数 学 分 析

上 册

王慕三　庄亚栋

高等教育出版社

数 学 分 析

上 册

王慕三 庄亚栋

高等教育出版社

全书按集论、实数论、极限(包括数项级数)论、连续函数(包括函数项级数)、一元微积分、多元微积分的系统按排其体系，采用实函和现代分析的观点处理传统内容. 适当精减了微积分的初等内容，着力于其理论部分的严格化及现代化处理. 全书内容丰富、结构严密、描述细致. 引入基本概念既直观又严谨，特别多元部分处理有新意. 例、习题丰富有趣，对大学数学系学生是一本很有价值的教学参考书.

全书分三册出版. 上册内容为集论、实数论、极限论.

数 学 分 析

上 册

王慕三 庄亚栋

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

三二〇七工厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 180 000

1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷

印数 0001—1 530

ISBN 7-04-002739-9/O·870

定价 1.85 元

前　言

编写本书的目的有两个，一是更好地与中学教材(尤其是与中学教材中微积分方面的内容)相衔接，一是提高多元微积分部分的处理水平. 因此，对一元微积分部分，我们的重点放在内容的组织、调整上，希望能结合我们的教学，对传统内容的处理有些新意；而对多元微积分部分，重点则放在如何把现代分析的观点渗透其中，希望能注意到一维与多维，欧氏空间与抽象空间的处理手法的一致性.

本书基本上按照1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审定的综合大学以及高等师范院校数学，计算数学专业《数学分析教学大纲》编写，但对中学已学过的内容作了精简，在n维欧氏空间的背景下处理多元微积分. 最后，在第十二章内形式地处理了外积与微分形式.

考虑到数学分析教材改革的目标与现状，除了上面提到的变动外，主要还有：

加强了极限论——对学生已学过的数列极限作了整理与扩充；把数列与数项级数，函数列与函数项级数集中在一起处理，以加强ε-δ论证及加深学生对逐点连续与一致连续，逐点收敛与一致收敛处理手法上一致性的理解；介绍了有向函数的极限，以统一处理数学分析中的各种极限过程；突出了邻域概念的作用；

加强了积分论——展开了约当(Jordan)容度的理论，讨论了约当可测集上的积分，证明了可积性的勒贝格特征及积分的单调收敛定理，阿尔采拉(Arzéla)控制收敛定理；

此外，读者还将发现本书在部分传统内容的处理细节上及观念上所作的一些变动.

我们觉得，这样做无论是对有后续课程的学校，或没有后续课程的专科学校的未来的教师都是有好处的：通过本书的学习，便能对数学分析的基本内容有比较完整的认识.

我们还觉得，作为主要基础课的教材，还应负有培养学生今后的教学、研究能力，特别是组织、表达能力的任务. 因此，这类书中的定理、定义要眉目清楚，论证要严格、简练而又规范，计算要简明而又不脱落重要步骤. 我们想努力做到这一点. 为了让学生能得到一定的训练，为教师提供习题课的部分材料，我们根据过去的教学配备了数量较多的习题，分成两类，一类以"练习"作标题，希望中等程度的学生能基本掌握；一类以"习题"作标题，放在每一章的最后，供水平较高的学生选作. 书末附有计算题的答案与部分证明题的提示.

本书的前身是我们对1983级学生讲授过的讲义，总授课时数为330学时(包括习题课). 当然，在使用本书时教师可根据学时数与学生水平决定对内容的取舍，本书提供了可供教师灵活处理的许多材料. 由于本书编写时假定学生已学习过导数计算，而目前中学生还未普遍如此，故讲授时教师需要补充导数计算的部分内容.

本书共分三册，上册以实数理论和极限方法为中心，中、下册分别是一元、多元微积分理论. 本书初稿第三、四、五、六、九、十章由王慕三编写，庄亚栋编写了其余六章并对全部书稿作了整理工作，改写了部分内容. 华东师范大学程其襄教授和中国科学技术大学徐森林教授详细地审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，许多同志对我们的工作给予关心和支持，我们谨向他们表示衷心感谢. 我们也衷心感谢本书责任编辑为提高书稿质量所付出的辛勤劳动.

敬请读者批评指正.

庄亚栋(扬州师范学院)

王慕三(安徽师范大学)

1987年8月

目　录

第一章　集与函数

本章复习中学数学里集与函数的一些内容，同时加以补充及引伸.

第1节　集

1.1　集及其表示

所谓集，是指某类对象的总体．这些对象叫作这个集的元素．不过这只是对"集"、"元素"这两个术语的含义的描述而不是定义．对我们这门课程来说，集、元素只是不定义的原始术语．

"某类对象"的意思是：这些对象通常总具有某种性质．这种性质限制了对象的范围，从而任给一个集和某个对象，可以明确判定这个对象是不是这个集的元素．

习惯上以大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集，以小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示元素，以 $a \in A$ 表示 a 是 A 的元素，读作"a 属于 A"，以 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的元素，读作"a 不属于 A"．当 A 有有穷个元素时，称 A 为有穷集，否则叫无穷集．当 A 有 n 个元素时，称 A 为 n 元集．

集由其中的元素完全确定．因此为了把某个集表示出来，可以采取下面两种方法．

列举法：把元素一一列举出来，并加上花括号．

代表元素法：当集 A 由具有性质 P 的一类对象组成时，它可以表示成 $\{x : x$ 具有性质 $P\}$，其中的 x 叫代表元素，也可以用其它字母表示．

尽管列举法不能对无穷集通用，但它给人以清晰的印象，所以对于某些无穷集也用列举法表示（虽然举不出它的所有元素）．如

$$正整数集\ \mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

$$正偶数集=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\},$$

或者更简单地，分别写作$n=1,2,3,\cdots$及$n=2,4,6,\cdots$．直观地说，列举法用于元素可以一个个地点数的集，即可数集（见 3.7 节）．

当列举元素时，每个元素只允许出现一次．同时，集与列举它的元素的次序无关．

有时，虽然指定了某类对象，但这样的对象并不存在，如“方程 $x^2+1=0$ 的实数解集”．象这样的没有元素的集叫空集，记作 $\varnothing$．

当讨论某个数学问题时，包含这个问题的所有对象的集叫作全集．例如，如果在实数范围内讨论，全集就是所有实数之集 $\mathbf{R}$；如果是在正整数范围内讨论的，全集就是所有正整数之集 $\mathbf{N}$．除非特别申明，本课程都在 $\mathbf{R}$ 中讨论．

空集与全集是为了便于用集统一处理问题，不致发生不必要的麻烦而作的一种规定．

1.2 集与集之间的关系

这是指包含关系与相等关系．

设 A,B是两个集，若 A 的所有元素是 B 的元素，则说“A 含于 B”，或“B 包含 A”，或 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$．

这样，一个集的某一部分元素便形成它的一个子集．例如四元集$\{1,2,3,4\}$的子集有它自己，空集，以及 4 个一元集，6 个二元集，4 个三元集，总共 16 个子集．这里要注意：任何集都是它自己的子集，空集是任何集的子集．

若 $A\subseteq B$, $B\subseteq A$，则称集 A,B 相等，记作 $A=B$．

若 $A\supseteq B$ 但 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 这时，A 的所有元素是 B 的元素，但存在 B 的元素不是 A 的元素.

包含关系有下列性质：

(1) 自反性：$A\subseteq A$；

(2) 反对称性：若 $A\subseteq B$, $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3) 传递性：若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

1.3 集的运算

设 A, B 是集. 所谓 A 与 B 的并集，是指由 A, B 的所有元素形成的集，记作 $A\cup B$. 这样，

$$A\cup B\overset{d}{=}\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\}^{①}.$$

所谓 A 与 B 的交集，是指由 A, B 的所有公共元素形成的集，记为 $A\cap B$：

$$A\cap B\overset{d}{=}\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称集 A, B 相交；若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A, B 不相交.

显然，$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$, $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

例 1 证明：$A\cup B$ 是以 A, B 为子集的最小的集(这里，"最小"的含义是：若集 C 以 A, B 为子集，则 $A\cup B\subseteq C$.).

证 设 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$.

若 $x\in A$，则由 $A\subseteq C$ 得 $x\in C$；若 $x\in B$，则由 $B\subseteq C$ 得 $x\in C$. 不管哪种情况都有 $x\in C$. 因此 $A\cup B\subseteq C$. ▮

类似地可以证明：若 $C\subseteq A$, $C\subseteq B$，则 $A\cap B\supseteq C$. 即 $A\cap B$ 是 A 与 B 的最大的公共子集.

---

① 等号上加了"d"表示这是个定义式，左端是有关概念的记号，右端是有关概念的定义. 当等式前已指明是"定义"、"设"时，不再加"d".

上面对两个集定义的并、交运算可以毫不困难地推广到有穷个集的情形. 以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$, 于是

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \overset{d}{=\!=} \{x: x\in A_1 \text{ 或 } A_2 \text{ 或} \cdots A_n\} = \{x: \text{存在 } i\in\{1,2,\cdots,n\} \text{ 使 } x\in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \overset{d}{=\!=} \{x: \text{对所有 } i\in\{1,2,\cdots,n\} \text{ 有 } x\in A_i\}.$$

集的并与交有下列运算性质.

定理 1.1 设 A,B,C 是任意集. 成立着:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A.$

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$

(4) 等幂律(重复律) $A\cup A=A,\ A\cap A=A.$

(5) 吸收律 1° $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing;$

2° $A\cup I=I,\ A\cap I=A$, 其中 $A\subseteq I$;

3° $A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A.$

证 以分配律第一式为例.

设 $x\in A\cup(B\cap C)$, 则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$.

若 $x\in A$, 则 $x\in A\cup B$, $x\in A\cup C$, 故 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

若 $x\in B\cap C$, 则 $x\in B$ 且 $x\in C$. 因此 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$, 故 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

因此 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 类似地证明 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$, 从而分配律第一式得证. ▌

给定集 A,B. 所谓 A **关于** B 的补集, 记为 $B-A$, 是指

$$B-A \stackrel{d}{=} \{x: x\in B \text{ 且 } x\notin A\}.$$

$B-A$ 也叫作 B 与 A 的差集. 当 B 是全集时，$B-A$ 简单地记为 A^c 或 $\mathscr{C}A$，并简称为 A 的补集. 显然 $A-\varnothing=A$，$A-A=\varnothing$.

定理 1.2 设 A, B, C 是集. 成立着

(1) $A\cap(B-A)=\varnothing$，$A\cup(B-A)=A\cup B$.

(2) (德·莫干法则) $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$，

$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B).$$

(3) $C-(C-A)=A\cap C$.

定理 1.3 设 A，B，C 是集，$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，则 $A\cup B\subseteq C$，$A\cap B\subseteq C$，$C-A\subseteq C$. 因此对任意集 C，它的所有子集形成的集(叫作 C 的幂集)对于并，交，差三种运算是封闭的.

图 1-1 的阴影部分显示了两个集的并集、交集、差集、补集. 这种图叫作欧拉图或文氏图，用它很容易验证定理 1.1 与定理 1.2 所示的性质及集运算的其它一些性质.

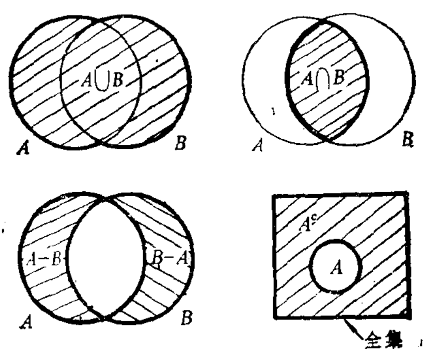

图 1-1

1.4 序对与积集

我们已经知道，直角坐标平面上点的坐标 (x, y) 中的 x, y 是不能改变次序的. 象这样的一对有次序的元素就叫作序对. 它有这样

的性质:

$$(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow a=c,\ b=d.$$

设 A,B 是两个集,集

$$A\times B\xlongequal{d}\{(a,b):a\in A,\ b\in B\}$$

叫作 A 与 B 的笛卡儿积集,简称为积集.

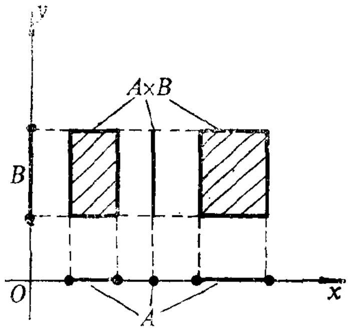

图 1-2

图 1-2 是 $A\times B$ 的图示. 作法是: 取平面直角坐标系, 把集 A、集 B 依次标在 x 轴、y 轴上,过 A、B 中每一点分别作 x 轴、y 轴的垂线,所得的交点便是 $A\times B$ 的元素,所有交点之集就是 $A\times B$.

例 2 设 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,1\}$, 则 $A\times B=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$. ▮

当 $A=B$ 时常把 $A\times A$ 记为 A^2. 例如 $A=B=[0,1]$ 时, $[0,1]^2$ 就表示平面上以 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ 为顶点的正方形,而 $\mathbf{R}^2$ 就表示整个平面.

下面的性质是容易证明的:

$$A\times B=\varnothing\Longleftrightarrow A=\varnothing\text{或 }B=\varnothing.$$

1.5 否定

下面是数学中常用的几个逻辑连接词及其符号:

或	用 $\vee$ 表示
和,与,且	用 $\wedge$ 表示
若…则…,蕴含	用 $\Rightarrow$ 表示
必要充分,当且仅当,等价	用 $\Longleftrightarrow$ 表示
否定,非	我们用 $\urcorner$ 表示.

现在我们要简单地讨论一下"否定"的用法, 这对以后正确地使用反证法是十分必要的.

设 P, Q 是两个陈述(性质). 在用反证法证明 $P\Longrightarrow Q$ 时,一般格式是 $\neg Q\Longrightarrow \neg P$.

P 与 $\neg P$ 是互相排斥的,即 P 成立$\Longleftrightarrow \neg P$ 不成立.

在具体进行否定时, 困难常常出现在对这些陈述中出现的某些词汇如何进行否定.

(一) "和"与"或". 对此,有

否定法则 1 否定由"和"、"或"连接的几个成分组成的陈述时,把"和"改成"或",把"或"改成"和",并把各个成分否定. 用符号表示,就是

$$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q,\ \neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q.$$

它也叫作德·莫干法则.

例 3 P: $a\leqslant x$, $\quad Q$: $x\leqslant b$,

$$P\wedge Q:\ a\leqslant x\leqslant b,$$

$$\neg(P\wedge Q):\ x<a \text{ 或 } x>b.$$

它正是 $\neg P\vee\neg Q$. 事实上,$P\wedge Q$ 是说"$a\leqslant x$"和"$x\leqslant b$"同时成立,因此$\neg(P\wedge Q)$应是"$a\leqslant x$"和"$x\leqslant b$"不同时成立, 即"$a\leqslant x$ 不成立"或"$x\leqslant b$ 不成立",即 $a>x\vee x>b$. ∎

(二) "所有"与"存在".

这两个词叫量词, 分别以 $\forall$(读作"对所有")与 $\exists$ (读作"存在","对某个","至少有一个")表示. 量词只有这两个. 以后我们也以 $\exists_1$ 表示"存在唯一的…".

例 4 P: 教室里所有人的身高在 1.5米与 2 米之间.

$\neg P$: 教室里有人的身高不到 1.5 米或超过 2 米.

若以 A 表示教室里所有人的身高之集,则 P 与 $\neg P$ 可以表示成

$$P:\ (\forall a,\ a\in A):\ 1.5\leqslant a\leqslant 2.$$

$$\neg P:\ (\exists a,\ a\in A):\ a<1.5 \text{ 或 } a>2.\ ∎$$

说明：1° P有两个基本成分：

$$“\forall a, a\in A”, “1.5\leqslant a\leqslant 2”.$$

对它们分别否定，得到$\neg P$的两个基本成分

$$“\exists a, a\in A”, “a<1.5 \text{ 或 } a>2”.$$

2° 否定“$\forall a, a\in A$”不能得到“$\exists a,\ a\notin A$”. 这是因为，一方面，“$a\in A$”说明所讨论的对象的范围是A，要否定P，仍应在A的范围内进行，如果在教室外找个身高不到1.5米或超过2米的人来，不能否定P；另一方面，如果否定“$\forall a$: $a\in A$”得到“$\exists a,\ a\notin A$”，则将得到

$$Q: \exists a, a\notin A: a<1.5 \text{或 } a>2,$$

即：有不是教室里的人的身高不到1.5米或超过2米. 如果P真，$\neg P$应该假，而现在Q也可以真，所以Q不是$\neg P$.

3° P与$\neg P$分别有

$(\forall a, a \text{ 满足 } S): T(a)$, $(\exists a,\ a \text{ 满足 } S): \neg T(a)$

的形式，$T(a)$叫作量词的作用范围（或辖域，在例4中是“$1.5\leqslant a\leqslant 2$”）. 类似地，如果$P$有“$(\exists a, a \text{ 满足 } S): T(a)$”的形式，则$\neg P$有“$(\forall a, a \text{ 满足 } S): \neg T(a)$”的形式.

否定法则2 设P是包含量词“存在”、“所有”的陈述，则$\neg P$可以从P把“存在”改“所有”、把“所有”改“存在”、并把它们的作用范围否定而得到.

例5 P：集A是集B的子集. 即

$$(\forall a, a\in A): a\in B.$$

$$\neg P: (\exists a, a\in A): a\notin B. \text{即}$$

集A不是集B的子集.

例6 P：存在正数M，使对所有$x\in A$有$|x|\leqslant M$. 即

$$(\exists M, M>0)(\forall x, x\in A): |x|\leqslant M.$$

$$\neg P: (\forall M, M>0)(\exists x, x\in A): |x|>M.$$

即：对所有的正数 M，存在 $x\in A$，使 $|x|>M$. ▌

例 6 中的 P 有三个基本成分，其中“$|x|\leqslant M$”中既有 x，又有 M，所以它既是“$\exists$”的作用范围，又是“$\forall$”的作用范围. 前两个成分 $(\exists M, M>0)$ 与 $(\forall x, x\in A)$ 说明了 M 与 x 的范围：M 是正数，x 是 A 的元素.

为简单起见，今后我们将按语言习惯把“$\exists M$, $M>0$”等直接写成“$\exists M>0$”等. 这样，例 6 的 P 就写成

$\exists M>0, \forall x\in A$: $|x|\leqslant M$.

在语言叙述中，为了行文方便，“所有”也以“全体”，“任意”，“任何”等代用. 在不致产生误解的情况下，也以“任一”代用. 特别是在要证明某集的“所有”元素具有某性质 P 时，通常不可能对一个个元素具体验证，我们就证明“任一”元素具有性质 P.

为了正确地进行否定，还要特别注意语言叙述中省去的量词.

例 7 P：a 是数列 $\langle a_n\rangle$ 的极限. 即

Q：任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使 $n>N$ 时

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

即 $$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: |a_n-a|<\varepsilon.$$

$$\neg Q: \exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\,\exists n>N: |a_n-a|\geqslant\varepsilon.$$

即 存在 $\varepsilon>0$，对任意正整数 N，总有 $n>N$ 使

$$|a_n-a|\geqslant\varepsilon.$$

$\neg P$：a 不是数列 $\langle a_n\rangle$ 的极限. ▌

对 Q 的语言叙述中，省去了“所有”n. Q 的形式写法中，我们已确认 n 是正整数，所以把“$\forall n\in\mathbb{N}, n>N$”简写为“$\forall n>N$”.

例 8 P：数列 $\langle a_n\rangle$ 存在极限.

Q: $\exists a\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N$: $|a_n-a|<\varepsilon$.

$\neg Q$: $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N$: $|a_n-a|\geqslant\varepsilon$.

$\neg P$：数列 $\langle a_n\rangle$ 不存在极限. ▌

注意上面两个例中 P 的不同含义.

练　习　1

1. 证明 n 元集有 2^n 个子集.

2. 下面的说法正确吗? 说明理由.

(1) $\{0\}$ 是空集. (2) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

(3) $\{\varnothing\}$ 是空集. (4) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

3. 证明 $A\subseteq B$, $A\cup B=B$, $A\cap B=A$, $B^c\subseteq A^c$, $A-B=\varnothing$ 等价.

4. 对下列各对集, 求 $A-B$ 与 $B-A$.

(1) $A=\{1,3,5,7,8\}$, $B=\{2,4,6,8\}$.

(2) $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$, $a,b\in\mathbf{N}$.

(3) $A=\{$平行四边形$\}$, $B=\{$两条对角线互相垂直的四边形$\}$.

5. 证明:

(1) $A-B=A\cap B^c$;

(2) $B\subseteq A^c\Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

(3) $B\supseteq A^c\Longleftrightarrow A\cup B=I$ (I 是全集);

(4) $A=B\Longleftrightarrow(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)=\varnothing$;

(5) $A=B\Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

6. 证明 $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^c$.

7. 证明: (1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

8. 否定下述命题: (1) x 是不大于 20 的偶数; (2) 四边相等的四边形是菱形; (3) 三角形的内角必有一个 $\geqslant 60°$; (4) 若 $a^2+b^2=c^2$, a,b,c 是正整数, 则 a,b,c 至少有一个是 3 的倍数; (5) 对任意 x 存在 y 使 $x+y>0$.

9. 下列说法正确吗?

(1) $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A\vee x\notin B$.

(2) $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$.

(3) $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\notin A\vee x\notin B$.

(4) $x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$.

10. 把下列用符号表示的陈述用语言叙述并给出它的否定.