

现代代数学习手册

· · ·

清华大学出版社

逻辑代数学习手册

廖 祖 纬

中央广播电视大学出版社

逻辑代数学习手册

廖祖纬

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

轻工业出版社印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.5 千字 94

1984 年 4 月第 1 版 1984 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—36,000

书号· 13300· 20 定价: 0.50 元

前 言

中央广播电视大学将于一九八五年春开设的《集合论与逻辑代数初步》课程分为集合论和逻辑代数两个部分。《逻辑代数学习手册》是逻辑代数部分的辅助教材,并按三十讲电视录象课的次序编写,目的是帮助学员主动收看好电视课。但是,这几万字的小册子并不包括三十讲课的全部内容,只能提供一条如何预习、收看和复习的线索。因此,对使用此“手册”提出如下要求:

一、预习 在收看前务必按该讲的标题和提要,认真预习《逻辑代数》教材中的有关部分,具体作到:(1)将有关定义抄成纸条贴在本“手册”中的书眉上;(2)对感到陌生和难懂的内容作上记号或打上问号。

二、听讲 在收看时切勿忙于翻书,抄卡片,记笔记,而是集中注意力听讲,特别是自己感到陌生和难懂的内容,要争取听清楚。笔记要简明扼要,所讲内容一般都可在教材中找到,不必详细抄写。

三、复习 在收看完毕时,及时用几分钟作一简短回顾(在脑子里过一下电影),将疑问记下来,然后带着问题复习教材。在弄懂本讲内容的基础上,独立完成习题作业(本《手册》也不附习题解答)。

本《手册》中的常用缩写符号:

D —— 定义

A —— 公理

L ——引理

T ——定理

C ——推论

P ——性质

E ——例题

$\vdash$ ——可证(互证时,也要用 $\dashv$)

$\dashv$ ——证毕(结尾处用)

本“手册”三十讲内容是一九八二年下半年度在组内试讲讨论,一九八三年暑期在河北省数学会师专教学研究组和保定师专联合举办的讲习班上系统串讲,一九八三年冬在江西广播电视大学主办的讲习班上试讲过后修改补充而成的.在此对以上各方面的领导和参加各次讨论的老师表示衷心感谢.张锦文同志除亲自承担集合论部分的教学工作外,并对这部分教学工作始终给予热情的鼓励和支持,在此表示衷心感谢.

廖祖纬

一九八四年春节

目 录

第一讲	基本概念	1
第二讲	运算规律	5
第三讲	基本公式	7
第四讲	转换定理	11
第五讲	完备性定理	14
第六讲	范式和标准范式	16
第七讲	标准范式定理	19
第八讲	逻辑式化简	23
第九讲	化简理论(一)	25
第十讲	化简理论(二)	28
第十一讲	图域化简法	31
第十二讲	逻辑方程	34
第十三讲	逻辑方程的求解	39
第十四讲	开关代数	46
第十五讲	逻辑线路设计	49
第十六讲	完备性分析	53
第十七讲	命题及连接词	56
第十八讲	蕴涵式及双蕴涵式	60
第十九讲	量词命题	63
第二十讲	基本的演绎推理系统 P	66
第二十一讲	斜式证明	70

第二十二讲	推理系统 P^*	73
第二十三讲	P^* 中的一些形式定理	76
第二十四讲	数学归纳法	82
第二十五讲	推理系统 F 和 F^*	84
第二十六讲	F 和 F^* 中的形式定理	89
第二十七讲	证明综述	94
第二十八讲	两种数学归纳法的等价性	96
第二十九讲	一般布尔代数	100
第三十讲	集合代数	101
附录	若干形式定理的补证	108

第一讲 基本概念

【提要】

一、问题提出

1. 复习代数系统 $\langle R, +, \cdot \rangle$

(1) R 是实数集合, 在研究中用文字 $a, b, c, \dots, x, y, z$ 代替具体的实数.

(2) 运算 $+$ (加)、 $\cdot$ (乘) 在 R 上封闭.

(3) $+$ 、 $\cdot$ 满足四条基本规律:

A_1' 交换律

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

A_2' 结合律

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

A_3' 分配律

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

A_4' 么元律

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

2. 考察数学结构 $\langle \{0, 1\}, +, \cdot \rangle$

(1) $\{0, 1\}$ 是二值集合. 在研究中也用文字 $A, B, C, \dots$

X, Y, Z 代替 0, 1, 并称 0, 1 为常元, $A, B, \dots, Z$ 为变元.

(2) 运算 $+$ (或)、 $\cdot$ (与)、 $'$ (非) 在 $\{0, 1\}$ 上封闭, 即

$+$	0 1	$\cdot$	0 1	A	A'
0	0 1	0	0 0	0	0
1	1 1	1	0 1	1	1

(3) $+$ 、 $\cdot$ 、 $'$ 满足什么基本规律?

二、逻辑式

D_1 逻辑式——

D_2 逻辑式的值——

D_3 逻辑式所含运算符的个数——

T_1 任一逻辑式的值仅为 0 或 1.

证 设逻辑式 F_n 含有 n 个运算符, 则施归纳于 n .

假设对于任一自然数 k , $F_0, F_1, \dots, F_k$ 的值都仅为 0 或 1, 则需证 F_{k+1} 的值也仅为 0 或 1. 由逻辑式定义, 得

$$F_{k+1} = \begin{cases} G_s + H_{k-s} & (s < k) \\ G_t \cdot H_{k-t} & (t < k) \\ G'_k & \end{cases}$$

又由归纳假设 $G_s, H_{k-s}, G_t, H_{k-t}, G_k$ 的值也都仅为 0 或 1, 故由运算 $+$ 、 $\cdot$ 、 $'$ 在 $\{0, 1\}$ 上的封闭性得知 F_{k+1} 的值也仅为 0 或 1.

从而证明, $\forall k [\forall m (m < k+1 \rightarrow F_m) \rightarrow F_{k+1}]$

因此, 由第二数学归纳法证得. —

D_4 逻辑式的真值表——

T_2 n 元逻辑式的真值表有 2^n 个值.

证 设 n 元逻辑式为 $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 则施归纳于 n . 当 $n=0$ 时, 由逻辑式定义, T_2 显然成立.

当 $n=k$ (任一自然数) 时, 假设 $F(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 有 2^k 个值, 则需证 $F(A_1, \dots, A_k, A_{k+1})$ 的真值表有 2^{k+1} 个值.

$\therefore \quad A_1 \quad A_2 \cdots \cdots A_k \quad A_{k+1}$	$F(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1})$
$A_1 \quad A_2 \cdots \cdots A_k \quad 0$	$F(A_1, A_2, \dots, A_k, 0)$
$A_1 \quad A_2 \cdots \cdots A_k \quad 1$	$F(A_1, A_2, \dots, A_k, 1)$

又由归纳假设, 表中第一行有 2^k 个值, 第二行也有 2^k 个值, 所以 $k+1$ 元逻辑式 $F(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1})$ 的真值表有 $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 个值.

由于 k 为任一自然数, 故由第一数学归纳法得证.

三、两个逻辑式相等

D_5 两个逻辑式相等——

$T_3 \quad F=G \iff F, G$ 的真值表相同.

$C_1 \quad F=G \iff F'=G'$

四、基本运算规律

A_1 交换律

$$A+B=B+A$$

$$A \cdot B=B \cdot A$$

A_2 分配律

$$A+B \cdot C=(A+B) \cdot (A+C)$$

$$A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$$

A_3 公元律

$$A+0=A$$

$$A \cdot 1 = A$$

A₄ 互补律

$$A + A' = 1$$

$$A \cdot A' = 0$$

D₆ 二值布尔代数 $\langle \{0, 1\}, +, \cdot, ' \rangle$ ——

【附注】

一、重点: $\langle \{0, 1\}, +, \cdot, ' \rangle$ 的建立.

二、难点: 第二数学归纳法和 $A + BC = (A + B)(A + C)$.

三、要求:

1. 通过 $\langle \{0, 1\}, +, \cdot, ' \rangle$ 的建立, 领会有关的基本概念.
2. 掌握真值表证明方法, 了解数学归纳法的运用.
3. 牢记 $A_1 - A_4$.

【习题】

1. 给定逻辑式 $(A + C)'B + (A + C)B'$, 求值.
(1) $A = 0, B = C = 1$; (2) $A = 1, B = C = 0$.
2. 列 $(A + C)'B + (A + C)B'$ 的真值表.
3. 利用真值补证 $A_1 - A_4$.
4. 完成 T_3, C_1 的证明.

第二讲 运算规律

【提要】

一、重要运算规律

$$T_0 \rightarrow T_8$$

二、辅助公式和辅助定理

$$L_1 \rightarrow L_4$$

三、证明 $A_1 \rightarrow A_4 \vdash T_0 \rightarrow T_8$

【附注】

一、重点: $A_1 \rightarrow A_4 \vdash T_0 \rightarrow T_8$

二、难点: T_0, L_3, L_2, T_1, T_4 的证明.

三、要求:

1. 掌握推演方法.

2. 熟记 $T_0 \rightarrow T_8$.

【习题】

完成 $A_1 \rightarrow A_4 \vdash T_0 \rightarrow T_8$ 的全部证明.

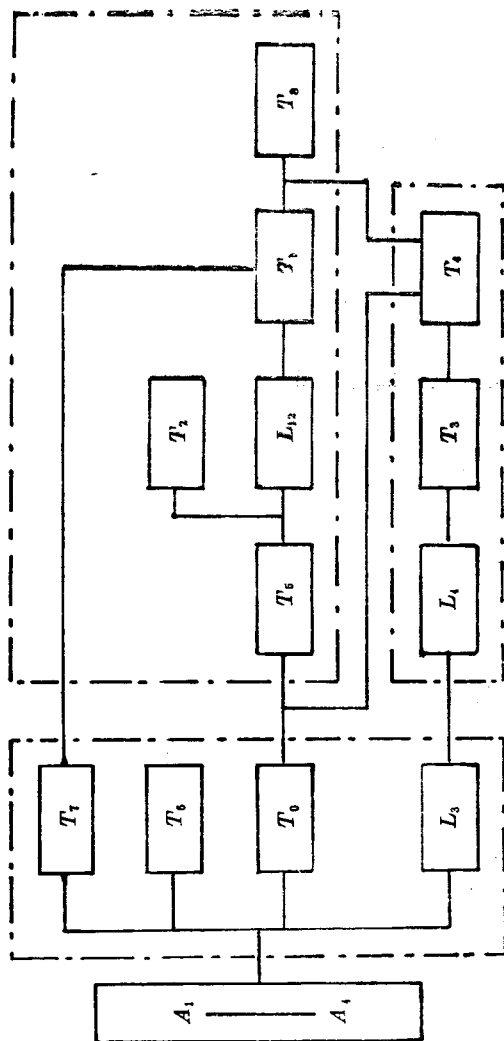


图 1

第三讲 基本公式

【提要】

一、一元逻辑式的变元分离式

T_1 任给 $F(A)$, 则

$$(1) F(A) = AF(1) + A'F(0)$$

$$(2) F(A) = [A + F(0)][A' + F(1)]$$

C_1 给定 $F(A), G(A)$, 若 $F(0) = G(0), F(1) = G(1)$, 则 $F(A) = G(A)$.

二、 n 元逻辑式的变元分离式

T_2 任给 $F(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$, 则对于 $1 \leq i \leq n$, 有

$$(1) F(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

$$= A_i F(A_1, A_2, \dots, 1, \dots, A_n)$$

$$+ A'_i F(A_1, A_2, \dots, 0, \dots, A_n)$$

$$(2) F(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

$$= [A_i + F(A_1, A_2, \dots, 0, \dots, A_n)][A'_i$$

$$+ F(A_1, A_2, \dots, 1, \dots, A_n)]$$

C_2 给定 $F(A_1, A_2, \dots, A_n), G(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 若对于 $1 \leq i \leq n$, 有

$$F(A_1, A_2, \dots, 0, \dots, A_n) = G(A_1, A_2, \dots, 0, \dots, A_n)$$

$$F(A_1, A_2, \dots, 1, \dots, A_n) = G(A_1, A_2, \dots, 1, \dots, A_n)$$

则 $F_1(A_1, A_2, \dots, A_n) = G(A_1, A_2, \dots, A_n)$

三、 n 元逻辑式的完全分离式

1. 任给 $F(A, B)$, 则

$$(1) F(A, B) = ABF(1, 1) + AB'F(1, 0) \\ + A'BF(0, 1) + A'B'F(0, 0)$$

$$(2) F(A, B) = [A + B + F(0, 0)][A + B' \\ - F(0, 1)][A' + B + F(1, 0)][A' + B' + F(0, 1)]$$

其中(1)为完全展开式, (2)为完全分解式, 故合称为完全分离式。

2. n 元逻辑式的完全分离式

T_3 任给 $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 则

$$(1) F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_1^{2^n} F(e_1, e_2, \dots, e_n) A_1^{e'_1} A_2^{e'_2} \dots A_n^{e'_n}$$

$$(2) F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \prod_1^{2^n} [F(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \\ + A_1^{e'_1} + A_2^{e'_2} + \dots + A_n^{e'_n}]$$

其中

$$A_i^{e'_i} = \begin{cases} A_i & \text{当 } e_i = 1 \text{ 时} \\ A'_i & \text{当 } e_i = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

证 当 $n=1$ 时, 由 T_1 得证。

当 $n=k$ (任一自然数) 时, 假设

$$F(A_1, A_2, \dots, A_k) = \sum_1^{2^k} F(e_1, e_2, \dots, e_k) A_1^{e'_1} A_2^{e'_2} \dots A_k^{e'_k}$$

则需证 $F(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1})$

$$= \sum_1^{2^{k+1}} F(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}) A_1^{e'_1} A_2^{e'_2} \dots A_k^{e'_k} A_{k+1}^{e'_{k+1}}$$

$$\therefore F(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}) = A_{k+1} F(A_1, A_2, \dots, A_k, 1)$$

$$\begin{aligned}
& + A'_{k+1} F(A_1, A_2, \dots, A_k, 0) \\
& = A_{k+1} \sum_1^{2^k} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, 1) A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \dots A_k^{\varepsilon_k} \\
& \quad + A'_{k+1} \sum_1^{2^k} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, 0) A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \dots A_k^{\varepsilon_k} \\
& = \sum_1^{2^k} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, 1) A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \dots A_k^{\varepsilon_k} A_{k+1} \\
& \quad + \sum_1^{2^k} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, 0) A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \dots A_k^{\varepsilon_k} A'_{k+1} \\
& = \sum_1^{2^{k+1}} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}) A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \dots A_k^{\varepsilon_k} A_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}
\end{aligned}$$

由于 k 为任一自然数, 所以由第一数学归纳法证得(1). (2) 同理.

四、简单应用

1. 证明逻辑等式
2. 化简逻辑式

【附注】

$$\text{一、重点: } F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_1^{2^n} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \dots A_n^{\varepsilon_n}$$

二、难点: 数学归纳法的具体应用.

三、要求:

1. 熟悉基本公式的简单应用.
2. 掌握第一数学归纳法,

【习题】

1. 利用第二数学归纳法证明

$$F(A) = AF(1) + A'F(0)$$

2. 利用第一数学归纳法证明

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \prod_1^{2^n} [F(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n) + A_1^{i_1} \\ + A_2^{i_2} + \dots + A_n^{i_n}]$$

3. 试证 $AF(1) + A'F(0) = [A + F(0)][A' + F(1)]$

4. 利用基本公式证明

$$AB' + A'BC' + B'C = (A+C)'B + (A+C)B'$$

5. 化简 $[(A+B)'B]' + A'(B+C)D$