

# 世界著名 科学家传记

数学家 IV

吴文俊 主编

科学出版社

K816.1  
52  
2:3(4)

BC98107

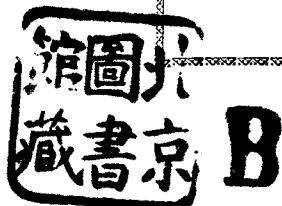
世界著名科学家传记  
数 学 家

IV

吴文俊 主编

科学出版社

1992



912032

## 内 容 简 介

《世界著名科学家传记·数学家》分六集出版，收入世界著名数学家的传记 100 余篇。本集(第四集)收入 5 世纪到 19 世纪的著名数学家如阿耶波多、卡西、韦达、卡瓦列里、格拉斯曼等人的传记 32 篇。作者在深入研究的基础上，对这些科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、准确的记述，并指明参考文献，即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的材料。读者不仅可以从中了解到这些第一流科学家的杰出成就和对科学发展的重大影响，而且还可以看到他们的成长道路、成功经验和思想品格，从而受到深刻的启迪。

14

## 世界著名科学家传记

数 学 家

IV

吴文俊 主编

责任编辑 孔国平

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32  
1992 年 12 月第一次印刷 印张：7 7/8

印数：1—2 000 字数：202 000

ISBN 7-03-002985-2/Z · 179

定价：8.20 元

# **《科学家传记大辞典》**

## **数学学科编委会**

**主 编 吴文俊**

**副主编 梁宗巨 李文林 邓东皋**

**编 委 孙小礼 沈永欢 周民强 张奠宙  
袁向东**

## 前　　言

在中国科学院的领导下，科学出版社正在组织我国专家编纂一部大型的科学家传记辞典，计划收入古今中外重要科学家（包括数学家、物理学家、天文学家、化学家、生物学家、医学家、地理学家、以及技术科学家即发明家和工程师等）的传记约 8000 篇，字数估计为 2000 万。辞典将对所收科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、简洁、准确的记述，并附文献目录；即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的资料，特别是那些第一流科学家的最深入的研究工作和成功经验。其中将以足够的篇幅介绍我国古代和现代科学家的重大成就，以及他们为发展祖国的科学事业，不惧险阻，勇攀高峰的精神，以激励青年一代奋发图强，献身“四化”。这就是编纂这部《科学家传记大辞典》的基本目的。

大辞典总编委会由各科学领域的 60 余位著名学者组成，卢嘉锡同志担任主编，严东生、周光召、吴文俊、王绶琯、涂光炽、吴阶平、苏世生等同志担任副主编。1988 年 8 月，在北京召开了总编委会第一次会议，讨论了大辞典的编纂方针，制定了“编写条例”。各学科的编委会也已相继成立。在总编委会和各学科编委会的领导和组织下，编纂工作已全面展开。科学出版社设立了《科学家传记大辞典》编辑组，负责大辞典的编辑组织工作。

对于外国科学家，各学科编委会已分别确定第一批撰稿的最重要的科学家名单，共约 800 人，并已约请有关专家分头执笔撰稿。在大辞典出版之前，按不同学科，定稿每达 20—30 篇，就以《世界著名科学家传记》文集的形式及时发表。这些传记是在进行深入研究的基础上撰写的，又经过比较严格的审核，因而已具有较高的学术水平和参考价值。发表后广泛听取意见，以便将来收入

• i •

大辞典时进行必要的修改。

由于这部大辞典是我国编辑的，因而中国科学家辞条占重要地位，将下功夫认真撰写。关于中国古代（19世纪以前）科学家的传记，计划收入200余篇，已委托中国科学院自然科学史研究所的专家组织撰写；中国现代科学家的传记，计划收入500余篇，正在由各学科编委会组织撰写。

编纂这部《科学家传记大辞典》，是我国科学文化方面的一项具有重大意义的基本建设；国家新闻出版署已将其列入国家重点辞书规划。这项工作得到了我国学术界的广泛支持。已有许多学者、专家热情地参加工作。他们认为，我国学术界对于科学史研究的兴趣正在与日俱增，只要充分调动中国科学院、各高等院校、各学术团体的力量，认真进行组织，花费若干年的时间，是完全可以编好这部辞典的。他们还认为，组织编写这部辞典，对于科学史的学术研究也是一个极大的促进。在编写过程中，对于尚未掌握的材料，还不清楚的问题，必须进行深入的研究，以任务促科研，有了成果，自然容易写出好文章。

编纂这样一部大型的辞典，涉及面广，要求质量高，工作量很大。这里，我们热切地希望有更多的、热心这项事业的学者、专家参加工作，承担撰稿和审稿任务。

我们热烈欢迎广大读者对我们的工作提出宝贵意见。

《科学家传记大辞典》编辑组

## 目 录

博伊西斯	王青建	( 1 )
阿耶波多	陈一心	( 6 )
瓦拉哈米希拉	孙 康	( 12 )
婆罗摩笈多	陈一心	( 16 )
花拉子米	杜瑞芝	( 21 )
马哈维拉	陈一心	( 33 )
巴塔尼	王青建	( 39 )
艾布瓦法	孙宏安	( 44 )
比鲁尼	孙宏安	( 54 )
奥马海亚姆	梁宗巨	( 61 )
婆什迦罗	陈一心	( 72 )
斐波那契	欧阳绛	( 80 )
纳西尔丁	王青建	( 89 )
奥雷姆	梁宗巨	( 96 )
卡西	梁宗巨	( 103 )
雷格蒙塔努斯	邵明湖	( 113 )
许凯	景 丽	( 120 )
帕乔利	王青建	( 126 )
塔尔塔利亚	王青建	( 132 )
卡尔达诺	王青建	( 138 )
邦贝利	王青建	( 146 )
韦达	王青建	( 150 )
斯蒂文	邵明湖	( 159 )
纳皮尔	欧阳绛	( 167 )
德扎格	赵林峰	( 174 )

卡瓦列里	孙宏安 (185)
达朗贝尔	易照华 (198)
泊松	老亮 (208)
庞斯列	周耀珊 (213)
格林	李文林 (218)
波尔约	蒋中池 (226)
格拉斯曼	陈竹如 (235)

# 博伊西斯

王青建

(辽宁师范大学)

博伊西斯, A. M. S. (Boethius, Anicius Manlius Severinus) 约公元 475 或 480 年生于意大利罗马; 约公元 524 或 525 年卒于意大利帕维亚 (Pavia) 附近。逻辑学、数学、音乐、哲学、神学。

博伊西斯出身于古罗马贵族世家。祖父当过地方行政长官。父亲曼柳斯 (Manlius Boethius) 曾任古罗马执政官。博伊西斯年轻丧父, 受到罗马显贵西马丘斯 (Symmachus) 的保护和资助。后来娶西马丘斯的女儿鲁斯蒂恰娜 (Rusticana) 为妻。有关博伊西斯的生平文献很少, 根据史料推断, 他本人早年可能在亚历山大大学习, 也可能去过雅典, 受到正统的希腊文化教育, 有渊博的学识。约在公元 510 年任东哥特 (Gothic) 王国执政官, 逐渐成为国王宠臣。约于 520 年当上首席执政官, 掌管元老院的部分事务。他的两个儿子不久也当上了执政官。据可靠史料记载, 他在公元 522 年遭监禁。当时罗马政治家阿尔比纳斯 (Albinus, ?—约公元 524 年) 犯有背叛国王罪, 博伊西斯为他在元老院做辩护演说, 被西奥多里克 (Theodoric) 国王指控为谋反罪, 在帕维亚被捕入狱, 囚于附近一城堡中。两年后与阿尔比纳斯等人一起被处决。

博伊西斯主要以政治家和哲学家留名青史。在政治上他有过辉煌时期, 死后被认为是殉道者。在哲学上他最早将亚里士多德

(Aristotle)《工具论》(Organon)中的《范畴篇》(Categories)和《解释篇》(De interpretatione)等著作译为拉丁文传到西欧，还对其中一些著作做了注释，并声称要翻译并注释所有能找到的亚里士多德和柏拉图(Plato)两人的著作。他将哲学分为思辩哲学和实践哲学两部分：思辩哲学包括自然哲学、数学和神学；实践哲学包括伦理学、政治学和经济学。他提出的“共相”是否真实存在的问题，成为经院哲学唯名论与实在论争论的焦点。其代表作有在狱中写就的5卷本《哲学的安慰》(De Consolatione Philosophiae, 公元523—524年)和对希腊学者波菲利(Porphyry, 约公元234—约305年)的哲学著作《导论》(Isagoge)所作的注释(约公元507年)。这些论著充分反映了他的宗教思想与道德哲学观点，被译为多种文字广泛流传。他的哲学是古希腊罗马哲学到中世纪经院哲学的过渡，在西方哲学史上占有重要地位。

博伊西斯的数学著作主要有《算术入门》二卷(De institutione arithmeticā)和《几何学》(Geometria)，写作年代不详。现存有流传于中世纪的一些版本，例如在巴塞尔(Basel)出版的博伊西斯《全集》(Opera Omnia, 1493)。《算术入门》包括算术的基本概念和术语，乘法表，比例，素数与合数等方面的知识等，基本取材于希腊数学家尼科马霍斯(Nicomachus of Gerase)的同类著作《算术入门》(Introductionis Arithmeticæ)，但删掉了许多在当时较新颖的命题和证明，其目的是为教会学校学习算术知识提供一个初级手册。《几何学》主要取材于欧几里得(Euclid)《几何原本》前几卷的内容，同样删掉了许多必要的证明，成为一本非常浅显易读的几何课本。由于博伊西斯被教会认为是殉道者，因此这两本书在中世纪被定为教会学校的经典教本，流传近千年。这种情形反映出中世纪数学相对于希腊数学繁荣时的萧条。希腊文化通过罗马人传到中世纪的很少，其中大部分体现在博伊西斯的著述中。

博伊西斯除传播希腊数学外，也做出自己的一些贡献，主要是在《几何学》中记载了一种罗马算盘的构造及其用法。这种算盘不

同于已出土的罗马算盘实物，它不用卵石小珠球一类的东西做算盘子，而是用一种类似于锥体的小圆台（apices）当算子。它的顶部分别标有 1—9 的数码字，以表示各自代表的值。使用时放入算盘的不同档中，表示该档应有的算子数目。博伊西斯书中算子上描绘的数字引起数学史家的兴趣，因为它们的形状与后来出现于西阿拉伯的印度数码非常相像。人们推测，在公元 2 世纪左右，亚历山大的数学家就直接或间接地从印度获得了印度数码，后来将其传入西阿拉伯。由于博伊西斯的手稿已散失，现在见到的原著都是后人重新刊刻的，因此不能确定这些数码的形状是否是他本人采用过的。但他的著作对印度-阿拉伯数码的传播确实起了一定的作用。此外，博伊西斯还在书中阐述了计算所依据的 10 进位制的数系。该数系中的数分为三类：第一类是 1—9 这 9 个数，称之为“手指数”（*digiti*，意思是用手指可以表示的数）；第二类数指 10 的倍数，如 10, 20, 700, 850 等，称为“关节数”（*articuli*，指手指关节可以表示的数）；第三类数是由前两类数构成的自然数，如 23, 857 等，称为“联合数”（*numeri compositi*）。这是古罗马记数法的一种改良形式，由简单罗列个别数码符号向位值制记数法迈进了一步。博伊西斯除给出数字的形状描述外，还给出了数字的乘除法则。由于他的著作在中世纪广泛流传，以致于后人曾错误地认为他们使用的 10 进位值制数码（印度-阿拉伯数码的早期形式）及其算法是博伊西斯的发明。G. 赖施（Reisch）在 1503 年出版的《哲学珍宝》（*Margarita philosophica*）一书中给出一幅插图，画的是一位算盘家和一位算法家在进行计算的情形。其中使用算子计数板的人作为毕达哥拉斯（Pythagoras）的化身，而另一位使用印度-阿拉伯数码进行笔算的人则是博伊西斯的化身。他们被认为是其使用工具的发明者。这幅插图后来出现在许多数学史专著中。

博伊西斯在他的著作中较早地使用了大量拉丁文数学词汇，例如加、减、乘、线、面、三角形、角、分、秒、素数、比例、相等、和数等等，使古希腊的学术用语得以保存。他给出几个物体每次取两个

的组合数法则,得到  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  的结果。他还对毕达哥拉斯学派的“形数”、正星多边形等问题做了阐述。

博伊西斯在《算术入门》的引论中提出一个计划,说要为算术、音乐、几何、天文四门学科各写一本手册。他认为这些都是数学的学科,称之为“四道”(quadrivium, 四条道路)。在中世纪的大学里,这四门学科被列为高级学科,统一用博伊西斯确立的名称“四道”表示。除《算术入门》和《几何学》外,他还写了一本《音乐入门》(De institutione musica),用数学语言表述音乐的一些基本原理及术语。他以数关系为标准划分出三种音乐:宇宙的音乐、人类自然音乐和某些乐器的音乐,并指出最后一种音乐才是我们唯一能听到的音乐,但只是音乐的一种。这为解答音乐是什么和将音乐作为一门科学进行研究提供了参考。博伊西斯是否写过一本天文学手册是有疑问的,目前还没有发现保存下来的文献,可能他的计划没能全部实现。

博伊西斯在逻辑学上也有建树,他创造了大量拉丁文逻辑术语,确定了属加种差的定义和发生定义,并试用了一些逻辑符号。他发展了命题逻辑,将假言命题分为简单的和复合的,提出了 10 个假言三段式(A 则 B, A, 所以, B; A 则 B, 非 B, 所以, 非 A, 等等)。其逻辑著作对中世纪教士的训练起了支配作用。

作为古罗马学者,他的神学论著亦有一定影响。他除讨论了“三位一体”涉及的教义学说外,还对“自然”的各种含义做了详细论述,其《哲学的安慰》集中表达了他以认识神为获得至善境界,以哲学沉思为莫大安慰的思想。

近现代有关博伊西斯的研究打破了盛赞的传统,对他的论著内容、影响乃至真伪以及他个人的经历提出许多质疑,指出其知识陈旧,内容缺乏创造性等不足。不过人们还是一致肯定了他在中世纪文化中所产生的巨大影响。博伊西斯的众多著作为传播希腊罗马文化,为普及百科知识,在长达千年的历史上起了重要作用。

## 文 献

### 原始文献

- [1] A. M. S. Boethius, *De institutione arithmeticā, De institutione musica, Geometria*, G. Friedlein, ed., Leipzig, 1867.

### 研究文献

- [2] H. M. Barrett, Boethius, some aspects of his times and works, Cambridge, 1940.
- [3] H. R. Patch, The tradition of Boethius: A study of his importance in medieval culture, New York Oxford, 1935.
- [4] L. Minio-Paluello, Boethius, Anicius Manlius Severinus, 见 *Dictionary of Scientific biography*, Vol. 2, 1973, pp. 228—236.
- [5] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3rd ed., I, Leipzig, 1907, pp. 573—585.
- [6] F. T. Koppen, Notiz über die Zahlwörter im Abacus des Boethius, *Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersburg*, 35(1892), pp. 31—48.
- [7] L. M. De Rijk, On the chronology of Boethius's works on logic, *Vivarium*, 2(1964), pp. 1—49, 125—162.
- [8] A. N. Prior, The logic of negative terms in Boethius, *Franciscan Studies*, 13 (1953), pp. 1—6.
- [9] M. Folkerts, Boethius Geometrie II: Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters, Göttingen, 1967.
- [10] L. C. Karpinski, The history of arithmetic, Rand McNally, 1925.

# 阿 耶 波 多

陈 一 心

(湖南科学技术出版社)

阿耶波多 ( $\bar{A}ryabhata$  I) 公元 476 年生于印度拘苏摩补罗 (Kusumapura); 卒年不详。数学、天文学。

阿耶波多是迄今所知最早的印度数学家。他的出生地拘苏摩补罗距现今的巴特拉不远。巴特拉在当时叫华氏城 (Pātaliputra)，是一座有名的古城。释迦牟尼晚年曾行教至此。华氏城先后是孔雀王朝、笈多王朝的都城。公元 5 世纪初，即阿耶波多出生前近一个世纪，中国的高僧法显曾在该城的佛教寺院里从事学术活动。

阿耶波多在华氏城和拘苏摩补罗著书立说，属于拘苏摩补罗学派。他的主要著作有两本：一本是《阿耶波多历书》 ( $\bar{A}ryabha\tilde{t}īya$ )，成书于公元 499 年，另一本天算书已经失传。《阿耶波多历书》包括“天文表集” (Daśagītikā)、“算术” (Ganitapāda)、“时间的度量” (Kālakriyāpāda)、“球” (Golapāda) 等部分。该书于公元 800 年左右被译成拉丁文，有较大的影响。《阿耶波多历书》曾被多次评注，特别是在南印度，许多学者对该书进行过深入的研究。

阿耶波多对数学作出了多方面的贡献。其中  $\pi$  值、正弦表和一次不定方程的解法是他的最有代表性的成果。

在数学史上， $\pi$  值即圆周率的计算占有重要的地位。在某种程度上，它反映一个国家数学发展的水平。中国魏晋时期，刘徽运用“割圆术”求得  $3.14 + \frac{64}{625} < \pi < 3.14 + \frac{169}{625}$ 。按照《九章算术》

方田章后面的注文,  $\pi = \frac{3927}{1250}$ , 即 3.1416。但这一注文是否为刘

徽所加, 尚无定论。南北朝时, 祖冲之求得  $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ , 并得出两个重要的近似值: 约率  $\frac{22}{7}$ , 密率  $\frac{355}{113}$ 。约率

$\frac{22}{7}$  早已为希腊数学家阿基米德 (Archimedes) 所知, 他利用圆的外切与内接正 96 边形, 曾算得  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ 。除中国以外, 关于

$\pi$  值为 3.1416 的记载, 也见于阿耶波多的著作中。阿耶波多指出: “100 加 4 再乘 8, 再加 62000, 就得到直径是 20000 的圆周长近似值”。即  $\pi = \frac{104 \times 8 + 62000}{20000} = 3.1416$ 。这个  $\pi$  值为后来的

许多印度数学家所采用, 婆什迦罗 (Bhāskara II) 更把它写成  $\frac{3927}{1250}$ 。它究竟是阿耶波多自己独立地用几何方法求得的, 还是与

中国的  $\pi = \frac{3927}{1250}$  有某种师承关系, 尚待进一步研究。

在三角学方面, 阿耶波多以他制作的正弦表而闻名于世。希腊人托勒密 (Ptolemy) 早就制作过从  $0^\circ$  到  $90^\circ$  每隔半度的弦表, 他把圆周分为 360 等份, 每等份继续分为 60 小等份, 另把半径分为 60 等份, 对一给定圆弧, 求对应弦用半径的  $\frac{1}{60}$  为长度单位来表示的长度。印度已失传的天文学著作《苏利耶历书》(Sūrya Siddhānta) 中据说也载有正弦表, 阿耶波多的正弦表很可能是在此表的基础上改进而成的。在制作过程中, 他大概用了几何技巧和近似运算等数学知识。阿耶波多正弦表包含从  $0^\circ$  到  $90^\circ$  每隔  $3^\circ 45'$  的正弦值, 它比较过去希腊人的弦表, 有两点明显的区别: 其一, 把圆周分为 360 等份, 每份继续分为 60 小等份, 半径  $r$  也同圆周一样度量。于是, 从圆周长  $= 360 \times 60 = 21600$  分及圆周长  $= 2\pi r$ , 得半径  $r = 3437.746$ 。略去小数部分, 取近似值得  $r = 3438$ 。不再像希腊人那样, 把圆周分为 360 份, 而把半径另分为 60 份。阿耶波多默认曲线和直线可用同一单位度量, 这无疑是一大

进步。按照这种统一的度量法，即有  $\sin 7^{\circ} 20' = 449$ ,  $\sin 30^{\circ} = 1719$ , 等等。其二，阿耶波多是计算半弦(相当于现在的正弦线)而不是全弦的长，这也是与希腊人不同的。阿耶波多称半弦为 *jīva*，该词原意为猎人的弓弦。阿拉伯人将它译成 *dschība*。后来又误成形状相似的 *dschaib*，这个词的原意为胸膛、海湾或凹处。12世纪时，它被蒂沃利(意大利中部，罗马之东)地方的柏拉图 (Plato of Tivoli) 意译成拉丁文 *sinus*，“正弦”一词即来源于此。

不定方程可以说是阿耶波多贡献最大的一个领域。他提出：如何决定一个整数  $N$ ，使  $N$  除以整数  $a$  余  $r_1$ ，除以整数  $b$  余  $r_2$ ，即  $N = ax + r_1 = by + r_2$ ，或  $by - ax = c$ ，其中  $c = r_1 - r_2$ 。通过研究这类问题，阿耶波多建立了求一次线性不定方程  $by - ax = c$  ( $a, b, c$  都是整数) 的正整数通解的法则，并将此法则推广到解一次联立不定方程组。这项工作是走在当时世界前列的。阿耶波多的法则实际上就是辗转相除法。印度人称求解一次不定方程为库塔卡 (Kuttaka)，意思为碾细。阿耶波多开库塔卡的先河。按照他的学生婆什迦罗 (Bhāskara I) 等人的解释，用现代数学语言表达，对  $by - ax = c$  (I)，不妨设  $a, b$  互质。阿耶波多的解法如下：

作辗转除法，可得到一系列的商和余数：

$$q, q_1, q_2, q_3, \dots, q_m, \quad r_1, r_2, r_3, \dots, r_{m+1}.$$

$$\text{其中, } a = bq + r_1,$$

$$b = r_1 q_1 + r_2,$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3,$$

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4,$$

.....

$$r_{m-2} = r_{m-1} q_{m-1} + r_m,$$

$$r_{m-1} = r_m q_m + r_{m+1}.$$

以  $a = bq + r_1$  代入方程 (I) 中，可得

$$by = (bq + r_1)x + c.$$

$$\text{故 } y = qx + y_1, \quad by_1 = r_1x + c. \quad (\text{I.1})$$

将  $b = r_1q_1 + r_2$  代入 (I.1) 中, 得

$$x = q_2y_1 + x_1, \quad r_1x_1 = r_2y_1 - c. \quad (\text{I.2})$$

按上法运算下去, 并把所得的式子排成两栏, 有

(1) $y = qx + y_1,$	$by_1 = r_1x + c,$
(2) $x = q_1y + x_1,$	$r_1x_1 = r_2y_1 - c,$
(3) $y_1 = q_2x_1 + y_2,$	$r_2y_2 = r_3x_1 + c,$
(4) $x_1 = q_3y_2 + x_2,$	$r_3x_2 = r_4y_2 - c,$
(5) $y_2 = q_4x_2 + y_3,$	$r_4y_3 = r_5x_2 + c,$
(6) $x_2 = q_5y_3 + x_3,$	$r_5x_3 = r_6y_3 - c,$
.....	.....
(2n-1) $y_{n-1} = q_{2n-2}x_{n-1} + y_n,$	$r_{2n-2}y_n = r_{2n-1}x_{n-1} (1.2n-1) + c,$
(2n) $x_{n-1} = q_{2n-1}y_n + x_n,$	$r_{2n-1}x_n = r_{2n}y_n - c, \quad (1.2n)$
(2n+1) $y_n = q_{2n}x_n + y_{n+1},$	$r_{2n}y_{n+1} = r_{2n+1}x_n (1.2n+1) + c.$

互除可以进行到 0, 也可以进行到某一步为止。再分下列几种情况讨论:

(1) 假定互除进行到 0, 因为  $a, b$  互质, 倒数第二个余数是 1. 若序数是偶数, 则有  $r_{2n} = 1, r_{2n+1} = 0, q_{2n} = r_{2n-1}$ . 式 (I.2n) 和 (I.2n+1) 分别为  $y_n = q_{2n}x_n + c, y_{n+1} = c$ . 给  $x_n$  以任一整数值  $t$ , 可得  $y_n$  的一整数值。由 (2n), 又得到  $x_{n-1}$  的值, 一步步往回推, 最后可得到  $x, y$  的整数值; 若序数是奇数, 则可由式 (I.2n-1) 和 (I.2n) 等求解。

(2) 假定互除在某一步停止。若序数是偶数, 则有  $r_{2n}y_{n+1} = r_{2n+1}x_n + c$ , 或  $y_{n+1} = \frac{r_{2n+1}x_n + c}{r_{2n}}$ . 给  $x_n$  一个适当的整数值, 使  $y_{n+1}$  也为整数。由 (2n+1), 得  $y_n$  的整数值。一步步往回推, 可得  $x, y$  的整数值; 若序数是奇数, 则有  $r_{2n-1}x_n = r_{2n}y_n - c$ , 或  $x_n = \frac{r_{2n}y_n - c}{r_{2n} - 1}$ . 令  $y_n$  为一适当的整数, 使  $x_n$  也为整数。由 (2n), 得  $x_{n-1}$  的整数值。逆推可解出  $x, y$  的整数值。