜誌論文中的許多問題的系統論述.

最後，本書最末的第五章主要討論由於經典介子場論的發展而出現的問題. 雖然能够直接應用上經典論述的中性介子還沒有完全確實被發現，但經典介子動力學的很多結果和方法在嚴格的量子理論（論述中性介子的也好，帶電介子的也好）中仍然有用. 在這裏我們主要注意有關核力的問題，它是全部現代基本粒子物理的中心問題之一. 就其本身來說,粒子們通過場時相互作用的效應具有經典的本性,因此,無怪乎從經典的論述就已經基本上能够得出很多核力的介子理論的結果. 介子在核子(質子和中子)上散射而考慮到阻尼的問題,在本章中也加以探討;這問題不僅在有關宇宙射綫通過物質的理論中重要，而且對於和靜止質量本性相關的普遍問題也是重要的. 對引力場的問題只稍微提到一下,主要因爲關於引力(聯系到它在基本粒子理論中作用的說明的)的研究還在摸索的階段.

在所有這些問題中，相當大的部分最先都曾由蘇聯學者們加以探討.

雖然我們的論述是討論經典場論的，但在重要的地方我們都將指出量子推廣時所得的進一步結果.

這樣，我們的書一方面可以作爲對電動力學和場論方面一些有名教程的補充，另一方面它也是當進一步研究時需依靠量子力學的現代基本粒子理論的小引.

莫斯科大學物理系　　Д. 伊凡寧柯
1948 年 9 月　　A. 索科洛夫

目　　錄

第　一　章

δ-函數的普遍理論

§ 1.　δ-函數的定義

在現代經典物理及量子物理中，除連續分佈着的密度外，常常也研究點質量、點電荷、點偶極子，如此等等的點量.

如果對於點量，也想保持物理上和數學上的質量密度或電荷密度這類很方便的概念，那末就必須利用 1926 年狄喇克 (Dirac) 引進的所謂 δ-函數. 例如，對於電荷 e 沿 x-軸的直綫分佈，密度就等於：

$$\rho = \frac{de}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

由此可見，在點電荷（譬如說，放在坐標原點處的）的情形下，密度 ρ 除掉在 $x = 0$ 一點外，到處都等於零，而在 $x = 0$，却變成無限大.

讓我們引進函數 $\delta(x' - x)$，它除一特殊點 $x' = x$ 外，在所有點都等於零，在 $x' = x$ 這一點却變成無限大，而且這樣子，使得這函數對全部間隔的積分，仍然有限，並等於 1：

$$\int \delta(x' - x)\, dx' = 1^{*)}. \tag{1.2}$$

於是 δ-函數和點源的電荷密度 ρ 將由下列的簡單關係式相聯系：

$$\rho(x) = e\delta(x). \tag{1.3}$$

---

*) 這裏及以後、凡是沒有標出上下限的積分，都積過自 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的間隔.

考慮到 δ-函數除一特殊點外在所有點都等於零，我們可以把等式(1.2)改寫成(對於間隔 $a<b$)：

$$\int_a^b \delta(x'-x)\,dx' = \begin{cases} 1, & b>x>a; \\ 0, & x>b \text{ 或 } x<a. \end{cases} \tag{1.4}$$

恰恰同樣，對於所考慮區域中的連續函數 $f(x)$，容易得出關係*)：

$$\int_a^b f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' = \begin{cases} f(x), & b>x>a; \\ 0, & x>b \text{ 或 } x<a. \end{cases} \tag{1.5}$$

實際上，應用平均值定理，在 $b>x>a$ 時有：

$$\int_a^b f(x')\delta(x'-x)dx' = f(x+\alpha\varepsilon)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x'-x)dx', \tag{1.6}$$

$$|\alpha|\leqslant 1, \ \varepsilon>0.$$

從這裏，如果我們注意(1.4)並讓 ε 趨向零，便直接得出等式(1.5)。

像這樣定義的 δ-函數超出了經典解析學所研究的數量範圍。恰恰同樣，上述積分不能按照通常積分定義的意義來了解。

雖然如此，還是可以把包含 δ-函數的積分或者和司迪耳迭司(Stieltjes)積分聯系起來或者看成某種由通常積分作極限過渡的結果。

§ 2. δ-函數和司迪耳迭司(Stieltjes)積分

司迪耳迭司積分**)定義爲下列總和的極限：

$$I = \int_a^b f(x)d\Phi(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\Delta\Phi\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right). \tag{2.1}$$

---

*) 極端情形 $x=a$ 或 $x=b$ 需要另外研究，它們和 δ-函數的具體構成有關。詳見 §4，(4.15)式。

**) 關於司迪耳迭司積分，參看 В. И. Смирнов: Курс высшей математики, 卷 IV, Гостехиздат, 1948.

這式子可以顯明地看成係 $f(x)$ 類型的廣義矩，它被函數 $\Phi(x)$ 所標誌的某些量（例如，質量、電荷等等）的分佈所約制．當 $f(x)=$ $=x$ 時，我們有一次矩；當 $f(x)=x^2$、x^3、如此等等時，則有二次矩及高次矩．

如果 $\Phi(x)$ 具有可積分的導數：

$$d\Phi(x)=\Phi'(x)dx, \tag{2.2}$$

那末司迪耳迭司積分就會變成通常的積分：

$$I=\int_a^b f(x)\Phi'(x)dx. \tag{2.3}$$

可是，在那些分佈函數 $\Phi(x)$ 不是連續的情形下，司迪耳迭司積分也具有意義，而且一般說來，可以在關於函數 $\Phi(x)$ 不連續的特性的極普遍的假設下來定義它．

例如，取一個不連續函數的情形：

$$\Phi(x)=\gamma(x)=\begin{cases}+\frac{1}{2}, & x>0;\\ -\frac{1}{2}, & x<0.\end{cases} \tag{2.4}$$

在這情形下，函數 $\gamma(x)$ 除 $x=0$ 一點外，在所有點其增量都等於零 $[\Delta\gamma(x)=0]$，而在 $x=0$ 這點其增量變成 1：$\Delta\gamma(0)=1$．

把(2.4)代入(2.1)，我們便得：

$$\int_a^b f(x)\,d\gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta\gamma(x_k), \tag{2.5}$$

式中 $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$，而且，除此之外，還假設着不連續點 $x=0$ 係在間隔 a,b 之內，即 $a<0<b$．

在(2.5)式中向極限過渡，我們便得：

$$\int_a^b f(x)d\gamma(x)=f(0);\quad a<0<b. \tag{2.6}$$

把(2.6)和公式(1.5)相比較，並假設後者中的特殊點 x' 係在

坐標原點處($x'=0$)，我們發現，作爲積分號內一個因數的 δ-函數,可以定義爲一不連續函數的導數:

$$\delta(x)=\frac{\partial\gamma(x)}{\partial x}=\gamma'(x). \tag{2.7}$$

顯然，這樣的定義完全和 δ-函數的顯明意義——除不連續點外到處都等於零——相符.

這樣，如果想保持大家都知道的、嚴格推演出來的數學理論，那末或可以根本不引進 δ-函數，而利用司迪耳迭司積分. 可是，在大多數情形下,這樣作會是非常繁笨的,會約略相當於有系統地應用極限理論和無限總和理論以替代微分和積分的計算. 此外，δ-函數的形式又容許簡單的推廣到多維空間，使我們能仍舊憑藉更習慣的經典解析方法，並給物理學中遇到的多極型的複雜不連續,提供方便的描述.

§ 3. 作爲連續函數極限情形的 δ-函數

應用已知連續函數由於某一參數趨向一定極限而起的極限過渡,可以建立 δ-函數的全部理論.

例如,取輔助函數 $\gamma(x,\alpha)$,它在 $\alpha>0$ 時隨 x 連續變化,在極限處具有下列值:

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x>0;\\[2ex] -\dfrac{1}{2}, & x<0.\end{cases} \tag{3.1}$$

特別是,這一要求爲下列函數所滿足:

$$\gamma(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k}\frac{\sin kx}{k}\,dk=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}; \tag{3.2}$$

在本情形下,$\gamma(x,\alpha)$對 x 的導數(我們用 $\delta(x,\alpha)$ 來表示它)等於:

$$\delta(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k}\cos kx\,dk=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}. \tag{3.3}$$

不難證明，當 α 趨向零時，極限是：

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\begin{cases}0, & x\neq 0;\\ \infty, & x=0;\end{cases} \tag{3.4}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\delta(x,\alpha)dx=1.$$

如果把(3.4)和我們的 δ-函數的定義相比較(參看 § 1)，我們就可把 δ-函數看成是輔助函數 $\delta(x,\alpha)$在 $\alpha\to 0$ 時的極限值，即：

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha). \tag{3.5}$$

可是，如果我們希望按照通常的理解來取積分，那末 $\alpha\to 0$ 的極限過渡就應該在積分算出之後進行。換句話說，無限小的參數 α 應具有較無限小的增量 Δx 爲低的無限小數量級；就是說，當

$$\Delta x\to 0,\quad \alpha\to 0,$$

並且

$$\frac{\Delta x}{\alpha}\to 0$$

時，具有 δ-函數的積分式表示總和極限的計算.

像這樣的積分屬於異常 (несобственный) 積分一類.

依此類推，在上述意義下，等式(1.5)應當解釋爲：

$$\int_a^b f(x')\delta(x'-x)\,dx'=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b f(x')\delta(x'-x,\alpha)dx'=f(x),\quad a<x<b. \tag{3.6}$$

如果把從等式(3.3)得到的 $\delta(x,\alpha)$的具體值代入上式，上式的正確性便不難驗證. 這時我們得到在傅里葉 (Fourier) 積分理論中熟知的關係：

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b f(x')\delta(x'-x,\alpha)\,dx'=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\int_a^b f(x')\cos k\,(x'-x)dx'=f(x), \tag{3.7}$$

和(3.6)的結果相符合.

輔助函數 $\delta(x,\alpha)$ 的導數係由下列關係決定:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x,\alpha)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty k e^{-\alpha k}\sin kx\,dk=-\frac{2\alpha x}{\pi(\alpha^2+x^2)^2}. \qquad (3.8)$$

包含 $\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x}$ 並以之作爲積分號內一個因子的積分,應該被了解爲如下式的極限:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b f(x')\,\frac{\partial\delta(x'-x,\alpha)}{\partial x'}\,dx' =$$

$$=\int_a^b f(x')\,\frac{\partial\delta(x'-x)}{\partial x'}\,dx'. \qquad (3.9)$$

用分部積分法算出上面的積分,同時注意函數 $\delta(x)$ 在積分區域界上爲零,我們便得:

$$\int_a^b f(x')\,\frac{\partial\delta(x'-x)}{\partial x'}\,dx' = -\frac{\partial f(x)}{\partial x},\quad a<x<b. \qquad (3.10)$$

同樣,我們可以把積分概念推廣到積分號內有 δ-函數的高級導數的情形.

在這情形下,

$$\int_a^b f(x')\delta^{(n)}(x'-x)\,dx' = (-1)^n f^{(n)}(x),\quad a<x<b. \qquad (3.11)$$

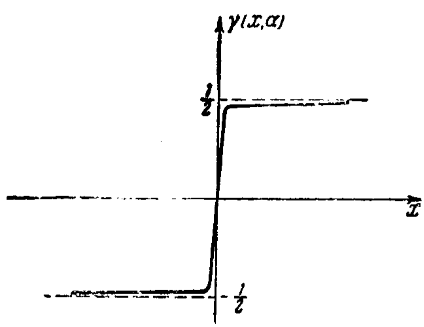

圖 1

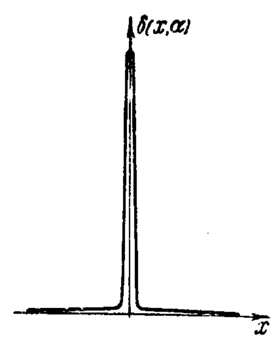

圖 2