近代线性控制理论基础

吴志清 编

重庆大学出版社

近代线性控制理论基础

吴志清　编

重庆大学出版社

近代线性控制理论基础

吴志清　编

责任编辑　王孝祥

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

科学技术文献出版社重庆分社印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：15.5　字数：387千

1988年2月第1版　　1988年2月第1次印刷

印数：1-5000

标准书号：ISBN 7-5624-0069-5 / TP·4

统一书号：15408·37

定　　价：2.30元

内 容 简 介

本书系统地介绍线性多变量控制系统的基本理论和基本方法，其中，除状态空间法外，还用一定篇幅讨论了近代频域法。全书共五章，第一章介绍动力学系统的数学描述，主要介绍状态空间描述和多项式矩阵分式描述。第二章介绍状态空间方程的求解。第三章及第四章分别从时域和频域的观点，详细分析了动力学系统的基本特性。第五章结合一些典型工程控制问题，介绍控制系统的近代综合技术，并由此建立了一些重要而普遍的基本控制原理，最后，对其它近代频域设计技术也作了简单介绍。

本书可作为工自专业的"现代控制理论基础"课教材，也可作为广大自动化工程技术人员学习近代控制理论和技术的自学参考书。

前 言

本书的主要内容是关于线性多变量系统的近代基本理论及基本方法，既包括状态空间法又包括表为多项式矩阵分式的传递函数法，但是对最优控制和最优滤波等问题不作专门讨论，因为它们往往在另设的选修课中予以讲述。

本书在编写过程中，主要从以下两方面作出努力：

①、着力反映新的理论和方法

目前国内有关“现代控制理论基础”（主要内容也是线性多变量控制理论）的教材，基本上是按照“线性二次型高斯最优控制和估计”（简称LQG最优问题）这一体系安排的，而且都是以状态空间法为其唯一的理论工具。1971年美国电机及电子工程师学会（简称IEEE）会刊曾就LQG最优问题出了专辑[1]，表明这个领域已达到了相当成熟的程度。但是，由于状态空间法应用于工业控制方面遇到了困难，为了解决这个问题，自1970年以来，不少学者对此作了大量有益的探索，促使线性多变量控制理论同时沿着几个不同途径蓬勃发展，其中特别是近代频域法，到目前为止，已占据了相当重要的地位[2,3]，在IEEE会刊1981年为线性多变量控制系统出的专辑中就充分显示了这一点[4]。针对上述情况，编写本书的主要目的之一是，把线性控制理论的这一新情况反映到教材中来，使教材内容得以充实和提高，并有助于读者开阔眼界，活跃思路，诱发学习情趣，为阅读专业文献打下必要的基础。为此，我们在以状态空间法为主的基础上，适当介绍了近代频域法的基本理论和方法，后者对工程控制专业的读者尤为重要。

鉴于近代线性控制理论的内容极其丰富与广泛，而且，目前在国外出现的许多教材中，虽然也在同一本书中同时介绍几种主要理论与方法[6,6,7,8]，但是，它们多数是为研究生或专门训练班编写的。因此，要在一个学时很有限的普通教本中，同时介绍状态空间法与近代频域法，其困难程度不言而喻，本书只是一种大胆的尝试。

②、减少数学推导，突出工程控制问题，更多地注重理论的工程意义。

近代控制理论涉及到近代数学的许多分支，因而现有的许多教材往往过份强调数学证明和抽象定义，而忽略了理论的工程意义及应用，使读者感到空洞无物，抽象难懂。为了改变这种情况，本书将不追求数学证明的完整性和严密性，并尽量不涉及高深的数学概念，而是着重于逻辑推理和明确的物理概念，并通过一些常见的工程控制问题来阐明理论的应用。基于上述同一理由，本书将不涉及由旺纳姆(Wonham)等人发展的另一新的理论体系，即所谓几何空间法。想了解这方面内容的读者，请参阅文献〔9〕。

尽管我们设法摒弃一些烦难的数学问题，但是，适当的数学基础仍然是必不可少的。为了便于读者查阅，在书后附录Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ中扼要地引录了有关线性代数、多项式矩阵理论及二次型等基本知识。读者只要掌握这部份知识，就能顺利阅读本书内容。

在一个学时很有限的基础性课程中，只可能涉及近代控制理论中极基本的一部分，目的是为读者今后更深入的学习打下必要的基础。而且最近的大量文献表明，这一领域的许多有意义的研究尚远未停止，因此本书的内容绝非一成不变，而是必须在今后的使用中不断更新和充实。

本课程计划教学时间为50学时，可以讲授本书内容的80%左右，注有“*”号的章节可以

ABG45/18.06

只作概要介绍，留给有兴趣的读者自学。

本书经重庆大学曹长修教授仔细审阅，并提供许多宝贵意见；在修订过程中，还得到王孝祥付教授的悉心指导和帮助，作者在此对他们表示衷心的谢意，

由于作者水平有限，时间仓卒，谬误在所难免，敬希读者批评指正。

目 录

前言

绪论…………(1)

0—1 控制理论发展简史…………(1)

0—2 现代控制理论的主要内容…………(3)

0—3 本书主要内容…………(4)

第一章 状态空间描述及其它描述…………(6)

1—1 状态变量与状态空间描述…………(6)

1—2 由物理系统直接建立状态空间描述…………(13)

1—3 由传递函数建立状态空间描述…………(17)

1—4 离散系统的状态空间描述…………(26)

1—5 状态空间描述的非奇异变换…………(27)

1—6 多变量系统的其它描述…………(36)

*1-7 多变量系统的实现…………(44)

*1-8 组合系统的数学描述…………(51)

第一章习题…………(56)

第二章 状态空间方程的求解…………(60)

2—1 线性系统的自由运动、状态转移矩阵…………(60)

2—2 线性时不变系统的状态转移矩阵…………(62)

2—3 状态转移矩阵的基本性质…………(66)

2—4 状态转移矩阵的计算…………(67)

2—5 线性时不变系统的强迫运动…………(73)

2—6 连续系统状态空间描述的离散化…………(77)

2—7 线性时不变离散系统的运动…………(79)

第二章习题…………(82)

第三章 线性时不变系统的能控性与能观性…………(85)

3—1 概述…………(85)

3—2 系统的能控性及其判据…………(86)

3—3 系统的能观性及其判据…………(92)

3—4 基于对角型或约当型的能控性、能观性判据…………(95)

3—5 离散系统的能控性与能观性…………(97)

3—6 能控性与能观性的对偶关系…………(98)

3—7 系统的标准分解…………(99)

3—8 最小实现…………(106)

3—9 能控性与能观性的频域判据…………(109)

*3-10 组合系统的能控性、能观性…………(111)

第三章习题…………(114)

第四章 线性时不变系统的稳定性分析……(119)
4—1 概述……(119)
4—2 BIBO稳定性问题……(120)
4—3 动力学方程的稳定性问题……(121)
4—4 李雅普诺夫稳定性定理……(125)
4—5 线性时不变连续系统的稳定性分析……(129)
4—6 线性时不变离散系统的稳定性分析……(131)
*4-7 组合系统的稳定性问题……(132)
第四章习题……(135)
第五章 线性时不变控制系统的综合与设计……(137)
5—1 概述……(137)
5—2 单变量系统极点配置的状态空间法……(139)
5—3 多变量系统极点配置的状态空间法……(150)
5—4 状态观测器……(158)
*5-5 渐近跟踪、干扰阻塞及鲁棒控制……(167)
5—6 补偿器综合的传递函数法——单变量系统……(180)
*5-7 补偿器综合的传递函数法——多变量系统……(187)
*5-8 其它常见控制问题概述……(196)
*5-9 其它近代频域设计技术概述……(200)
第五章习题……(203)
附录……(209)
*Ⅰ、关于线性代数的补充知识……(209)
Ⅱ、关于多项式矩阵理论的基本知识……(221)
*Ⅲ、二次型……(232)
附录习题……(234)
参考文献……(237)

绪 论

0—1 控制理论发展简史

控制理论的发展历史，主要是线性控制理论的发展历史，它基本上可分为两个阶段，即经典控制理论与近代控制理论。

一、经典控制理论（30年代～50年代）

概括地说，经典控制理论主要包括一个核心概念——传递函数，二个基本方法——频率响应法及根轨迹法。原则上它们只适合用来对单输入-单输出控制系统进行分析、综合与设计。

十七世纪瓦特（Watt）的飞锤控制器的应用，可以视为自动控制学科发展的起点。到了十九世纪后半叶，虽然自动控制技术已取得了许多重大的进展，例如到1870年，已经在闭环系统中应用完善的PID控制作用；与此同时，反馈原理也开始用于笨重机械——伺服机械的控制。但是在控制理论方面却进展迟缓，直到本世纪20年代，常微分方程及稳定性代数检验方法仍然是控制工程师的唯一分析工具。控制理论进一步发展的关键性转机来自另一个重要的技术领域——通讯工程。1932年乃奎斯特(Nyquist)的"再生理论"一文，开辟了频域法的新途径。经过十年左右的时间，控制理论的微分方程法几乎完全被频域法所取代。

1939年～1945年，战争对高性能伺服机构（如火炮系统）的迫切要求，促使反馈控制系统的设计与研制有了很大的进展。战后，武器系统中的经验向社会公开，导致迅速地把频域法推广应用于机械、航空、航海、化工等等的控制问题，并产生了统一的单变量反馈控制理论。随后，1948年伊凡思(Evans)的根轨迹法，又给予频域法以重要补充。因此，到了本世纪五十年代，古典频域法在自动控制领域中已占据了统治地位，完全改变了20年代那种时域法不可挑战的局面，从而构成了控制理论发展的第一阶段。

二、现代控制理论

促使经典控制理论向现代控制理论发展的主要因素有二个：

(1) 科学技术及生产的发展，特别是空间技术的发展（飞船和卫星的发射、导航、跟踪等），一方面使控制系统变得愈来愈复杂（如时变、非线性、特别是多变量系统），另一方面对控制系统的性能要求也愈来愈高。这就要求对控制系统作更深入更详尽的研究，经典频域法显然已不能适应这一需要了，因此急需发展一种新的理论和方法。

(2) 五十年代后期，数字计算机的迅猛发展，也为控制理论新的发展创造了必要的条件，它使得人们有可能对复杂控制系统作深入细致的研究。接着微型计算机的发展，并直接进入控制系统，又为实现各种"雄心勃勃"的控制方案提供了可能性。

因此可以说，现代控制理论的出现，是六十年代人类探索空间的需要及计算机飞速发展和普及的产物。

状态空间法的产生：

五十年代中、后期，空间技术开始发展，苏、美两国都竞相进行大量研究。这时遇到的控制系统大多是多变量系统，且被控设备的数学模型往往可以根据力学的原理，通过对其物

理机理的分析来获得，其表达式为一组高阶微分方程。

早在1844年，莫格诺(Moigno)就证明了n阶微分方程可以化为一阶微分方程组，1892年，坡恩克(Poincare)指出用一阶微分方程组描述动态系统的深刻意义。于是，到了六十年代前后，这种描述方法便成为当时空间技术控制工程师采用的标准方法，统称为状态空间法，并于1960年在美国自动控制联合会第一届年会上首次提出"现代控制理论"这个名称。因此，这时侯的现代控制理论与状态空间法几乎是同义的，并一直沿用至今。但是，近十几年来，由于线性控制理论的迅猛发展，除继续发展状态空间法外，还发展了一些新的理论和方法。因此，目前同时介绍线性系统的几种近代理论和方法的书籍不断涌现，为了与"现代控制理论"相区别，这类书籍通常采用"多变量线性控制理论"或"近代线性控制理论"等名称。

在状态空间法发展初期，具有重要意义的是庞特里亚金(Понтрягин)的极大值原理、贝尔曼(Bellman)的动态规划理论和卡尔曼(Kalman)的最优滤波理论，有人把它们作为现代控制理论的起点。

状态空间法的出现，导致了对控制理论中的许多问题作更深入更广泛的研究，它标志着自动控制学科达到了一个新的顶点，并以一个成熟的科学体系面貌出现。在这期间，一个最具代表性的问题是LQG最优问题，如前所述，美IEEE会刊1971年曾为LQG最优问题出了专辑，表明这一问题已达到了相当成熟的地步，而与此同时，频域法的研究却走向下坡。

频域法的复苏——近代频域法的产生：

LQG这一套理论用来解决空间技术控制系统的问题，实践证明是非常成功的，并对空间技术作出了卓越的贡献。但是，当人们把它推广用来解决工业控制的问题时，却遇到了不少困难，主要困难有：

(1) 对于工业设备，不易获得比较精确的数学模型；

(2) 难于承受工业生产中各种不利因素的影响；

(3) 对控制系统的性能要求不易形成最优控制的性能指标；

(4) 控制系统往往过于复杂，反馈回路基本上相当于整个被控设备的模型。

此外，这种方法也不易被熟悉频域法的控制工程师所接受。

因此，一方面状态空间法在继续发展着，另一方面，从六十年代末期开始，人们又重新对频域法发生兴趣。适用于单变量系统的经典控制理论，在长期的工业控制实践中，证明了它是相当有效而简单的。人们自然会想到，能否把它发展成为适合于多变量控制系统的所谓近代频域法呢！答案是肯定的，在这方面首先进行系统性研究的是英国的罗森布劳克(Rosenbrok)。于是，状态空间法、近代频域法各自地，互相渗透地，同时沿着几个研究方向迅速展开。概括地说，除状态空间法外，目前主要尚有：

(1) 代数方法，它主要是在探索状态空间描述与频率响应描述之间的关系，以及把零、极点概念推广至多变量系统等的研究中发展起来的。卡尔曼和罗森布劳克的研究表明，对于多变量控制系统，代数理论是贴切而有效的，因而出现了许多有关代数方法的重要研究。

(2) 几何空间法，它展示了一个全新的研究前景。现在已可以看到，几何理论在把状态空间法和频域法紧密地联系起来将起关键作用。

(3) 复变量法，它是经典控制理论中乃奎斯特-伯德技术、根轨迹技术等向多变量系统的直接推广，它又与代数方法紧密相关。

因此，现代控制理论，尤其是线性控制理论，其内容是极其丰富的，它的发展又是极其迅速的。虽然，1981年美IEEE会刊又就线性控制理论出了专辑，但是它的发展还远未结束，

并已渗透到许多邻近的学科中。

最后还应指出，有人认为七十年代发展起来的大系统理论，有可能形成控制理论发展的第三个阶段，近几年来，这方面已有大量文献涌现，因此有待控制理论工作者去进一步探索。

0—2 现代控制理论的主要内容

如前所述，现代控制理论的内容极其丰富而广泛，并已渗透到其它邻近学科中。概括地说，它主要包括以下一些内容。

一、系统辨识

简而言之，所谓系统的辨识就是利用系统（设备）在试验或运行中测得的数据，构造出系统的数学模型，并估计其参数的理论和方法。

研究任何实际系统的控制问题，首先就涉及建立系统的数学模型问题。现代控制理论所面临的控制问题往往是比较复杂的，例如多变量系统，最优控制等问题。这就涉及获取比较复杂比较精确的数学模型的问题。显然，古典控制理论中所介绍的简单辨识技术，已很难直接引用，而必须研究新的辨识理论和方法。因此，系统的辨识一直是一个非常活跃的研究领域。

二、线性控制系统理论

有限维线性时不变系统是实际中最经常遇到的一类系统，因此多变量线性系统理论一直是20多年来研究的重心。其主要内容有系统的结构问题，如能控性、能观性、最小性等；以及关于反馈控制问题，如极点配置、解耦、鲁棒控制等问题。长期以来，线性控制理论虽然一直从几个不同的观点得到充分的研究，但是，由于这一理论在许多研究和应用领域中的重要作用，新的研究和发展至今一直没有停止。本书就是介绍这一重要理论问题的基础知识。

三、最优控制

它是研究在给定的限制条件和给定的性能指标下，寻找使该性能指标达到最佳值（最大值或最小值）的控制规律问题。例如要求控制一个飞行器达到予定目标的时间最短、燃料消耗最小或/和偏离予定轨线最小等的控制规律。

最优控制问题的提出，是促使现代控制理论出现的一个重要原因，是现代控制理论的重要内容，并已设有专门课程予以介绍。

四、最优估计

最优估计与最优控制是构成一个最优控制系统两个最基本的内容。理论上，最优控制应来自状态反馈；但是，系统的状态往往无法直接测量，实际能够量测到的讯息往往是受到随机噪声污染的系统输出；因此必须应用概率论中的理论和方法，在系统的结构和参数为已知的条件下，对所量测到的讯息进行在线处理，滤去噪声，对系统的真实状态作出最好估计，这就是最优估计问题。1961年卡尔曼的递推滤波理论相当有成效地解决了这一问题。

如前所述，最优控制及最优估计中的一个最重要且研究得最完善的问题就是LQG最优控制问题。认真说来，它们也应隶属于线性控制理论的范畴，但是由于其内容的深刻与丰富，总是单独地予以讨论。

五、自适应控制

自适应控制所研究的对象是具有不确定性的系统。任何一个实际控制系统，都在不同程

度上具有不确定性。在系统内部，被控设备的数学模型的结构和参数，事先可能无法确切知道(这是经常的情况)，或随时间而发生变化；在系统外部，可能有许多作用于系统上的无法确切知道的干扰。面对这些各式各样的不确定性，如何设计一个满意的控制系统来适应这些变化，这就是自适应控制系统所需研究和解决的问题。当然对付不确定性，也可以采用鲁棒控制的设计方法，但是当不确定性较大时，就需要自适应控制。

因此，自适应控制是一个比较复杂的问题，也是控制理论用于实际的重要问题，是目前非常活跃的研究课题，并且将朝着更高级更复杂的自学习及智能控制系统等方向发展。

0—3 本书主要内容

本书主要介绍线性多变量控制系统的综合、设计所需要的一些基本概念、基本理论和基本方法。为了讨论方便，问题从单变量系统开始，然后推广至多变量系统。方法包括状态空间法及近代频域法。本书所涉及的系统问题都是根本性的，例如关于能控性、能观性、稳定性、最小性等系统结构问题，又如关于反馈原理、前馈原理、分离原理、内模原理等基本控制原理；还有关于极点配置、跟踪、干扰阻塞、解耦、鲁棒控制等（最优控制除外）基本控制问题。因此，本书虽属于线性控制理论范畴，但是却包括了进一步学习现代控制理论所必备的基本概念和基本知识。此外，书中虽然主要涉及连续系统，对离散系统只作简单讨论，但是所介绍的理论和方法，经过适当修改，完全可用于离散系统。想了解离散系统详细内容的读者，可参阅文献[11]。

各章内容安排如下：

第一章首先介绍了近代控制理论中一个最重要的概念，即状态变量和状态空间描述。接着介绍状态空间描述的建立，它既可以根据物理系统直接建立，也可以由传递函数（阵）转化而来，后者是“实现”理论的重要内容。对此，我们首先较详细地介绍单变量系统的“实现”，然后，简单介绍多变量系统的其它描述，并且在介绍了多项式矩阵分式描述的基础上，讨论了多变量系统的“实现”问题。

第二章、第三章及第四章主要是控制系统的基本性能的分析。第二章介绍控制系统方程的求解问题，即控制系统的定量分析。我们着重于解的一般表达式、解的结构及状态转移矩阵的意义和性质，最后介绍常见的几种状态转移矩阵的计算方法。第三章及第四章则着重于控制系统的结构性质。第三章介绍控制系统的两个基础性概念——能控性与能观性。从状态空间描述出发，介绍能控性、能观性的定义、判据及结构分解定理，并据此给出最小实现的基本方法。最后给出能控性、能观性判据的频域形式，并简单讨论了组合系统的能控性和能观性。通过这一章，我们就能对线性系统的内部结构有一个比较清楚的了解。

第四章介绍控制系统的另一个重要性质——稳定性，以及分析稳定性的另一重要理论工具的基本概念，即李雅普诺夫(Ляпунов)的稳定性定义及其第二法的基本定理。然后利用第二法具体分析了线性时不变系统的稳定性，以便对李雅普诺夫第二法有一个概念性的了解。本章还把渐近稳定性与古典控制理论中的有界输入-有界输出稳定性进行比较，并把它们与能控性、能观性概念联系起来。据此我们又从传递函数阵观点讨论了组合系统的稳定性，使我们能够像古典控制理论那样，用开环系统的特性来研究反馈控制系统的稳定性。

第五章是关于控制系统的综合与设计。我们详细介绍利用状态反馈达到极点配置的基本理论和方法。这样，既介绍了单变量系统，又介绍了多变量系统；既介绍了状态空间法，又

介绍了近代频域法。因为极点配置最能简明地说明状态反馈的重要意义，是其它控制问题的基础，也最易为初学者所理解，所以，我们作了比较详细的介绍。此外，还较详细地介绍了渐近跟踪、干扰阻塞及鲁棒控制的基本概念和综合方法，并且对其它常见的控制问题也作了简单扼要地介绍。最后，还对其它近代频域设计技术作了概念性介绍。

通过本课程的学习，学生应具备了根据所给定的被控系统，对于常见的控制问题，能够综合出一个线性多变量控制系统的初步知识和能力，并掌握了进一步深入学习现代控制理论中的其它有关课程（如最优控制、自适应控制等）的基础知识。

第一章 状态空间描述及其它描述

众所周知，要研究任何一个动态系统，首先要建立数学方程来描述该系统。对于同一个系统，若采用的研究方法、观点不同，描述系统所用的数学方程也就不同。例如在经典控制理论中，描述一个单变量线性时不变系统，采用传递函数或频率特性。它们把系统视为一个"黑盒"，并在零初始条件下，根据系统的输出与输入之间的关系来描述该系统的行为，因此，又常常称为外部描述，或输入-输出描述。后面我们将会看到，外部描述没有揭示系统内部的运动状态，从这一点看，它是一种不完全的描述。

六十年代开始发展起来的现代控制理论，采用状态空间描述来研究动态系统的行为，实际上，它是一组一阶微分方程。这种描述不仅能描述系统输入与输出之间的关系，而且，在任何初始条件下，都能揭示系统内部的行为，因此它是一种完全的描述，又称内部描述，是近代研究动态系统的一种重要方法。本章将详细介绍状态空间描述的基本概念，状态空间描述的建立和变换，最后还要介绍当前常用的其它一些描述，以及各种描述之间的互相转换。

1—1 状态变量与状态空间描述

一、状态变量

设任给一个动力学系统(简称为动态系统或系统)，如图1-1的方框所示。它可以看成是生产中任何一种被控设备，或任何一个元件，或者甚至是一个完整的控制系统的模型。同时设有r个输入变量u_1，u_2，…，u_r作用在该系统上，它们引起了系统的运动；又设系统有m个输出变量y_1，y_2，…，y_m。这里的所谓输入变量和输出变量分别是指可以从系统的外部进行操作和测量的变量，因此输入变量又叫控制变量。此外，我们用n个变量x_1，x_2，…，x_n来表征系统内部的所谓状态变量，并给予如下的定义。

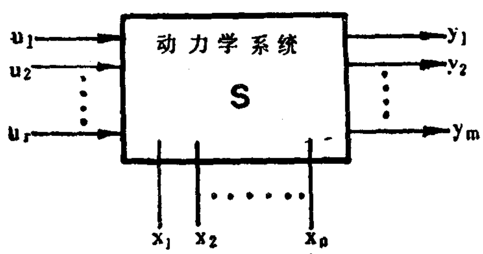

图1-1

定义1—1 所谓动态系统的状态变量，是指足以完全表征系统运动状态的一个最小的变量组。

这里"**完全表征**"是指，一旦给定这个变量组在$t=t_0$时刻的数值，那么，只要知道$t>t_0$的输入变量$u_i(t)$ ($i=1, 2, \cdots, r$)，我们就能唯一确定这一变量组本身及输出变量$y_i(t)$($i=1, 2, \cdots, m$)在$t>t_0$时间的一切值。

当然，我们可以不必知道状态变量组在t_0时刻的数值，而只知道$t>-\infty$所有时刻的输入变量，同样也能确定所有$t>-\infty$的输出变量及这组状态变量的值。但是问题在于，这样一来，当从某一时刻t_0起，我们对系统开始产生兴趣时，就必须知道t_0时刻及其以前的全部输入历史，实际上，这是办不到的。反之，如果我们知道的是状态变量的初值$x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，…，$x_n(t_0)$，就可以完全不必过问$t\leq t_0$时间内输入变量$u_i(t)$($i=1, 2, \cdots, r$) 的历史了。而且由于t_0是任意选定的，因此可以说，系统在任何时刻t的状态变量，实际上是以某种有效的方式，充分地、既不多也不少地概括和存储了与系统过去历史有关的讯息，这些附加讯息与未来的输入变量一道，就能确定系统未来的行为，由此可见状态变量之重要性。

系统未来的行为受它的过去历史的影响，而不是简单地只由一组输入-输出的瞬时关系来确定，这正是动态系统的一个基本特点。状态变量的引入，正是为了考虑这种影响所必需的一种简便而有效的方法。

例1—1

(1) 设有图1-2所示之网络，图中电压$e(t)$为输入变量，电压$y(t)$为输出变量。显然，可直接写出$y(t)$与$e(t)$的关系式如下：

$$y(t)=ke(t) \tag{1-1}$$

式中 $k=r_2/(r_1+r_2)$为比例系数。

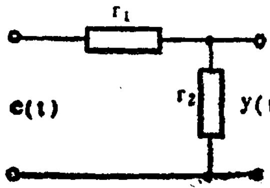

图1-2

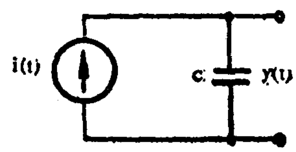

图1-3

上式为一代数方程，它表明此系统的行为可以由输出与输之间的瞬时关系来确定，与系统的过去历史无关。因此对于这个系统，只要知道$t>t_0$的输入$e(t)$，就能完全确定$t>t_0$的输出$y(t)$，而无需引入反映系统历史的附加讯息的变量——状态变量。严格说来，这个系统不是一个动态系统，或者说是动态系统的特例。

从物理构造上看，此网络只包含有瞬时元件，没有任何存贮元件。因而该系统在任何时刻的讯息，一过了该时刻便立即消失，对系统未来的行为不发生任何影响。

(2) 设所给网络改为图1—3所示，其中引入了一个存贮元件——电容。并设输入变量为电流$i(t)$，输出变量为电压$y(t)$。由电学的知识可写出$y(t)$与$i(t)$的关系为$dy/dt=i(t)/C$，则有

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \tag{1-2a}$$

或

$$y(t)=y(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \tag{1-2b}$$

式(1—2)表明，在这网络中，为了确定$t>t_0$时间的输出变量$y(t)$，只给定$t>t_0$的输入是不够的，还必须知道$t\leqslant t_0$的全部输入变量$i(t)$，或者，必须知道$y(t_0)$。显然，知道$y(t_0)$要比知道$i(t)$的历史方便得多，于是我们可以把$y(t_0)$视为某个状态变量的初值，即令$x(t_0)=y(t_0)$，因而有$x(t)=y(t)$，而且由式(1-2b)知，它们与输入变量的关系满足下面的微分方程，而不是像式(1—1)所示的代数方程，即有

$$\dot{x}(t)=\dot{y}(t)=i(t)/C \qquad t\in[t_0,\ \infty] \tag{1-2c}$$

上式就是状态变量的初值$x(t_0)$与$t>t_0$的输入变量一起确定系统未来行为所遵循的方程，它是一个一阶线性微分方程。

众所周知，在此网络中，由于包含了一个贮能元件——电容，它有存贮讯息的能力，才使得系统未来的行为受过去历史的影响，因而必须引入一个状态变量来概括这种影响。同理可以推知，如果在网络中再增添一个独立的存贮元件，那么系统的输入-输出关系就必须用二阶微分方程来描述，这时候若只用一个状态变量就不足以概括系统过去历史的影响，而必

须用二个状态变量(建议读者自行验证)。

因此，由上面的例子可见，动态系统、独立贮能元件、微分方程、状态变量等有着紧密的内在联系。

还应该指出，在前面关于状态变量的定义中，并未明确规定必须选择哪些变量作为状态变量。显然，任何一组变量，只要符合定义中所述的条件，就可以选为状态变量，因此状态变量的选择不是唯一的。例如，在上一例中，还可取$x(t)=ay(t)$，而且a可以为任意实数。关于这类性质的问题，后面还要详细讨论。

二、状态向量

设系统有n个状态变量，并以惯用符号$x_1(t)$，$x_2(t)$，……，$x_n(t)$表示。如果以这些状态变量为分量组成向量$\mathbf{x}(t)$，则$\mathbf{x}(t)$称为状态向量，并记为

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}^{*}，\text{或}\mathbf{x}(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots\cdots,\ x_n(t)]'$$

式中 “′”表示向量或矩阵的转置，下同。

三、状态空间

不言而喻，物理系统的状态变量是一组实数，因此，若以状态变量x_1，x_2，…，x_n为坐标轴，就可构成一个n维实线性空间，通常称之为状态空间。

以三维状态空间为例，如图1-4所示。状态空间中的每一点都代表了状态变量特定的一组值，并表示了系统的一个特定状态。则根据状态变量的定义，当给定了系统的一个初态$\mathbf{x}(t_0)$（如图所示）及$t>t_0$的输入向量$\mathbf{u}(t)$，则系统在$t>t_0$的各个时刻的状态便唯一确定。于是，在状态空间中便画出了唯一的一条随时间变化的状态轨迹，如图所示。

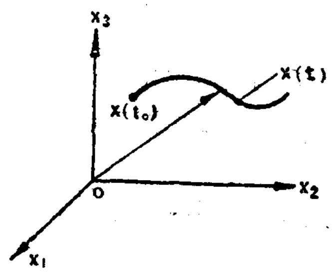

图1-4

四、状态空间描述

状态向量的初值$\mathbf{x}(t_0)$及$t>t_0$的输入向量$\mathbf{u}(t)$以什么规律，或者说以什么数学关系式决定着系统未来的行为，这就是状态空间描述所要讨论的内容，也是我们至为关心的问题。

1．引例　设某个单变量动态系统可用一n阶微分方程描述，即

$$y^{(n)}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+\cdots\cdots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_n y(t)=bu(t) \qquad (1\text{-}3)$$

式中 $y(t)$为系统的输出变量；$u(t)$为系统的输入变量；a_1，a_2，……a_n，b为已知系数。

由微分方程知识可知，对于n阶微分方程，当给定了n个初始条件$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$，……，$y^{(n-1)}(t_0)$以及$t>t_0$的输入变量$u(t)$后，便可求得方程的唯一解$y(t)$。求得$y(t)$后，其它变量$y(t)$，$\dot{y}(t)$，……，$y^{(n-1)}(t)$也随之而定。因此，根据状态变量的定义，显然，可以取$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$，……，$y^{(n-1)}(t_0)$作为某一组状态变量的初值，而这组状态变量相应地就是$y(t)$，$\dot{y}(t)$，……，$y^{(n-1)}(t)$。由上面的分析表明，这组初值对于确定n个状态变量本身及输出变量的未来

---

* 今后为了书写方便，常把时间函数$x(t)$、$u(t)$、$y(t)$……等简记为x、u、y、……等。

值，是一组既不多也不能少的独立讯息，因此这样选取状态变量是合理的。

沿用状态变量的惯用符号，令$x_1(t)=y(t)$，$x_2(t)=\dot{y}(t)$，……，$x_{n-1}(t)=\overset{(n-2)}{y}(t)$，$x_n(t)=\overset{(n-1)}{y}(t)$。并再次利用微分方程知识及状态变量的定义可知，状态变量的运动符合一阶微分方程规律，为此对上面各个状态变量逐一求导便得

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = (\dot{y}(t)) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = (\ddot{y}(t)) = x_3(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}_n(t) = (\overset{(n)}{y}(t)) = (-a_1\overset{(n-1)}{y}(t) - a_2\overset{(n-2)}{y}(t) - \cdots\cdots
\end{cases}
\tag{1-4}
$$

$$
\begin{aligned}
&-a_{n-1}\dot{y}(t) - a_n y(t) + bu(t)) \\
&= -a_1x_n(t) - a_2x_{n-1}(t) - \cdots\cdots - a_{n-1}x_2(t) - a_nx_1(t) + bu(t);
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = x_1(t) \tag{1-5}
$$

写成矩阵形式得

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 1 \\
-a_n & -a_{n-1} & \cdots\cdots & -a_1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} u
\tag{1-6}
$$

$$
y = [1 \ 0 \cdots \cdots 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1-7}
$$

上式可简记为

$$
\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \tag{1-8}
$$

$$
y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \tag{1-9}
$$

式中　**A**，**b**，**c**分别为$n\times n$，$n\times 1$，$1\times n$矩阵

式(1-6)、(1-8)为一阶矩阵微分方程，它描述了系统(1-3)的状态向量$\mathbf{x}(t)$在初态$\mathbf{x}(t_0)$及输入变量$u(t)$作用下的运动规律，称为该系统的状态方程；式(1-7)、(1-9)为一代数方程，相应地描述了输出变量的运动规律，称为输出方程；状态方程与输出方程合起来，描述了系统的输入-状态-输出的动态关系，称为系统的状态空间描述（或称为系统的动力学方程）。

2．状态空间描述的一般形式

现在我们把上述单变量系统的状态空间描述的特例推广至更一般的多变量系统中去。

设有一个多变量动态系统，其方框图如图1-1所示，由图1-1可以看到，它与单变量系统的直观差别就在于，状态变量的数目，特别是输入变量及输出变量的数目不同，它们都具有向量的形式。因此设状态变量、输入变量、输出变量分别可记为