线性代数与张量解析

盛 正 华 编 著

湖南科学技术出版社

线性代数与张量解析

盛 正 华 编 著

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

线性代数与张量解析

盛 正 华 编 著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1985年1月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：6.5　插页：1　字数：171,000

印数：1——12,200

统一书号：13204·107　　定价：1.30元

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矢量空间、线性变换、仿射正交张量、广义张量、黎曼空间与曲率张量等。这是为物理专业以及工科有关专业编写的一本教学用书和参考读物，初学者易于接受和掌握。

前　言

这是为物理专业和工科有关专业编写的一本教学用书。它包含线性代数与张量解析两部分。第一部分可作为教材，第二部分可作为选修课或专题讲座的参考资料。把线性代数与张量解析编在一起，有利于充分运用前者来阐述后者，但这是一种尝试。

由于讨论张量的需要，在线性代数中出现了本身不甚重要的内容，如倒逆基、行列式的微商和行列式的一般定义方式等。把线性代数部分作为教材时，可以略去这些，例如行列式的定义，完全可以从固定一个附标为自然排列说起。

初稿曾送请大连大学陈方培、中国科技大学张永德、兰州大学马元鹏、天津大学沈继芬、国防科技大学沙钰、常德师专徐行、湖南师院王瑞旦、中南矿冶学院吾用仪等诸位先生审阅，获得许多宝贵意见；特别是张永德先生过细审稿，全面校订，对编者帮助很大。定稿时，承马元鹏、徐行、沙钰、王瑞旦、夏泽苗、利广才、彭如海、曾岳生、邹福元、刘恒、蔡永裕等老师参加审稿。交稿前又承湖南师院沈清火老师热情提出建议，提供资料。对上列同志的支援与帮助，表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中错误在所不免，诚望教师和读者指正。

编　　者　一九八四年七月

目　录

第一章 行 列 式

本章依次介绍行列式的定义、主要性质、相乘法则以及按一行或一列展开的方法。

§1—1 行列式及其主要性质

中学教材里讲过二阶的和三阶的行列式以及计算这些行列式的方法。二阶行列式是由四个数或四个函数排列而成的具有两行两列的数学符号，它代表两项乘积的代数和，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.^{*} \tag{1.1}$$

三阶行列式由九个数或九个函数排列而成，它代表六项乘积的代数和，如

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

习惯上称横排叫行，竖排叫列。行或列的数目叫做行列式的阶数。所排列的每一个数或函数叫做行列式的元素。上列等式的右边叫做行列式的展开式。

从上列两个简单的行列式就能找出如下的规律：

1° 展开式的每一项是每行取一个元素的乘积，而这些元素又分居在不同的列；所有既位于不同的行又位于不同的列的元素的乘积都要在展开式中出现。写出所有这些乘积的方法是，把因

---

* 在行列式和下章所讲的矩阵的一般表示式中，元素带有两个下标，第一个表示元素所在行的序数，第二个表示元素所在列的序数。

子的第一下标的排列固定下来，而使第二下标取一切可能的全排列。例如(1.2) 的展开式中，各项的因子的第一下标固定为排列1，2，3，而第二下标取一切可能的全排列：

1,2,3； 1,3,2； 2,3,1； 2,1,3； 3,1,2； 3,2,1。

如果把第一下标固定为排列2，1，3，第二下标取一切可能的全排列，将会得出如下的六个乘积：

$$a_{21}a_{12}a_{33},\ a_{21}a_{13}a_{32},\ a_{22}a_{11}a_{33},\ a_{22}a_{13}a_{31},$$
$$a_{23}a_{11}a_{32},\ a_{23}a_{12}a_{31}.$$

显然，这就是(1.2)中的六个乘积。

2° 在一个自然数的排列中，比较任何两个数，如果大的排在小的左边，就叫做存在一个反序。一个排列中存在的反序的总数叫做该排列的反序数。按自然顺序的排列1，2，3，…，n称为自然排列，它的反序数等于零。从上面所列六个乘积的第一下标的排列与第二下标的排列来看，

乘　积	第一下标排列的反序数s	第二下标排列的反序数t	$s+t$
$a_{21}a_{12}a_{33}$	1	0	奇数
$a_{21}a_{13}a_{32}$	1	1	偶数
$a_{22}a_{11}a_{33}$	1	1	偶数
$a_{22}a_{13}a_{31}$	1	2	奇数
$a_{23}a_{11}a_{32}$	1	2	奇数
$a_{23}a_{12}a_{31}$	1	3	偶数

$s+t$称为第一下标排列与第二下标排列的总反序数。根据总反序数为偶数或奇数在乘积前面加上正号或负号，便得到这些乘积的代数和

$$-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}$$
$$-a_{23}a_{11}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}.$$

这正好等于(1.2)中的展开式。

现在给出行列式的定义。

定义　由n^2个元素a_{ij}(i，$j=1$，2，3，…，n)排成n行n列，

在它的两边各画一条直线，并按下列等式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{t_1 t_2 \cdots t_n} (-1)^{s+t} a_{s_1 t_1} a_{s_2 t_2} \cdots a_{s_n t_n}. \tag{1.3}$$

其中 $\sum\limits_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ 表示乘积因子的第一下标的排列$s_1 s_2 \cdots s_n$固定，对它们的第二下标取一切可能的全排列求和。上式左边那个数学符号叫做n阶行列式，记为$|A|$或$\det|a_{ij}|$，或者简单地记为$|a_{ij}|$。

从行列式的定义看出，n阶行列式的展开式共有$n!$项。

在(1.3) 中，展开式各项是因子的第一下标的排列固定，第二下标取一切可能的全排列，实际上也可以将各项因子的第二下标的排列固定，第一下标取一切可能的全排列，即(1.3)也可以改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^{s+t} a_{s_1 t_1} a_{s_2 t_2} \cdots a_{s_n t_n} \tag{1.4}$$

为了证实这两个展开式相等，先介绍排列的对换。把一个排列的两个数互换位置，其余的数不动，就成为另一个排列。这样的变动称为一次对换。自然数构成的排列经过一次对换会改变其反序数的奇偶性。事实上，设有排列

$$\cdots i\ j_1\ j_2 \cdots j_s\ k \cdots$$

我们来对换i与k。先将k一位一位地向左移，每移一位，排列的反序数会改变一次奇偶性，当排列变成

$$\cdots k i j_1 j_2 \cdots j_s \cdots$$

时，排列的反序数的奇偶性改变了$(s+1)$次。然后将i一位一位地向右移，每移一位，排列的反序数也会改变一次奇偶性。当排列变成

$$\cdots k\ j_1 j_2 \cdots j_s\ i \cdots$$

时，排列的反序数的奇偶性又改变了s次。可见经过一次对换，排列的反序数的奇偶性会改变$(2s+1)$次，即改变了奇偶性。

现在回到(1.4)的证明上来。(1.3)的右边有$n!$项，(1.4)的右边也有$n!$项。设(1.3)右边各项的因子的第一下标排列确定为$s_1^0 s_2^0 \cdots s_n^0$。在(1.4)的右边，除了有一项，它的因子的第一下标排列为$s_1^0 s_2^0 \cdots s_n^0$以外，其余都不是；但是，我们可以对换这些项的因子，使因子的第一下标排列都成为$s_1^0 s_2^0 \cdots s_n^0$。每对换因子一次，第一下标排列的反序数s要改变奇偶性，同时第二下标排列的反序数t也要改变奇偶性，因而总反序数$s+t$的奇偶性不变。可见不管如何对换各项的因子，$(-1)^{s+t}$是不会改变的。当通过对换因子使(1.4)的展开式各项因子的第一下标排列都成为$s_1^0 s_2^0 \cdots s_n^0$以后，各项因子的第二下标就出现了一切可能的全排列。这样，(1.4)的右边就等值地变成了(1.3)的右边。

在一般讨论中，往往取各项因子的第一下标排列为标准排列，这样，(1.3)简化为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{t_1 t_2 \cdots t_n} (-1)^t a_{1t_1} a_{2t_2} \cdots a_{nt_n}. \tag{1.3}'$$

这就是将展开式中各项因子按行的顺序排列，而对于列则是一切可能的全排列；也可以取各项因子的第二下标排列为标准排列，这样，(1.4)简化为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^s a_{s_1 1} a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n}. \tag{1.4}'$$

这就是将展开式中各项因子按列的顺序排列，而对于行则是一切

可能的全排列。

例1 按(1.3)′和(1.4)′分别展开行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}.$$

解 按(1.3)′展开，

$$\begin{aligned}|A|&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32}\\&\quad+(-1)^1a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}\\&\quad+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}\\&=1\times4\times(-2)-1\times5\times(-1)-2\times6\times(-2)\\&\quad+2\times5\times0+3\times6\times(-1)-3\times4\times0=3.\end{aligned}$$

按(1.4)′展开，

$$\begin{aligned}|A|&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^1a_{11}a_{32}a_{23}\\&\quad+(-1)^1a_{21}a_{12}a_{33}+(-1)^2a_{21}a_{32}a_{13}\\&\quad+(-1)^2a_{31}a_{12}a_{23}+(-1)^3a_{31}a_{22}a_{13}\\&=1\times4\times(-2)-1\times(-1)\times5-6\times2\times(-2)\\&\quad+6\times(-1)\times3+0\times2\times5-0\times4\times3=3.\end{aligned}$$

行列式有如下几条主要性质，了解它们对于计算行列式和讨论许多有关问题是必要的。

性质1 如果行列式的某行或某列元素全是零，则行列式等于零。

这可由行列式的定义直接得出。

性质2 把行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

的行与列互换，而不改变它们原来的相关位置，便成为

$$|A|^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

这叫做行列式的转置. $|A|^T$称为$|A|$的转置行列式。显然，$|A|^T$的转置行列式就是$|A|$。

行列式的第二个性质是，行列式转置，其值不变，即

$$|A|^T=|A|. \tag{1.6}$$

事实上，当$|A|$和$|A|^T$的展开式中各项的因子按其所在行的顺序排列时，

$$|A|=\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^t a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n},$$

$$|A|^T=\sum_{s_1s_2\cdots s_n}(-1)^s a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn}.$$

前面已经证明，上列两式的右边是相等的。

这个性质表明，研究行列式的值时，就各行进行讨论与就各列进行讨论所得的结论是相同的。

性质 3　将行列式$|A|$的某一行(列)的所有元素乘以同一数λ，所得行列式之值等于$\lambda|A|$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

事实上，设左端的行列式为$|B|$，

$$|B|=\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^t a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots(\lambda a_{it_i})\cdots a_{nt_n}$$

$$=\lambda\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^t a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{it_i}\cdots a_{nt_n}=\lambda|A|.$$

根据这个性质，可将行列式中某行(列)所有元素的公因子提到行列式符号之外来相乘。

性质 4　行列式的任一行(列)与另一行(列)对换，所得行列式与原行列式符号相反，绝对值不变。

事实上，设原行列式

$$|A|=\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^t a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{ht_h}\cdots a_{kt_k}\cdots a_{nt_n}.$$

这里，各项因子的第一下标的排列

$$1\ 2\ 3\ \cdots\ h\ \cdots\ k\ \cdots\ n$$

为自然排列。设$|A|$的h行与第k行对换而成为行列式$|B|$。对$|B|$来说，行的自然顺序是

$$1\ 2\ 3\ \cdots\ k\ \cdots\ h\ \cdots\ n$$

可见

$$|B|=\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{奇数+t}a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{hth}\cdots a_{ktk}\cdots a_{nt_n}.$$

于是，$|B|=-|A|$。

性质 5　若行列式有两行(列)相同或者成比例，则行列式等于零。

这可以从性质 4 和性质 3 直接得出。

性质 6　若将行列式$|A|$的某行（列）的元素都表为两项之和，例如将第i行每个元素表为

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\ \ (j=1,2,\cdots,n),$$

则$|A|$等于$|B|$与$|C|$之和，在$|B|$、$|C|$中，除了第i行元素分别为b_{ij}和c_{ij}（$j=1,2,\cdots,n$）以外，其他元素都与$|A|$中对应的元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

事实上，

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{t_1 t_2 \cdots t_n} (-1)^t a_{1t_1} a_{2t_2} \cdots (b_{it_i} + c_{it_i}) \cdots a_{nt_n} \\ &= \sum_{t_1 t_2 \cdots t_n} (-1)^t a_{1t_1} a_{2t_2} \cdots b_{it_i} \cdots a_{nt_n} \\ &\quad + \sum_{t_1 t_2 \cdots t_n} (-1)^t a_{1t_1} a_{2t_2} \cdots c_{it_i} \cdots a_{nt_n} \\ &= |B| + |C|. \end{aligned}$$

性质 7　把行列式$|A|$的一行（列）的所有元素乘以同一个数，分别加到另一行(列)的对应元素上去，所得行列式与$|A|$相等。

这可以从性质 6 和性质 5 直接得出。

例 2　将下列行列式化为第一行只有一个元素不为零的行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[(-2)\text{乘第1列加到第4列}]{(-1)\text{乘第1列加到第3列}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第3行提出公因子}(-1)]{\text{对换第1、2行}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

§1—2 行列式相乘法则

给定两个n阶行列式 $|a_{ij}|$和$|b_{ij}|$。它们的乘积可以用一个同阶行列式$|c_{ij}|$表示，

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)。 \tag{1.7}$$

这叫做行列式相乘法则。下面先用二阶行列式相乘验证一下，然后作出一般的证明。当$n=2$时，

$$\begin{aligned}
|c_{ij}| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{22} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} b_{21}b_{12} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{22} \\
&= 0+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{12}+0 \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

对于n阶的一般情况，

$$|c_{ij}|=\begin{vmatrix}\sum\limits_{s_1=1}^{n}a_{1s_1}b_{s_11} & \sum\limits_{s_2=1}^{n}a_{1s_2}b_{s_22}\cdots & \sum\limits_{s_n=1}^{n}a_{1s_n}b_{s_nn}\\ \sum\limits_{s_1=1}^{n}a_{2s_1}b_{s_11} & \sum\limits_{s_2=1}^{n}a_{2s_2}b_{s_22}\cdots & \sum\limits_{s_n=1}^{n}a_{2s_n}b_{s_nn}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \sum\limits_{s_1=1}^{n}a_{ns_1}b_{s_11} & \sum\limits_{s_2=1}^{n}a_{ns_2}b_{s_22}\cdots & \sum\limits_{s_n=1}^{n}a_{ns_n}b_{s_nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n}\cdots\sum_{s_n=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1s_1}b_{s_11} & a_{1s_2}b_{s_22}\cdots a_{1s_n}b_{s_nn}\\ a_{2s_1}b_{s_11} & a_{2s_2}b_{s_22}\cdots a_{2s_n}b_{s_nn}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{ns_1}b_{s_11} & a_{ns_2}b_{s_22}\cdots a_{ns_n}b_{s_nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n}\cdots\sum_{s_n=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1s_1} & a_{1s_2}\cdots a_{1s_n}\\ a_{2s_1} & a_{2s_2}\cdots a_{2s_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{ns_1} & a_{ns_2}\cdots a_{ns_n}\end{vmatrix}b_{s_11}b_{s_22}\cdots b_{s_nn}.$$

末了一式应该有n^n项，但在这些项中，当$s_1,s_2,\cdots,s_n$有两个取相同的数时，相应的项就等于零；只有当$s_1,s_2,\cdots,s_n$取不同的数时，才可能不等于零。换句话说，只有当$s_1,s_2,\cdots s_n$取$1,2,\cdots,n$的某个排列时，相应的项才可能不等于零。因此，上面这n^n项中，实际上只要保留如下的$n!$项：

$$|c_{ij}|=\sum_{s_1s_2\cdots s_n}\begin{vmatrix}a_{1s_1} & a_{1s_2}\cdots a_{1s_n}\\ a_{2s_1} & a_{2s_2}\cdots a_{2s_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{ns_1} & a_{ns_2}\cdots a_{ns_n}\end{vmatrix}b_{s_11}b_{s_22}\cdots b_{s_nn}.$$

现在将上式右边各项中的行列式作列的对换，使各行元素的第二下标按自然顺序排列，而使各项中的行列式成为公因式。但这样作时各个行列式要改变正负符号$[s_1,s_2,\cdots,s_n]$次，其中$[s_1,s_2,\cdots,s_n]$表示排列$s_1\ s_2\cdots s_n$的反序数。于是，